

塑性大变形问题的唯一性、稳定性和极值原理

王自强

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文从考虑几何非线性的塑性大变形基本方程出发,讨论了塑性大变形问题的唯一性、稳定性与极值原理。提出了确定边值问题的解的唯一性判别准则;分析了平衡状态稳定性的充分条件。最后讨论了边值问题与变分问题等价的充分条件。

一、引言

近十多年来,关于塑性大变形理论及非线性有限元分析引起了普遍的兴趣^[1-3]。一方面对塑性大变形的本构方程进行了大量的基础研究;另一方面结合结构非线性分析和断裂力学裂纹顶端弹塑性场分析,提出了各种形式的塑性大变形的有限元公式。但是关于塑性大变形问题的解的唯一性、稳定性研究较少,特别是有关速率方程的边值问题与变分问题的等价性还缺少深入研究。

Hill^[6]曾经对有限弹性变形问题的唯一性、稳定性及有关的极值原理作过深入的研究。对于刚塑性材料及遵守有势本构方程的非弹性材料有限变形问题的唯一性、稳定性及极值原理 Hill 也作了详细的研究^[7,8]。

但是对于大多数金属材料,弹塑性变形加载与卸载遵守不同的规律,本构方程是两可的,不可能找到唯一的势函数来表述本构方程。因此,关于塑性大变形问题的唯一性、稳定性及极值原理有待进一步研究。

二、基本方程

在欧几里德空间中,引入两种坐标系。一种坐标系是物体在基准状态各点的空间坐标,叫做 Lagrange 坐标系,用 $\{X^K\}$ 来表示,它是任意的曲线坐标。

另一种坐标系用来表示每个瞬时物体各点的空间坐标,叫做 Euler 坐标系。用 x^i , x^2 , x^3 来表示。约定 $\{x^k\}$ 是直角坐标系。对应的基向量是 i_1, i_2, i_3 。

对于基准状态,坐标系 $\{X^K\}$ 所对应的基向量是 G_1^0, G_2^0, G_3^0 。对于变形状态,坐标系 $\{X^K\}$ 所对应的基向量是 G_1, G_2, G_3 。

约定用任意的粗黑体字表示向量场或张量场。向量或张量在 Euler 坐标系中的分量用小写斜体字母表示,上、下标用小写拉丁字母表示。向量或张量在 Lagrange 坐标系中

本文于1979年2月收到。

的分量用大写斜体字母表示,上、下标用大写拉丁字母表示。

令 σ 是真应力张量,则平衡方程为:

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^i} + f^j = 0 \quad \text{在 } V \text{ 内} \quad (1)$$

$$\sigma^{in_i} = p^i, \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad (2)$$

引入 Kirchhoff 应力张量 \mathbf{T} 及名义应力张量 \mathbf{S}

$$\left. \begin{aligned} i^j &= \sqrt{\frac{G}{G^0}} \sigma^{ij}, & T^{KL} &= \sqrt{\frac{G}{G^0}} \Sigma^{KL} \\ T^{KL} G_L &= S^{KL} G_L^0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

用名义应力表示的平衡方程及边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S^{KL}}{\partial X^K} + {}_0\dot{F}^L &= 0, & \text{在 } V^0 \text{ 内} \\ S^{KL} {}_0N_K &= {}_0\dot{P}^L, & \text{在 } S_\sigma^0 \text{ 上} \\ {}_0U_L &= {}_0\bar{U}_L, & \text{在 } S_u^0 \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

塑性大变形的本构方程可表示为^[5,9]

$$D_{KL} = E_{KLMN} \frac{\mathcal{D} T^{MN}}{\mathcal{D} t} + \alpha \dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial T^{KL}} \quad (5)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{若 } \bar{\sigma} = A(\Lambda), \text{ 且 } \bar{T}^{KL} D_{KL} > 0 \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases} \quad (6)$$

$$\dot{\Lambda} = \bar{T}^{MN} D_{MN} / \left\{ F \cdot \left(1 + \frac{A'(\Lambda)}{3\mu} \right) \right\} \quad (7)$$

其中, $\bar{\sigma}$ 是等效应力, Λ 是等效塑性应变

$$F = \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} G_{KM} G_{LN} \bar{T}^{KL} \bar{T}^{MN}} \quad (8)$$

$$\Lambda = \int \bar{\varepsilon}(p) dt \quad (9)$$

$$\bar{\varepsilon}(p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{G^{KM} G^{LN} D_{KL}^{(p)} D_{MN}^{(p)}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{d_{kl}^{(p)} d_{kl}^{(p)}} \quad (10)$$

F 是加载函数,硬化规律可表示为

$$\bar{\sigma} = F = A(\Lambda) \quad (11)$$

$\frac{\mathcal{D} T^{MN}}{\mathcal{D} t}$ 表示对应力张量 \mathbf{T} 的刚体导数在 Lagrange 坐标系中的分量。弹性系数张量 E_{KLMN} 为

$$E_{KLMN} = \frac{1}{E} \cdot \{ (1 + \nu) G_{KM} G_{LN} - \nu G_{KL} G_{MN} \} \quad (12)$$

对方程(4)求物质导数,得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S^{KL}}{\partial X^K} + {}_0\dot{F}^L &= 0, & \text{在 } V^0 \text{ 内} \\ S^{KL} {}_0N_K &= {}_0\dot{P}^L, & \text{在 } S_\sigma^0 \text{ 上} \\ {}_0\dot{V}_L &= {}_0\bar{V}_L, & \text{在 } S_u^0 \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

在以下的讨论中,我们总是取所讨论瞬时的变形状态作为基准状态。这样得到的公式,比较简洁。

三、唯一性准则

速率方程归结为下述边值问题:在准静态变形过程的某个阶段,物体的几何形状、应力的内部分布,材料参数的瞬时值,各向异性状况、材料的不均匀性都已确定。当体力的变化率、表面载荷的变化率及几何约束给定时,那么物体各点的速度场及应力率场就必须通过求解边值问题来得到(广义的时间参量用单调增加的几何参数来度量)。

设想有两个不同的解答,它们的差用 ΔV^K , ΔS^{KL} 来表示,那么必有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta S^{KL}}{\partial X^K} &= 0, \quad \text{在 } V^0 \text{ 内} \\ \Delta S^{KL}_0 N_K &= 0, \quad \text{在 } S^0 \text{ 上} \\ \Delta_0 V^L &= 0, \quad \text{在 } S_u \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由式(14)立即推得^[7]

$$\int_{V^0} \Delta S^{KL} \cdot \frac{\partial \Delta_0 V^L}{\partial X^K} dV^0 = \int_{V^0} \Delta S^{KL}_0 N_K \Delta_0 V^L dS^0 = 0 \quad (15)$$

由此,可以推断若对所有满足相同几何约束条件的一对不恒等的连续可微速度场,下叙泛函恒正

$$L_2 = \int_{V^0} \Delta S^{KL} \frac{\partial \Delta_0 V^L}{\partial X^K} dV^0 > 0 \quad (16)$$

那么边值问题的解答必定是唯一的。

应该指正,由于塑性大变形的本构方程(5)是非线的,所以 ΔS^{KL} 与 $\Delta_0 V^L$ 之间并不存在一一对应的关系,对于同一个 $\Delta_0 V^L$ 可以对应多个 ΔS^{KL} , 所以泛函 L_2 , 既是速度场 ${}_0V^L$ 的泛函,也是 $\Delta_0 V^L$ 的泛函。要判断泛函 L_2 是否正定,一般说来比较困难。为此,需要引入一个比较直接的判别准则。

依照文献^[4,9],有下列公式

$$\int_{V^0} S^{KL}_0 \tilde{V}_L |_{,K} dV^0 = \int_{V^0} \left\{ \dot{T}^{KL} \tilde{D}_{KL} + T^{KL} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial X^K} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial X^L} \right\} dV^0 \quad (17)$$

\mathbf{V} 是真实速度场, $\tilde{\mathbf{V}}$ 是任意的速度场, \mathbf{V} 与 $\tilde{\mathbf{V}}$ 之间独立无关。通过本构方程(5),可以得到 Kirchhoff 应力张量 \mathbf{T} 的刚体导数,进而得到 \dot{T}^{KL} 及 \dot{S}^{KL} 。设想速度场 \mathbf{V} 及 \mathbf{V}_* 分别对应着 T^{KL} , S^{KL} 及 \dot{T}^{KL} , \dot{S}^{KL} ; 取 $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_* - \mathbf{V} = \Delta \mathbf{V}$, 则有

$$\begin{aligned} \int_{V^0} \dot{S}^{KL}_0 \Delta_0 V_L |_{,K} dV^0 &= \int_{V^0} \left\{ \dot{T}^{KL} \Delta D_{KL} + T^{KL} \frac{\partial \Delta \mathbf{V}}{\partial X^K} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_*}{\partial X^L} \right\} dV^0 \\ \int_{V^0} \dot{S}^{KL} \Delta_0 V_L |_{,K} dV^0 &= \int_{V^0} \left\{ \dot{T}^{KL} \Delta D_{KL} + T^{KL} \frac{\partial \Delta \mathbf{V}}{\partial X^K} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial X^L} \right\} dV^0 \end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned} &\int_{V^0} (\dot{S}^{KL}_0 - \dot{S}^{KL}) \Delta_0 V_L |_{,K} dV^0 \\ &= \int_{V^0} \left\{ (\dot{T}^{KL}_0 - \dot{T}^{KL}) \Delta D_{KL} + T^{KL} \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{V}}{\partial X^K} \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{V}}{\partial X^L} \right\} dV^0 \quad (18) \end{aligned}$$

将式(18)转向 Euler 坐标, 得

$$L_1 = \int_{V^0} \left\{ ({}^{(1)}i^{kl} - {}^{(1)}i^{kl}) \tilde{d}_{kl} + i^{kl} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^l} \right\} dV^0 \quad (19)$$

其中 $i^{(1)kl}$ 表示 Kirchhoff 应力张量 \mathbf{T} 的向量导数在 Euler 坐标系中的分量。将向量导数转换成刚体导数, 为了书写简单起见, 用带有“ ∇ ”的字母表示刚体导数。有

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_{V^0} \left\{ ({}^{(s)}i^{kl} - {}^{(s)}i^{kl}) \tilde{d}_{kl} - 2i^{kl} \tilde{d}_{km} \tilde{d}_{ml} + i^{kl} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^l} \right\} dV^0 \\ &= \int_{V^0} \left\{ ({}^{(s)}i^{kl} - {}^{(s)}i^{kl}) \tilde{d}_{kl}^{(c)} + ({}^{(s)}i^{kl} - {}^{(s)}i^{kl}) (\alpha_* \dot{\Lambda}_* - \alpha \dot{\Lambda}) \frac{\partial F}{\partial i^{kl}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot i^{kl} \tilde{d}_{km} \tilde{d}_{ml} - i^{kl} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^l} \right\} dV^0 \\ &= \int_{V^0} \left\{ \left[2\mu \tilde{d}_{kl} \tilde{d}_{kl} + \lambda \delta_{kl} (\delta_{mn} \tilde{d}_{mn}) - 2\mu (\alpha_* \dot{\Lambda}_* - \alpha \dot{\Lambda}) \frac{\partial F}{\partial i^{kl}} \right] \right. \\ &\quad \times \left[\tilde{d}_{kl} - (\alpha_* \dot{\Lambda}_* - \alpha \dot{\Lambda}) \frac{\partial F}{\partial i^{kl}} \right] + (\dot{F}_* - \dot{F}) (\alpha_* \dot{\Lambda}_* - \alpha \dot{\Lambda}) \\ &\quad \left. - 2i^{kl} \tilde{d}_{km} \tilde{d}_{ml} + i^{kl} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^l} \right\} dV^0 \\ &= \int_{V^0} \left\{ 2\mu \tilde{d}_{kl} \tilde{d}_{kl} + \lambda (\delta_{kl} \tilde{d}_{kl})^2 + 2\mu \left[(\alpha_* \dot{\Lambda}_* - \alpha \dot{\Lambda}) F_T - \frac{1}{F_T} \frac{\partial F}{\partial i^{kl}} \tilde{d}_{kl} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\mu}{F_T^2} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial i^{kl}} \tilde{d}_{kl} \right)^2 + (\dot{F}_* - \dot{F}) (\alpha_* \dot{\Lambda}_* - \alpha \dot{\Lambda}) - 2i^{kl} \cdot \tilde{d}_{km} \tilde{d}_{ml} \right. \\ &\quad \left. + i^{kl} \cdot \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^l} \right\} dV^0 \quad (20) \end{aligned}$$

这里

$$F_T = \sqrt{\frac{\partial F}{\partial i^{kl}} \frac{\partial F}{\partial i^{kl}}} \quad (21)$$

不难证实

$$(\dot{F}_* - \dot{F}) (\alpha_* \dot{\Lambda}_* - \alpha \dot{\Lambda}) \geq 0 \quad (22)$$

引入泛函 L_2^*

$$\begin{aligned} L_2^* &= \int_{V^0} \left\{ 2\mu \tilde{d}_{kl} \tilde{d}_{kl} + \lambda (\delta_{kl} \tilde{d}_{kl})^2 - 2 \cdot i^{kl} \tilde{d}_{km} \tilde{d}_{ml} \right. \\ &\quad \left. + i^{kl} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x^l} \right\} dV^0 - \int_{V_P^0} \frac{2\mu}{F_T^2} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial i^{kl}} \tilde{d}_{kl} \right)^2 dV^0 \quad (23) \end{aligned}$$

其中 V_P^0 表示所讨论瞬时的塑性区。

显然当二次型泛函 L_2^* 是正定的泛函时, 泛函 L_2 也必定是正定的。

关于唯一性的判别准则可归结如下: 若泛函 L_2^* 是正定的二次型泛函, 那么速率方程边值问题的解答必定是唯一的。

应该指出, 由于 L_2^* 是二次型泛函, 从 L_2^* 的极小可以导出线性方程。因此, 泛函 L_2^* 是否正定, 比较容易确定。

另一方面, 上述的判别准则只提供了唯一性的充分条件, 并未涉及唯一性的必要条件。因此, 当 L_2^* 不满足正定条件时, 并不意味着边值问题一定有多值解。

四、稳定性泛函

关于平衡稳定性的能量准则可以概括如下^[10]: 一个力学系统的平衡状态是稳定的; 如果, 也仅仅如果当这个系统转向任何邻近的运动许可状态时, 外力所做的功不大于内力所做的功(内能的积蓄或耗散)。

设想系统从某个平衡状态转向邻近的许可状态是通过连续的变化过程来实现的。在这个变化过程中, 可能速度场用 \mathbf{V} 来表示。

外力对力学系统所做的功率 \dot{W} 为:

$$\dot{W} = \int_V f^i \cdot V_i dV + \int_{S_0} P^i V_i dS = \int_{V^0} \mathbf{f}^0 \cdot \mathbf{V} dV^0 + \int_{S_0^0} \mathbf{P}^0 \cdot \mathbf{V} dS^0, \quad (24)$$

内力所做的功率 \dot{U} 为

$$\dot{U} = \int_V t^{kl} \cdot d_{kl} dV = \int_V \Sigma^{KL} D_{KL} dV = \int_{V^0} S^{KL} V_K |_{L} dV^0 \quad (25)$$

设想初始时刻记为 t_0 , 那么从时刻 t_0 到 t 之间内力所做的功与外力所做的功之差为:

$$\Delta \Pi = \int_{t_0}^t \left\{ \int_{V^0} S^{KL} V_K |_{L} dV^0 - \int_{V^0} \mathbf{f}^0 \cdot \mathbf{V} dV^0 - \int_{S_0^0} \mathbf{P}^0 \cdot \mathbf{V} dS^0 \right\} dt \quad (26)$$

假定讨论的是匀速运动, 也就是说, 在时间 t_0 到 t 内,

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{t=t_0} \quad (27)$$

另有

$$S^{KL} = (S^{KL})_{t=t_0} + (\dot{S}^{KL})_{t=t_0} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot (\ddot{S}^{KL})_{t=t_0} \cdot (t - t_0)^2 + \dots \quad (28)$$

代入式(26)得

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \int_{t_0}^t \left\{ \int_{V^0} \left[(S^{KL})_{t=t_0} + (\dot{S}^{KL})_{t=t_0} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} (\ddot{S}^{KL})_{t=t_0} \cdot (t - t_0)^2 + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot V_K |_{L} dV^0 - \int_{V^0} \mathbf{f}^0 \cdot \mathbf{V} dV^0 - \int_{S_0^0} \mathbf{P}^0 \cdot \mathbf{V} dS^0 \right\} dt \\ &= \delta \Pi \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \delta^2 \Pi \cdot (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \delta^3 \Pi \cdot (t - t_0)^3 + \dots \quad (29) \end{aligned}$$

其中

$$\delta \Pi = \int_{V^0} (\dot{S}^{KL})_{t=t_0} \cdot V_K |_{L} dV^0 - \int_{V^0} \mathbf{f}^0 \cdot \mathbf{V} dV^0 - \int_{S_0^0} \mathbf{P}^0 \cdot \mathbf{V} dS^0 \quad (30)$$

$$\delta^2 \Pi = \int_{V^0} (\ddot{S}^{KL})_{t=t_0} \cdot V_K |_{L} dV^0 \quad (31)$$

$$\delta^3 \Pi = \int_{V^0} (\dddot{S}^{KL})_{t=t_0} \cdot V_K |_{L} dV^0 \quad (32)$$

.....

由于 S^{KL} 满足平衡方程。因此, 一次变分对任意的可能速度场恒等于零。从公式(29)不难看出, 对充分小的时间间隔 $(t - t_0)$, 欲使 $\Delta \Pi$ 对于任意的非零的可能速度 \mathbf{V} 恒正的充分条件是二次变分 $\delta^2 \Pi$ 是正定的泛函。对任意的非零的可能速率 \mathbf{V} , 即有:

$$\delta^2 \Pi = \int_{V^0} (\ddot{S}^{KL})_{t=t_0} \cdot V_K |_{L} dV^0 > 0 \quad (33)$$

值得注意的是条件(33)与(16)并不相同。虽然 \mathbf{V} 与 $\Delta\mathbf{V}$ 都满足在 S_u 上为零的条件,因此都是可能位移。但 $(\dot{\mathbf{S}}^{KL})_{t=t_0}$ 是 \mathbf{V} 的单值函数,而 $\Delta\dot{\mathbf{S}}^{KL}$ 恰是 $\Delta\mathbf{V}$ 的多值函数。

如果预先约定所讨论的瞬时,速度场在 S_u 上,必须满足恒等零的条件,那么在 $\Delta\mathbf{V}$ 中,作为特殊情况可以取条件(33)中的可能速度场及恒等于零的速度场作为一对,由此产生的 $\Delta\mathbf{V}$ 等于 \mathbf{V} , $\Delta\dot{\mathbf{S}}^{KL}$ 等于 $(\dot{\mathbf{S}}^{KL})_{t=t_0}$ 。所以关于唯一性的充分条件(16)得到满足时,稳定性的充分条件(33)必然得到满足。反之不然,稳定性的充分条件得到满足并不能保证唯一性的充分条件得到满足。

现在来研究二次变分 $\delta^2\Pi$ 的具体内容。通过类似于第三节的推导,不难得到

$$\delta^2\Pi = \int_V \left\{ 2\mu d_{ij}d_{ij} + \lambda(d_{kk})^2 - \frac{\alpha}{g} (\Lambda_{ij}d_{ij})^2 - \sigma_{ij}(2d_{ik}d_{jk} - V_{k,i}V_{k,i}) \right\} dV \quad (34)$$

其中

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{若 } \bar{\sigma} = A(\Lambda), \text{ 且 } \bar{\sigma}_{kl} \cdot d_{kl} > 0 \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \quad (35)$$

$$g = 1 + A'(\Lambda)/3\mu \quad (36)$$

$$\Lambda_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} / \sqrt{\bar{\sigma}_{kl}\bar{\sigma}_{kl}} \quad (37)$$

稳定性泛函 $\delta^2\Pi$ 是可能速度场 \mathbf{V} 的准二次型泛函,由于 α 的数值是两可的,因此,泛函 $\delta^2\Pi$ 极小所产生的 Euler 方程是非线性的。

五、极值原理

在微小变形的塑性理论中,确定速度场的边值问题与下述泛函的极小值问题等价^[11]:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_V \dot{\sigma}_{ij}d_{ij}dV - \int_V f_i V_i dV - \int_{S_\sigma} p_i V_i dS \quad (38)$$

在塑性大变形理论中,相应的泛函是什么?边值问题在什么情况下与泛函的极小值问题等价?这是本节要讨论的问题。

引入泛函 Π_2

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{1}{2} \int_{V^0} \left\{ \dot{T}^{KL} D_{KL} + T^{KL} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial X^K} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial X^L} \right\} dV^0 - \int_{V^0} \dot{\mathbf{f}}^0 \cdot \mathbf{V} dV^0 - \int_{S_\sigma^0} \dot{\mathbf{P}}^0 \cdot \mathbf{V} dS^0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{V^0} \left\{ \dot{t}^{ij} d_{ij} + t^{ij} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^j} \right\} dV^0 - \int_{V^0} \dot{\mathbf{f}}^0 \cdot \mathbf{V} dV^0 - \int_{S_\sigma^0} \dot{\mathbf{P}}^0 \cdot \mathbf{V} dS^0 \end{aligned} \quad (39)$$

泛函 Π_2 化成速度场 \mathbf{V} 表示的形式将是

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{1}{2} \int_{V^0} \left\{ 2\mu d_{ij}d_{ij} + \lambda(d_{kk})^2 - \frac{\alpha}{g} (\Lambda_{ij}d_{ij})^2 - \sigma_{ij}(2d_{ik}d_{jk} - V_{k,i}V_{k,i}) \right\} dV^0 \\ &\quad - \int_{V^0} \dot{\mathbf{f}}^0 \cdot \mathbf{V} dV^0 - \int_{S_\sigma^0} \dot{\mathbf{P}}^0 \cdot \mathbf{V} dS^0 \end{aligned} \quad (40)$$

先证明下述命题:

任意使泛函 Π_2 取极小值的连续可微速度场 \mathbf{V} (该速度场满足 S_σ 上的速度边界条件),必定是速度场边值问题的解,也就是说由 \mathbf{V} 产生的应力率满足平衡方程及在 S_σ^0 上

的应力率边界条件.

设想在 V^0 内的任意点 M , 该点可以处在弹性区内, 也可以处在塑性加载区内或卸载区内. 例如, 点 M 处在塑性加载区内, 则有:

在点 M 处, $\Lambda_{ij}d_{ij} > 0$

由于 \mathbf{V} 是连续可微的速度场, 因此, 总能找到一个充分小的包含点 M 的邻域 V_M^0 . 在 V_M^0 内有

$$\Lambda_{ij}d_{ij}^* > 0$$

记

$$\delta_1 = \text{Min}_{M^* \in V_M^0} \Lambda_{ij}d_{ij}^* \quad (41)$$

由于 $\Lambda_{ij}d_{ij}^*$ 是点 M^* 空间坐标的连续函数, 因此, 最小值 δ_1 必然存在, 且 $\delta_1 > 0$.

讨论任意的在 V_M^0 内不恒等于零、而在 V_M^0 之外恒等于零的连续可微速度场 $\tilde{\mathbf{V}}$. 命

$$\delta_2 = \text{Max}_{M^* \in V_M^0} |\Lambda_{ij}\tilde{d}_{ij}^*| \quad (42)$$

若 $\delta_2 = 0$, 则有

$$\Lambda_{ij}\tilde{d}_{ij}^* \equiv 0, \quad M^* \in V_M^0$$

此时, 对任意的 ε 必有

$$\Lambda_{ij}(d_{ij}^* + \varepsilon\tilde{d}_{ij}^*) > 0, \quad M^* \in V_M^0$$

若 $\delta_2 > 0$, 则当 $|\varepsilon| < \delta_1/\delta_2$ 时, 必有:

$$\Lambda_{ij}(d_{ij}^* + \varepsilon\tilde{d}_{ij}^*) \geq \delta_1 - |\varepsilon| \cdot \delta_2 > 0, \quad M^* \in V_M^0$$

由于速度场 \mathbf{V} , 使泛函 Π_2 取极小, 因此, 对任意充分小的 ε 必有

$$\Phi(\varepsilon) = \Pi_2(\mathbf{V} + \varepsilon\tilde{\mathbf{V}}) - \Pi_2(\mathbf{V}) \geq 0 \quad (43)$$

所以有

$$\Phi'(0) = 0$$

当 $|\varepsilon| < \delta_1/\delta_2$ 时, 速度场 $\mathbf{V} + \varepsilon\tilde{\mathbf{V}}$ 所产生的塑性加载区、卸载区及弹性区与速度场 \mathbf{V} 对应的塑性加载区、卸载区及弹性区完全一致. 由此两个速度场所对应的判别系数 α 恒等. 即:

$$\alpha^* = \alpha$$

所以 $\Phi'(0)$ 存在且等于

$$\begin{aligned} \Phi'(0) = & \int_{V^0} \left\{ 2\mu d_{ij}\tilde{d}_{ij} + \lambda(d_{kk})\tilde{d}_{kk} - \frac{\alpha}{g} (\Lambda_{ij}d_{ij})(\Lambda_{kl}\tilde{d}_{kl}) \right. \\ & \left. - \sigma_{ij}(2d_{ik}\tilde{d}_{jk} - V_{k,i}\tilde{V}_{k,i}) \right\} dV^0 - \int_{V^0} \mathbf{f}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}} dV^0 - \int_{S_0} \mathbf{P}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}} dS \quad (44) \end{aligned}$$

利用本构方程(5), $\Phi'(0)$ 可化为

$$\begin{aligned} \Phi'(0) = & \int_{V^0} \left\{ (2\mu d_{ij} + \lambda(d_{kk})\delta_{ij} - \frac{\alpha}{g} (\Lambda_{kl}d_{kl})\Lambda_{ij}) \tilde{d}_{ij} \right. \\ & \left. - \sigma_{ij}(2d_{ik}\tilde{d}_{jk} - V_{k,i}\tilde{V}_{k,i}) \right\} dV^0 - \int_{V^0} \mathbf{f}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}} dV^0 - \int_{S_0} \mathbf{P}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}} dS \\ = & \int_{V^0} \left\{ \frac{\mathcal{D}^{ij}}{\mathcal{D}t} \cdot \tilde{d}_{ij} - (\sigma_{ik}d_{kj} + \sigma_{kj}d_{ik})\tilde{d}_{ij} + \sigma_{ij}V_{k,i}\tilde{V}_{k,i} \right\} dV^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{V^0} \dot{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{V}} dV^0 - \int_{S^0} \dot{\mathbf{P}}^0 \cdot \mathbf{V} dS \\
& = \int_{V^0} \left\{ t^{ij} \dot{d}_{ij} + t^{ij} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^j} \right\} dV^0 - \int_{V^0} \dot{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{V}} dV^0 \\
& - \int_{V^0} \dot{\mathbf{P}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}} dS^0 \quad (45)
\end{aligned}$$

式(45)中的 t^{ij} 是 Kirchhoff 应力张量在 Euler 坐标系中的分量, \dot{t}^{ij} 是 t^{ij} 的向量导数, 另外, 已经约定取所讨论瞬时的变形状态为基准状态. 将式(45)转向 Lagrange 坐标系, 得

$$\begin{aligned}
\Phi'(0) &= \int_{V^0} \left\{ \dot{T}^{KL} \tilde{D}_{KL} + T^{KL} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial X^K} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial X^L} \right\} dV^0 - \int_{V^0} \dot{\mathbf{f}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}} dV^0 - \int_{S^0} \dot{\mathbf{P}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}} dS^0 \\
&= \int_{V^0} \dot{S}^{KL} \tilde{V}_L |_{,K} dV^0 - \int_{V^0} \dot{\mathbf{f}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}} dV^0 - \int_{S^0} \dot{\mathbf{P}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}} dS^0 \\
&= \int_{V^0} \dot{S}^{KL} \mathbf{G}_L^0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial X^K} dV^0 - \int_{V^0} \dot{\mathbf{f}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}} dS^0 \\
&= \int_{V^0} \frac{1}{\sqrt{G^0}} \left\{ \frac{\partial}{\partial X^K} [\sqrt{G^0} \dot{S}^{KL} \mathbf{G}_L^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}}] - \frac{\partial}{\partial X^K} [\sqrt{G^0} \cdot \dot{S}^{KL} \mathbf{G}_L^0] \cdot \tilde{\mathbf{V}} \right\} dV^0 \\
&- \int_{V^0} \dot{\mathbf{f}}^0 \tilde{\mathbf{V}} dV^0 - \int_{S^0} \dot{\mathbf{P}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}} dS^0 \\
&= \int_{V^0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{G^0}} \frac{\partial}{\partial X^K} [\sqrt{G^0} \cdot \dot{S}^{KL} \mathbf{G}_L^0] - \dot{\mathbf{f}}^0 \right\} \cdot \tilde{\mathbf{V}} dV^0 \\
&+ \int_{S^0} \{ \dot{S}^{KL} \mathbf{G}_L^0 N_K - \dot{\mathbf{P}}^0 \} \cdot \tilde{\mathbf{V}} dS^0 \quad (46)
\end{aligned}$$

由于 $\tilde{\mathbf{V}}$ 是任意的在 V_M^0 内不恒等于零, 而在 V_M^0 之外恒等于零的连续可微速度场, 因此, 根据变分原理, 得

$$\frac{1}{\sqrt{G^0}} \frac{\partial}{\partial X^K} [\sqrt{G^0} \dot{S}^{KL} \mathbf{G}_L^0] - \dot{\mathbf{f}}^0 = 0; \text{ 在 } V_M^0 \text{ 内} \quad (47)$$

这就证明了在 M 点附近, 应力率场 \dot{T}^{KL} 、 \dot{S}^{KL} 满足平衡方程. 当 M 点处在弹性区或卸载区内时, 同样可以证明方程(47)得到满足.

为了证明 \mathbf{V} 产生的应力率 S^0 上满足应力率边界条件. 设想点 M 位于 S^0 上, 此时可能出现下面三种情况:

点 M 处于弹性区内; 点 M 处于塑性加载区内; 点 M 处于卸载区内. 这三种情况, 证明方法相同. 例如, 点 M 处于塑性加载区内, 此时有

$$\sigma_{ij} d_{ij} > 0, \text{ 在点 } M \text{ 处}$$

由于 \mathbf{V} 是连续可微速度场, 因此, 必定可以找到一个充分小的包含点 M 在内的邻域 V_M^0 , 在 V_M^0 内有

$$\Lambda_{ij} d_{ij}^* > 0$$

记 $(S^0)_M$ 为 V_M^0 截出的表面积(从 S^0 中).

讨论任意的在 V_M^0 内不恒等于零, 而在 V_M^0 之外恒等于零的连续可微的速度场 $\tilde{\mathbf{V}}$.

重复前面的推理, 不难得到下述变分式

$$\int_{V^0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{G^0}} \frac{\partial}{\partial X^K} [\sqrt{G^0} \dot{S}^{KL} \mathbf{G}_L^0] - \dot{\mathbf{f}}^0 \right\} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_d V^0 + \int_{(S^0)_M} \left\{ \dot{S}^{KL} \mathbf{G}_L^0 N_K - \dot{\mathbf{P}}^0 \right\} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_d S^0 = 0 \quad (48)$$

由于速度场 \mathbf{V} 所产生的应力率场 \dot{S}^{KL} 满足平衡方程, 由此, 根据变分原理, 不难得到:

$$\dot{S}^{KL} \mathbf{G}_L^0 N_K = \dot{\mathbf{P}}^0, \text{ 在 } (S^0)_M \text{ 上}$$

这就证明了在点 M 附近, 应力率场 $\dot{S}^{KL} \cdot \dot{S}^{KL}$ 满足应力率的边界条件.

现在进一步证明下述命题:

若二次型泛函 L_2^* 是正定的, 那么边值问题的解, 必定使泛函 Π_2 取极小值.

设 \mathbf{V} 是边值问题的解, $\tilde{\mathbf{V}}$ 是任意的可能速度场(满足在 S_u 上的关于速度的齐次边界条件). 则

$$\begin{aligned} \Pi_2(\mathbf{V} + \tilde{\mathbf{V}}) - \Pi_2(\mathbf{V}) &= \int_{V^0} \left\{ {}^{(1)}i^{ij} [(d_{ij})_* - d_{ij}] + i^{ij} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial x^j} \right\} dV^0 \\ &\quad - \int_{V^0} \dot{\mathbf{f}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}}_d V^0 - \int_{S^0} \dot{\mathbf{P}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}}_d S^0 + \frac{1}{2} \\ &\quad \times \int_{V^0} \left\{ [({}^{(1)}i^{ij})_* - ({}^{(1)}i^{ij})] (d_{ij})_* - ({}^{(1)}i^{ij}) [(d_{ij})_* \right. \\ &\quad \left. - (d_{ij})] + i^{ij} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial x^j} \right\} dV^0 \end{aligned} \quad (49)$$

其中, $(d_{ij})_*$, $({}^{(1)}i^{ij})_*$ 分别表示速度场 $\mathbf{V} + \tilde{\mathbf{V}}$ 所产生的应变率及 Kirchhoff 应力张量的向量导数.

由于 ${}^{(1)}i^{ij}$ 满足应力率的平衡方程, 因此,

$$\int_{V^0} \left\{ {}^{(1)}i^{ij} \tilde{d}_{ij} + i^{ij} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial x^j} \right\} dV^0 - \int_{V^0} \dot{\mathbf{f}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}}_d V^0 - \int_{S^0} \dot{\mathbf{P}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{V}}_d S^0 = 0$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_2 &= \frac{1}{2} \int_{V^0} \left\{ [({}^{(1)}i^{ij})_* - ({}^{(1)}i^{ij})] (d_{ij})_* + i^{ij} [d_{ij} - (d_{ij})_*] \right\} dV^0 \\ &\quad + i^{ij} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial x^j} \\ &= \frac{1}{2} \int_{V^0} \left\{ \mu_{ijmn} [({}^{(1)}i^{ij})_* - ({}^{(1)}i^{ij})] [({}^{(1)}i^{mn})_* - ({}^{(1)}i^{mn})] + \alpha_* \Lambda_* (\tilde{\mathbf{F}}_* \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\mathbf{F}}) - (\alpha_* \Lambda_* - \Lambda \alpha) \cdot \tilde{\mathbf{F}} - i^{ij} (2 \tilde{d}_{ik} \tilde{d}_{jk} - \tilde{V}_{ki} \tilde{V}_{kj}) \right\} dV^0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{V^0} \left\{ 2 \mu \tilde{d}_{ij} \tilde{d}_{ij} + \lambda (\tilde{d}_{kk})^2 + 2 \mu \left[(\alpha_* \Lambda_* - \alpha \Lambda) F_T - \frac{1}{F_T} \frac{\partial F}{\partial i^{ij}} \tilde{d}_{ij} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \mu}{F_T^2} \left(\frac{\partial F}{\partial i^{ij}} \tilde{d}_{ij} \right)^2 - i^{ij} (2 \tilde{d}_{ik} \tilde{d}_{jk} - \tilde{V}_{ki} \cdot \tilde{V}_{kj}) + [\alpha_* \Lambda_* (\tilde{\mathbf{F}}_* \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \dot{F}) - (\alpha_* \dot{\Lambda}_* - \alpha \dot{\Lambda}) \dot{F} \} dV^0 \\
= & \frac{1}{2} L_2^*(\tilde{V}) + \frac{1}{2} \cdot \int_{V_0^0} \left\{ 2\mu \left[(\alpha_* \dot{\Lambda}_* - \alpha \dot{\Lambda}) F_T - \frac{1}{F_T} \frac{\partial F}{\partial t^{ii}} \dot{d}_{ii} \right]^2 \right. \\
& \left. + [\alpha_* \dot{\Lambda}_* (\dot{F}_* - \dot{F}) - (\alpha_* \dot{\Lambda}_* - \alpha \dot{\Lambda}) \dot{F}] \right\} dV^0 \quad (50)
\end{aligned}$$

不难证实:

$$\alpha_* \dot{\Lambda}_* (\dot{F}_* - \dot{F}) - (\alpha_* \dot{\Lambda}_* - \alpha \dot{\Lambda}) \dot{F} \geq 0$$

因此, 当 L_2^* 是正定的二次型泛函时, 必有

$$\Delta \Pi_7 \geq 0$$

参 考 文 献

- [1] Lee, L. H. N. and Horng, J. T., *Int. J. Non linear Mech.*, **10**, 6(1975), 305—313.
 [2] Hill, R. and Rice, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, **20**(1972), 401.
 [3] Lee, E. H. and Lui, D. T., *J. Appl. Phys.*, **38**(1967), 19.
 [4] Hibbitt, H. D. Marcal, P. V. and Rice, J. R., *Int. J. Solids Struct.*, **6**(1970), 1069.
 [5] McMeeking, R. M., *J. Mech. Phys. Solids*, **25**, 5(1977), 357—382.
 [6] Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, **5**(1957), 229—241.
 [7] Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, **7**(1959), 209—225.
 [8] Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, **9**(1961), 114—130.
 [9] 王自强, 塑性大变形的基本方程及有限元公式, 中国科学院力学研究所研究报告(1979).
 [10] Koiter, W. T., *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, B66(1963), 173—177.
 [11] Hill, R., *The Mathematical theory of plasticity*, oxford (1950).

UNIQUENESS, STABILITY AND VARIATIONAL PRINCIPLE FOR LARGE PLASTIC DEFORMATION PROBLEM

Wang Tzu-chiang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

This paper deals with uniqueness, stability and variational principle of boundary value problem, based on the fundamental equations of large plastic deformation theory which takes into consideration the effects of geometrical nonlinearity. Criterion for uniqueness of the solution of the boundary value problem is proposed. Sufficient condition for stability of equilibrium states is introduced.

Sufficient condition for the identity between variational problem and boundary problem is proposed.