

一种简单介质模型和其中的球对称 应力脉冲波的渐近传播性态¹⁾

白以龙

(中国科学院力学研究所)

提要 本文建议了一种简单的介质模型,用于计算球对称应力脉冲波的传播。证明了自相似波形和峰值以恒速传播是波传播渐近性态的表现。在渐近状态,运动方程和介质性质的线性部份,是波传播行为的主要控制因素。根据相似解,分析了压密和介质强度对应力波传播规律的影响。指出了在有剪力而剪力与静水压在运动中不耦合的条件下,衰减指数 $l = 2$ 。在一般情况下,衰减快慢随波形陡缓而变化。对一定的介质存在一个最大的衰减指数

$$l_{\max} = \frac{\left(2 - \frac{\alpha_t k_t}{1 + \alpha_t}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha_t k_t}{1 + \alpha_t}\right)},$$

此时波前沿是间断跳跃。当应力波峰值的传播速度 c_0 超过加载体积波速 C 时,该最大衰减指数 l_{\max} 就可大于 2, 否则就等于或小于 2。

一、介质模型

脉冲应力波在地质材料中的衰减,大大超出了几何扩散所允许的程度。在球对称情况下,衰减指数 l 可达 2—3。在 [1] 中针对静水压力波指出,压力-体积关系的滞迴效应是造成波衰减的主要机构,并在线性假定下,给出了衰减指数和介质参数,波形参数的关系。

对于考虑了介质强度的模型,国外已有不少的工作和建议。如 Wilkins 的流体-弹性模型^[2]; Nelson 评述的弹-塑性模型,变模量模型,带盖帽模型^[3]; 以及 Soc73^[4] 等等。本文针对广义一维应力状态建议一个简单模型,并以球对称应力脉冲的传播作为应用的例子。由于一维应力和一维应变是广义一维应力的二个特殊情况,这就使我们有可能用三轴实验的数据为依据,并参照一维应力和一维应变实验的结果来建立模型,并且,这个模型对球对称的问题是直接适用的。

本文建议的模型包括三个部份,下面分别加以说明:

(一) 折合静水压力 $P_m = P_m(r)$ 的滞迴关系

假设折合静水压力 P_m 产生的体积压缩变形与纯静水压实验完全一样, $P_m = P = P(V)$ 。而且,在加载和卸载之间形成一滞迴曲线。对于应力脉冲问题,再加载不存在。这

1) 本文由编委郑哲敏同志推荐。

本文于 1980 年 3 月 6 日收到。

在滞迴曲线中,反映为介质的压密。与 [1] 同,本文只讨论滞迴中的这部分效应。并且为简化计算,加载和卸载都取成是线性的,模数分别为

$$K_l = \rho_0 C^2, \quad K_u = \rho_0 c^2 \quad (1)$$

(二) 加载过程的剪应力和理想破坏曲线 $\tau = \tau(P)$

这里,将 P 增加的过程称为加载过程。

先考察一下岩石的球对称应力状态。从理论上分析,压缩的广义一维应力状态 ($\epsilon_1 < 0$) 是介于静水压和一维应力之间的状态,在 τ - P 图上是一个角域(见图 1),一维应变则是该角域内部的一条分界线。分界线上方 $\epsilon_3 > 0$, 下方 $\epsilon_3 < 0$ 。对于球对称的应力波 $\epsilon_3 = \epsilon_\theta = \frac{u}{r}$, 在位移 u 向外时, ϵ_θ 恒大于零,因此只能在上方。在波头上 $u = 0$, $\epsilon_\theta = 0$, 故是一维应变状态。于是对球对称应力波 ($u > 0$), 其应力状态为自原点开始,初始曲线斜率等于一维应变曲线斜率,处于其上方的状态。

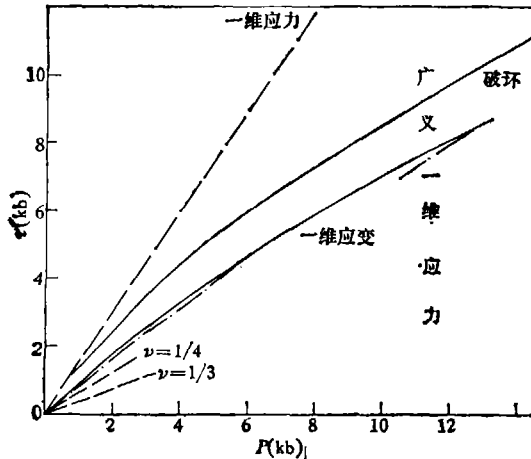


图 1

再考察一下岩石的三轴实验破坏曲线(最大承剪力曲线)。不少实验表明,破坏曲线是一条位于一维应变曲线上方,斜率稍大一些(约二倍)的一条曲线。一般二者所夹的区域是很狭窄的。显然,球对称应力波的应力状态,只能处于这个狭窄的区域中。

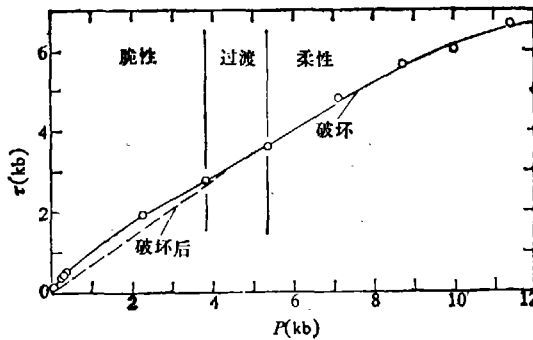


图 2

根据这种情况, 我们假设球对称应力波的应力状态可近似用 $\tau = \tau(P)$ 的关系来代表. 岩石在脆性破坏后仍能承受一定的剪力 (约最大剪力的 1/2). 有些岩石在脆性破坏后, 承剪能力则下降甚少. 而当静水压力较高时, 岩石由脆性破坏过渡为柔性破坏, 此时不再出现剪力下跌现象 (见图 2). 因此本文用 $\tau = \tau(P)$ 统一处理整个加载过程.

(三) 卸载过程的剪应力

在一维应变的实验里看到 (见图 3(a)), 卸载和加载之间, 也形成一种滞迴的形状. 假设从某点 N 开始卸载 (见图 3(b)), 则 $\theta > \theta_N$, $\frac{\tau - \tau_N}{P - P_N} > 0$ (若 < 0 , 则会与破坏曲线相交). 于是可推出, 若 $\theta_3 < 0$, 则卸载区位于以一维应变方式卸载的曲线下方; 若 $\theta_3 > 0$, 则卸载区位于一维应变曲线上方, 并至少应以破坏曲线为上界. 作为一种处理方案, 取卸载沿一族以卸载点为参考的线进行, 其斜率 q_u 大于加载线的斜率.

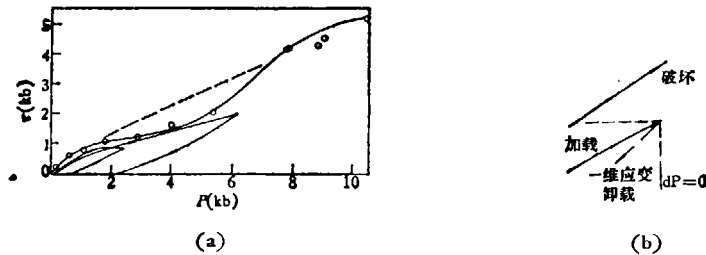


图 3

二、波的渐近形态

如果记 $\rho = \rho_0 + \rho'$, ρ' 是密度的变化量. 设 $P = P(\rho)$, $\tau = \tau(P) = \tau_1(\rho')$. 则球对称条件下连续介质的连续方程和动量守恒方程可表达为 v 和 ρ' 为变量的形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\rho_0 + \rho') \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \frac{2(\rho_0 + \rho')v}{r} &= 0 \\ (\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \left[1 + \frac{4}{3} \frac{d\tau}{dP} \right] c^2(\rho') \frac{\partial \rho'}{\partial r} + 4 \frac{\tau_1(\rho')}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $c^2 = c^2(\rho')$ 是密度的函数, 由于 P 和 τ 与历史有关, 则 c 也是历史的函数.

问题的未知量为 ρ', v . 主定量包括: 自变数 r, t ; 主定参数 $\rho_0, r_0, v_0, p_0, p_c, \tau_c$. 其中 r_0 为某一特征位置, v_0, p_0 为该位置处的质点速度和静水压力. p_c 和 τ_c 为介质模型中的静水压力和剪力特征量.

根据量纲分析和 π 定理, 有

$$\left. \begin{aligned} \frac{v}{v_0} &= f \left(\frac{r}{r_0}, \frac{v_0 t}{r_0}, \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2}, \frac{p_c}{\rho_0 v_0^2}, \frac{\tau_c}{\rho_0 v_0^2} \right) \\ \frac{\rho'}{\rho_0} &= g \left(\frac{r}{r_0}, \frac{v_0 t}{r_0}, \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2}, \frac{p_c}{\rho_0 v_0^2}, \frac{\tau_c}{\rho_0 v_0^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

从物理上看, 当 $\frac{r}{r_0} \rightarrow \infty$ 和 $\frac{v_0 t}{r_0} \rightarrow \infty$ 时, 物理量 $\frac{v}{v_0}$ 和 $\frac{\rho'}{\rho_0}$ 均趋于零, 于是就有个变化速率的问题存在. 设在此过程中有,

$$\frac{v}{v_0} \sim \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(-l)} \quad \frac{\rho'}{\rho_0} \sim \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(-m)} \quad (l, m > 0) \quad (4)$$

$$\frac{v_0 t}{r_0} \sim \left(\frac{r}{r_0}\right)^\gamma \quad (\gamma > 0) \quad (5)$$

这样, 函数 f 和 g 中的各变数在渐近状态不是自由的, 应记为:

$$\begin{aligned} \frac{v}{v_0} / \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-l} &= \mathcal{F} \left(\frac{v_0 t}{r_0} / \left(\frac{r}{r_0}\right)^\gamma, \dots \right) \\ \frac{\rho'}{\rho_0} / \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-m} &= \mathcal{G} \left(\frac{v_0 t}{r_0} / \left(\frac{r}{r_0}\right)^\gamma, \dots \right) \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 就是相似解的形式, 也就是 Barrenblatt 等指出的第二类自模解. 它代表解的中间渐近形式^[8].

由于强度的变化是通过有限形式的 $\tau = \tau(p)$ 关系, 由静水压力来控制的. 所以下面估计偏微分方程各项的量级时, 仅估 $\frac{\partial p}{\partial r}$ 一项, 而省去强度项, 这对整个方程的量级估计是没有影响的.

为了确定指数 γ , 我们定义

$$\zeta = \frac{c_0 t}{r} / \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma-1}; \quad \eta = \frac{r}{r_0}$$

在渐近时,

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \sim \zeta \sim \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} \sim \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \zeta} \sim O(1) \quad (7)$$

连续方程和动量方程中各项的大小, 是由 η 的幂函数确定的. 根据偏微分变换和 $\frac{\rho'}{\rho_0}, \frac{v'}{v_0}$ 的相似解形式, 有连续方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} &\sim O(\eta^{-m-\gamma}) & v \frac{\partial \rho'}{\partial r} &\sim O(\eta^{-l-m-1}) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial r} &\sim O(\eta^{-l-1}) & \frac{2\rho v}{r} &\sim O(\eta^{-l-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

其中第二项显然是比三、四项更高阶的无穷小, 可以不计. 在最低阶上应有幂指数方程:

$$m + \gamma = l + 1 \quad (9)$$

动量方程:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} &\sim O(\eta^{-l-\gamma}) \\ \rho v \frac{\partial v}{\partial r} &\sim O(\eta^{-\partial l-1}) \\ c^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} &\sim O(c^2 \cdot \eta^{-m-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

c^2 的常数部分是最低阶的. 故有幂指数方程:

$$l + \gamma = m + 1 \quad (11)$$

$$m = \partial l \quad (12)$$

(9) 和 (11) 对 l 和 m 是对称的, 所以得

$$l = m \quad (13)$$

$$\gamma = 1 \quad (14)$$

因此与(12)矛盾, 故(12)不成立. 这意味 $\rho v \frac{\partial v}{\partial r}$ 是更高阶的无穷小. 这样就得到了波传播的渐近形态的一些结论:

(一) $l = m, \gamma = 1$. 密度扰动和质点速度扰动随距离 r 以同样的规律衰减. 自相似的渐近波有恒定的特征传播速度 c_0 .

(二) 渐近波是由线性微分方程控制的. 流体力学方程组中的交叉项, 都是高阶项, 而不显现.

(三) 渐近波的质量守恒是由非定常项和速度散量平衡决定的. 动量守恒是由非定常项和应力梯度平衡决定的. 这几部分正是波动的核心物理部分. 迁移项则在波的渐近性态中不起作用.

采用变数

$$\xi = \zeta - 1 \quad (15)$$

根据量级比较, 连续方程很容易化为:

$$\mathcal{E}' - \frac{v_0}{c_0} \{ (l-2)\mathcal{E} + (1+\xi)\mathcal{E}' \} = 0 \quad (16)$$

动量方程则化为:

$$\left\{ \mathcal{E}' - \frac{c^2}{v_0 c_0} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{d\tau}{dP} \right) [l\mathcal{E} + (1+\xi)\mathcal{E}'] \right\} \eta^{-l-1} + \frac{4}{\rho_0 v_0 c_0} \frac{\tau(P)}{\eta} = 0 \quad (17)$$

经过变换和整理, 得

$$\mathcal{E}' - \frac{c^2}{v_0 c_0} \left(1 + \frac{4}{3} q \right) [l\mathcal{E} + (1+\xi)\mathcal{E}'] + \frac{4c^2 q}{v_0 c_0} \mathcal{E} = 0 \quad (18)$$

这便又可导出介质模型与波渐近性态的两个结论:

(四) 线性的介质模型是波渐近性态的主要控制因素.

(五) 以相似解作为渐近性态的波, 相应的介质模型中不包含应力特征量.

三、球对称应力脉冲的基本方程和相似解

在小变形时, Lagrange 坐标和 Euler 坐标近似等效, 如果再引入静水压 P 和剪应力 τ 代替 $\sigma_r \approx 0, \sigma_\theta$, 并记 $c^2 = \frac{dP}{d\rho}$ 为体积波速度, 表示静水压仅是密度的函数, 则球对称条件下的基本方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2\rho_0 v}{r} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial \tau}{\partial r} + 4 \frac{\tau}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ρ_0 是初始密度.

引入速度势 φ

$$\frac{1}{V} = \text{grad } \varphi \quad (20)$$

因为是球对称, 则 $v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$. 方程化为

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2\rho_0}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (21)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} + 4 \left[\frac{1}{3} \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} \right] = 0 \quad (22)$$

下面讨论渐近态的相似波. 由于 $\frac{d\tau}{dP} = q$, 则有

$$\rho_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r \partial t^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial t} + 4q \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial t} \right] = 0 \quad (23)$$

方程提高了一阶, 但仅含常数 q , q 随加、卸载不同. 卸载的卸载点 $\tau_c = \hat{\tau}(r)$, $P_c = \hat{P}(r)$ 都不在方程中出现. 这就可以统一处理加、卸载问题.

进一步简化方程组, 得

$$\begin{aligned} \rho_0 c^2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} + 2\rho_0 c^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \varphi - \rho_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial r} \\ - 4 \left[\frac{1}{3} \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial t} \right] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

将 (23) 和 (24) 对 r 积分, 积分后两式相减, 可得到

$$\rho_0 c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2\rho_0 c^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} = f_1(t) + f_2(t)$$

根据 (21) 式, 则 $f_1(t) = -f_2(t)$

于是可记 $\varphi = \varphi_1 + F(t)$, 且 $\rho_0 F''(t) = -f_1(t) = f_2(t)$. 因此可将以上方程化为

$$c^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + 2c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - G = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial t} + G = 0 \quad (26)$$

因为 $v = \text{grad } \varphi = \text{grad } \varphi_1$, 故以后可省去脚标 1. 当 $\frac{d\tau}{dP} = q$ 时, 函数

$$G = \frac{4}{\rho_0} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \int \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} dr \right] \quad (27)$$

$$= \frac{4q}{\rho_0} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial P}{\partial t} + \int \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial t} dr \right] \quad (28)$$

引入函数 G 是为了明晰地看出剪应力对解的影响, 同时也给求解带来一定的方便. 方程组 (25), (26), (28) 便构成 φ , P 和 G 的联立方程组.

下面做无量纲化变数变换, 令

$$\left. \begin{aligned} \eta &= r/r_0 \\ \xi &= \frac{c_0 t}{r} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

r_0, c_0 分别为特征距离和特征速度。因变数

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} &= \frac{\varphi}{r_0 c_0}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\rho_0 c_0^2}, \quad \bar{r} = \frac{r}{\rho_0 c_0^2}, \quad \bar{v} = \frac{v}{c_0}, \\ \bar{G} &= \frac{r_0}{c_0^3} G = \frac{4}{\eta} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} + \left\{ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \frac{d\eta}{\eta} \right\} \right]\end{aligned}\quad (30)$$

在上述元量纲变换下, 可得到 $\bar{\varphi}, \bar{P}, \bar{G}$ 的无量纲方程。取相似解

$$\begin{cases} \bar{\varphi} = \eta^m b(\xi) \\ \bar{G} = \eta^n x(\xi) \end{cases}\quad (31)$$

解得

$$\begin{aligned}x &= -M \psi'' \\ M &= 1 / \left(1 + \frac{3}{4q} \frac{l+1}{l-2} \right)\end{aligned}\quad (32)$$

于是整个求解过程化为一个变系数的常微分方程:

$$\begin{aligned}[\xi^2 + 2\xi + \alpha'] \psi'' + 2(l-1)(1+\xi) \psi' + (l-2)(l-1) \psi &= 0 \\ \alpha' &= \alpha + M\end{aligned}\quad (33)$$

用级数法解方程 (33), 并令

$$\psi = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{a_n \xi^{n+1}}{(n+1)!} = a_{-1} + \frac{a_0 \xi}{1!} + \frac{a_1 \xi^2}{2!} + \dots\quad (34)$$

代入 (33), 最后得到解式

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{a_{-1}}{2\sqrt{1-\alpha'}} \left\{ \frac{1}{\beta_2(1+\beta_2\xi)^{l-2}} - \frac{1}{\beta_1(1+\beta_1\xi)^{l-2}} \right\} \\ &+ \frac{a_0 \alpha'}{2\sqrt{1-\alpha'}} \frac{1}{l-2} \left\{ \frac{1}{(1+\beta_2\xi)^{l-2}} - \frac{1}{(1+\beta_1\xi)^{l-2}} \right\}\end{aligned}\quad (35)$$

$l > 2$ 时,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi' = 0, \quad \beta_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha'}}{\alpha'}$$

各物理量为

$$\begin{cases} \bar{P} = (M-1) \psi' \eta^{(-l)} \\ \bar{v} = [(1-l)\psi - (1+\xi)\psi'] \eta^{(-l)} \\ \bar{A} = \frac{A}{c_0^2/r} = [-l\psi' - (1+\xi)\psi''] \eta^{(-l)} \end{cases}\quad (36)$$

对于加载和卸载区, 由于体积波速 c 和强度准则的系数 q 不同, 所以 α' 是不同的, 惟有衰减指数 l 是唯一的。所以在加、卸载区分别有解 ψ_l 和 ψ_u , 于是有四个待定常数

$a_{-1,l}, a_{0,l}, a_{-1,u}, a_{0,u}$ 。

问题的定解条件为:

$$(一) \quad \xi = 0 \text{ 时, } P = \hat{P} = \bar{\sigma} \eta^{(-l)}$$

$$\bar{v} = \hat{v} = \bar{s} \eta^{(-l)}$$

$$(二) \quad \xi = 0 \text{ 时, } \bar{P}_u(0, \eta) = \bar{P}_l(0, \eta)\quad (37)$$

$$\bar{v}_u(0, \eta) = \bar{v}_l(0, \eta)$$

$\bar{\sigma}$ 和 \bar{s} 分别为 $r = r_0$ 处的无量纲静水压和径向质点速度。其物理意义为: 1. $\xi = 0$ 是静水压和质点速度的峰值在 r, t 平面上的迹线, 也就是说峰值是以不变的速度 c_0 , 以 $\eta^{(-l)}$ 的方式衰减。2. 是指一个质团上, 加载和卸载交接时, 应力和质点速度连续。

将解 (36) 代入定解条件 (37), 得

$$\left. \begin{aligned} \hat{P} &= (M_l - 1)a_{0,l}\eta^{(-l)} = \bar{\sigma}\eta^{(-l)} \\ \hat{v} &= [(1-l)a_{-1,l} - a_{0,l}]\eta^{(-l)} = \bar{s}\eta^{(-l)} \\ (M_l - 1)a_{0,l} &= (M_u - 1)a_{0,u} \\ [(1-l)a_{-1,l} - a_{0,l}] &= [(1-l)a_{-1,u} - a_{0,u}] \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

于是解得:

$$\left. \begin{aligned} a_{0,l} &= \frac{\bar{\sigma}}{M_l - 1} \\ a_{0,u} &= \frac{\bar{\sigma}}{M_u - 1} \\ a_{-1,l} &= \frac{s + \frac{\bar{\sigma}}{M_l - 1}}{1 - l} \\ a_{-1,u} &= \frac{\bar{s} + \frac{\bar{\sigma}}{M_u - 1}}{1 - l} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

四、讨 论

本节综合前面的结果, 讨论介质模型的诸性质怎样影响着球对称应力脉冲的传播规律。

(一) 参数方程

对于自相似的波, 用几个参数, 便可以刻画出整个波的性质。其中有介质参数 $q_l, q_u, \alpha_l, \alpha_u$ 和衰减指数 l 及静水压和剪力的耦合参数 M_u, M_l 。共七个参数, 受在加、卸载区均成立的关系式 (32) 约束。独立参数有五个, 可以取为 $q_l, q_u, \alpha_l, \alpha_u$ 和 l 。这就是说, 整个波传播的性质和静水压与剪力在运动中的耦合情况, 只由一个波参数和四个独立的介质参数就完全确定了。

为进一步讨论波和介质性质之间的关系, 引入波形参数 Q

$$Q = - \left. \frac{\partial \hat{P}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \quad (40)$$

自相似解必须满足加、卸载条件。由于 $\xi = 0$ 是加、卸载的边界, 所以加、卸载条件相当于

$$\begin{cases} Q_u = - \left. \frac{\partial \hat{P}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0_+} > 0 \\ Q_l = - \left. \frac{\partial \hat{P}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0_-} < 0 \end{cases} \quad (41)$$

根据定义 (40) 和解 \hat{P} , 得

$$Q = - \frac{(M_l - 1) \frac{\bar{s}}{\bar{\sigma}} + 1}{\alpha'} (l - 2) + \frac{2}{\alpha'} (l - 1) \quad (42)$$

当 $M = 0$, $\bar{s} = \bar{\sigma}$ 时, $Q = \frac{2(l-1)}{\alpha}$. 这就是文献[1]中对纯静水压力波的解. $\bar{s} = \bar{\sigma}$, 相当于 $\dot{P} = \rho c_0 \dot{\theta}$. 也就是以速度 c_0 传播的压力波头的跳跃关系. 下面为讨论简便, 仍采用这个近似假定. 于是

$$Q = - \frac{M(l-2) - 2(l-1)}{\alpha + M} \quad (43)$$

这样, 介质中波的传播, 包括了几个参数 $q_1, q_u, \alpha_1, \alpha_u, l, M_1, M_u$ 和 Q_1, Q_u , 有四个约束方程 (32) 和 (43), 仍有五个独立参数. 更直观一些, 可取 Q_1 代替 l , 则

$$\left. \begin{aligned} l &= l(\alpha_1, q_1, Q_1) \\ M_1 &= M_1(\alpha_1, q_1, Q_1) \\ M_u &= M_u(\alpha_1, \alpha_u, q_1, q_u, Q_1) \\ Q_u &= Q_u(\alpha_1, \alpha_u, q_1, q_u, Q_1) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

这表明, 在同一种介质中, 加载波形和卸载波形有一定关系, 而不是独立的; 衰减指数 l 也仅取决于一个波形参数.

(44) 式的参数方程都是多维参数空间中的曲面, 而且独立参数达五个之多, 情况是比较复杂的. 以比较简单的衰减指数 l 为例, 其具体形式为包含三个独立参数的二次方程.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{3}{2q}\right) l^2 - \left[\alpha Q \left(1 + \frac{3}{4q}\right) + Q + 2\right] l \\ - \left[\alpha Q \left(\frac{3}{4q} - 2\right) + 2 \left(\frac{3}{4q} - Q\right)\right] = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

因此, 它在一个临界曲面 $f(\alpha_1, Q_1, q_1) = 0$ 上取单值. 在曲面一方则可取二个不同的值. 但临界曲面本身, 又是一个三维空间的曲面. 应该指出, 多值性的困难是由于在运动中剪力和静水压耦合而造成的, 在静水压力波中, 则仅有简单的关系 $l = 1 + \frac{\alpha Q}{2}$.

为了简便地得到一些实际可供参考的结果, 下面在一些参数的确定范围中, 做些讨论和估计.

先讨论约束方程 (32) 和参数 M 的意义和范围. 剪应力和静水压力的耦合有两个方面: 一是在破坏准则中, 通过参数 q 联系的: $\tau = \tau_c + q(P - P_c)$; 二是在无量纲运动方程中, 通过参量 M 联系的, 如 (32) 所示.

当 $M = 0$ 时, 表明 x 不受 ψ 的影响而恒等于零. 也就是剪应力对运动方程没有贡献, 整个问题只是流体压力波. 有两种情况可使 $M = 0$:

1. $q = 0, l \neq 2$ 这意味着从物性上 τ 和 P 无关, 无论加、卸载, 只允许 τ 恒为常数的情况存在. 于是在运动中二者也无关, 这与上面讨论的物理意义是连贯的. 此时流体压力波的衰减指数不等于 2, 这是和流体强爆炸的自模拟解可以相容的.

2. $l = 2, q \neq 0$ 即衰减指数是 2. 这表明从模型上 τ 和 P 仍有关时, 从运动方程的角度看, 剪力却似乎与静水压力解耦, 不再对流体压力波发生影响. 这时流体压力波的衰减指数必为 2.

下面讨论耦合参数 M 的定义域和变化趋势。 M 的定义域取决于 l 和 q 的定义域。 因为弹性波 $l = 1$, 所以 $1 \leq l < \infty$ 。 根据第一节的模型, q 的最大范围为 $0 \leq q < \infty$ 。 记 $a = \frac{3}{2q}$, 则 $0 < a < \infty$ 。 在定义域两端: $l = 1, M = \frac{1}{1-a}$; $l = \infty, M = \frac{1}{1 + \frac{a}{2}}$ 。

中间 $l = 2, M = 0$ 。

简单计算得到:

$$\frac{dM}{dl} = \frac{\frac{3}{2}a}{\left(1 + \frac{a}{2} \frac{l+1}{l-1}\right)^2 (l-2)^2} > 0 \quad (46)$$

上式表明,同一种介质当 q 不变时随着运动耦合程度的增加,衰减指数亦增加。

应注意到曲线 $l = l(M)$ 并不总是连续的。 在 $l = l_* = \frac{2 - \frac{a}{2}}{1 + \frac{a}{2}}$ 处, $M = \pm\infty$ 。 于是有两种情况

是有两种情况

1. $l_* < 1$, 即 $a > 1, q < \frac{3}{2}$ $l = l(M)$ 是一条连续的单调增加的曲线。

2. $l_* > 1$, 即 $0 < a < 1, q > \frac{3}{2}$ $l = l(M)$ 分两段, 每段分别是单调增的。 但因 $a > 0$, 故 $l_* < 2$ 。(见图 4)。

当 $l = l_*$ 时, $M = \pm\infty$, 这表示仅有剪力, 而静水压不再起作用, 这在物理上是不合理的。 故 l 的范围应受 $l > 1$ 和 $l > l_*$ 二个条件的约束。 $M(l)$ 总是一条连续的曲线。

总而言之, 在 $0 < q < \infty$ 时, 在上述条件的范围内恒有

$$M < 1 \quad (47)$$

而在 $l > 2$ 的范围内, 恒有

$$0 < M < 1 \quad (48)$$

这样可将参数范围综合为

$$\begin{aligned} & 1. 0 < q < \infty & 2. a < 1 \\ & 3. Q_l < 0, Q_u > 0 & 4. \begin{cases} l > 1 \\ l > l_* \end{cases} \\ & 5. M < 1; 0 < M < 1 (l > 2) & (49) \end{aligned}$$

根据 (49) 再讨论约束方程 (43)。 分别考虑加载和卸载。

加载时 $Q_l < 0$, 其可能出现的条件为

$$\left. \begin{aligned} 1. M_l(l-2) > 2(l+1) \\ \alpha_l + M_l > 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 2. M_l(l-2) < 2(l-1) \\ \alpha_l + M_l < 0 \end{aligned} \right\}$$

根据 $l \geq 2$ 又可细分为四种可能

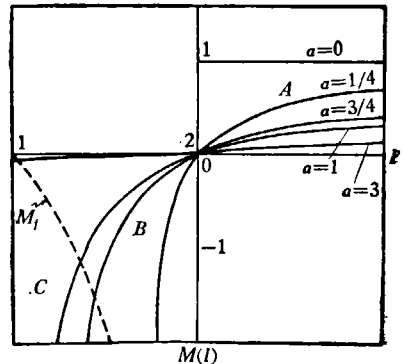


图 4

$$\begin{array}{cccc}
 1-a & 1-b & 2-a & 2-b \\
 l > 2 & l < 2 & l > 2 & l < 2 \\
 \left. \begin{array}{l} M_l > M_f \\ \alpha_l + M_l > 0 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} M_l < M_f \\ \alpha_l + M_l > 0 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} M_l < M_f \\ \alpha_l + M_l < 0 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} M_l > M_f \\ \alpha_l + M_l < 0 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

其中 $M_f = 2 \frac{l-1}{l-2}$, 它在 $l \geq 2$ 区间是完全不同的二段(如图 4 所示)

并根据 (48) 式, 所以有

$$\begin{array}{ll}
 l > 2 \text{ 时} & M_f > 2 \quad 0 < M_l < 1 \\
 l < 2 \text{ 时} & M_f < 0 \quad M_l < 0
 \end{array}$$

所以 1-a 是不能成立的。后三种情形分别相当于图中的 C, A, B 三个区。并将可能条件改写为

$$\begin{array}{ll}
 A \text{ 区: } l > 2, & 0 < M_l < 1, \alpha_l < -M_l \\
 B \text{ 区: } l < 2, & \alpha_l < -M_l < |M_f|, M_f < 0 \\
 C \text{ 区: } l < 2, & \alpha_l > -M_l > |M_f|, M_f < 0
 \end{array}$$

对于 α_l 而言, 分别处于 A, B, C 状况的必要和充分条件则是:

	必要条件	充分条件
A 区	$\alpha_l < 0$	$\alpha_l < -1$
B 区	$\alpha_l < M_f $	$\alpha_l < 0$
C 区	$\alpha_l > M_f $	不存在

同样的推理用于卸载 $Q_u > 0$, 可导出 α_u, M_u 应满足的条件以及 α_u 应满足的必要和充分条件:

	必要条件	充分条件
A 区: $l > 2$	$0 < M_u < 1$	$\alpha_u > -M_u$
B 区: $l < 2$	$-M_u < M_f $	$\alpha_u > -M_u$
C 区: $l < 2$	$-M_u > M_f $	$\alpha_u < -M_u$

先讨论 C 区(见图 5)。图中的阴影区是处于 C 区的必要条件。这里已使用了 $\alpha < 1$ 的定义域条件, 下面对 A, B 区的讨论也还要使用这个定义域条件(图中的点划线)。因此

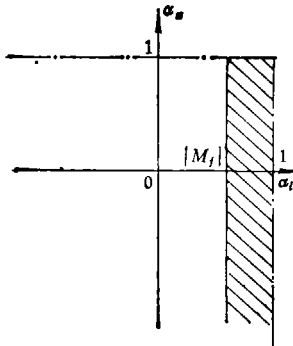


图 5 C 区

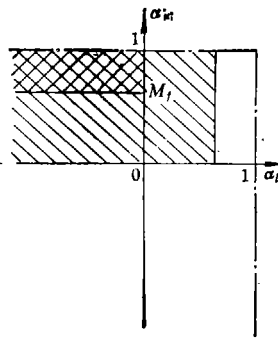


图 6 B 区

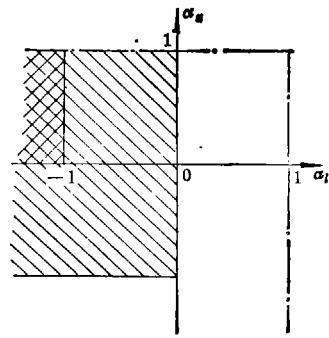


图 7 A 区

处于 C 区至少应使 $|M_f| < 1$, 代入 M_f 的定义, 得 $l < \frac{4}{3}$. 再考虑到 $l > l_*$, 所以要求 $l_* < l < \frac{4}{3}$, 由此求得 $q_l < \frac{15}{8}$. 总之 α_l 接近 1 时, 才有 $l \sim \frac{4}{3}$; α_l 越小, l 亦越小, 直到 $l = 1, \alpha_l = 0$. 故而对这个区是实际兴趣不太大的.

下面讨论 A 和 B 区. 相应的必要和充分条件分别用阴影和格影表示. 若要满足 B 区的充分条件, 至少对 α_u 应使 $|M_f| < 1$, 同样推理导出 $l < \frac{4}{3}, q_u < \frac{15}{8}$.

从图 5、6、7 上可看到以下几点结果.

1. α 的可能区间是: $\alpha_l < 1; -1 < \alpha_u < 1$.
2. 若 $l < \frac{4}{3}$, 且 α_l 较大, 则现象可能出现于 C 区.
3. 若 $\alpha_l > 0$, 则只可能有 $l < 2$ 的衰减, 或者说 $l > 2$ 必不出现.
4. 若 $-1 < \alpha_u < 0$, 不可能在 B 区, 此时除非 l 相当小, 否则 $l > 2$.
5. 若 $\alpha_l < 0, 0 < \alpha_u < 1$, 则 l 可能大于或小于 2 (A 区或 B 区)
6. 若 $\alpha_l < -1, |M_f| < \alpha_u < 1$. 对 A 和 B 区条件都是充分的, 也就是说, l 值必是双重的, 即 $l > 2$ 和 $l < \frac{4}{3}$.

(二) 最大衰减指数

当 $Q \rightarrow \pm\infty$ 时, 方程 (43) 有近似解:

$$l_1 = l_m - \frac{K}{Q} + O\left(\frac{1}{Q^2}\right) \quad (50)$$

$$l_2 = \frac{1 + \alpha + \alpha k}{1 + 2k} Q + O(1) \quad (51)$$

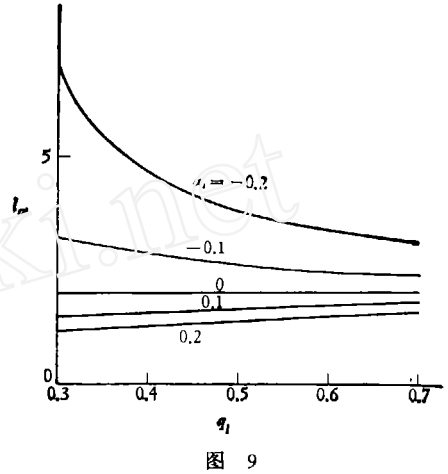
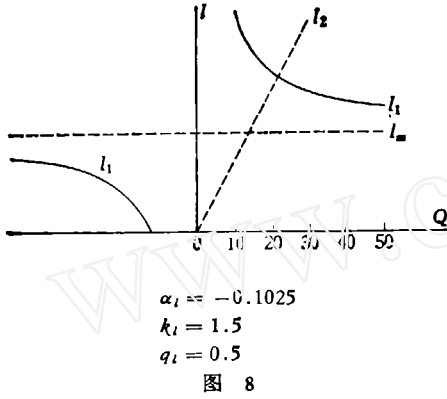
式中:

$$k = \frac{3}{4q}, \quad K = \frac{2k}{1 + \alpha + \alpha k} - \frac{1 + 2k}{1 + \alpha + \alpha k} l_m^2, \quad l_m = \frac{2 - \frac{\alpha k}{1 + \alpha}}{1 + \frac{\alpha k}{1 + \alpha}} \quad (52)$$

若 $l_m > 1, 1 + \alpha + \alpha k > 0$ (k 恒大于零), 则有 $K > 0$, 于是 $\frac{dl_1}{dQ} = \frac{K}{Q^2} < 0$. 同时 $\frac{dl_2}{dQ} = \frac{1 + \alpha + \alpha k}{1 + 2k} > 0$ (见图 8). 由于 l 必须恒大于零, 所以在加载区 ($Q < 0$) 只有一个解 l_1 , 而且在 $Q \sim -\infty$ 时为极大 $l_{\max} = l_m$. 因此在一定的介质参数 α_l 和 q_l 下, 当波前沿上升时间趋于零时, 便达到此介质中的最大可能的衰减指数 l_{\max} (见图 9). 它给出了一种介质中最小的应力峰值. 这个值也可以方便地由公式 (32) 和 (43) 令 $M_f = -\alpha_l$ 而得到.

在卸载区 ($Q > 0$), 有二个解 l_1 和 l_2 , 均大于零. 但 l_1 恒大于 $l_{\max} = l_m$, 所以只有 l_2 是可能解. 这表明倘若渐近解在 Q 的有限值仍近似有效, 那么波的前沿总比后沿要陡峻得多.

再讨论一下参数变化的范围.



若 $0 < \alpha_l < 1$, 则 $l_{max} < 2$, 这就是 B 区。可以看出 k_l 变化是有限制的, 即

$$k_l < 2 \frac{1 + \alpha_l}{\alpha_l},$$

否则 $l_{max} < 0$, 这在物理上不合理。

若 $-1 < \alpha_l < 0$, 则 $l_{max} > 2$ 。这是 A 区的一部份, k_l 变化亦有限制, 即

$$k_l < -\frac{1 + \alpha_l}{\alpha_l},$$

否则 $l_{max} < 0$ 。

若 $\alpha_l < -1$, 则 $l_{max} < 2$ 。这是 A 区的另一部份, k_l 变化亦有限制, 即

$$k_l < 2 \frac{1 + \alpha_l}{\alpha_l},$$

否则 $l_{max} < 0$ 。

于是 α_l 和 k_l 变化须遵从 $-1 < \frac{\alpha_l k_l}{1 + \alpha_l} < 2$ 。

最后应指出, 由于 k_l 恒大于零, 假设 $\alpha_l < -1$, 则 $l_{max} \cong 2$ 由 $\alpha_l \cong 0$ 来决定。由定义 $\alpha_l = 1 - \left(\frac{c_0}{C}\right)^2$, 故该条件化为 $\left(\frac{c_0}{C}\right) \cong 1$ 。从物理上讲, 就是当峰值的传播速度 c_0 大于, 等于或小于加载体积波速时, 应力波峰值的最大衰减系数就大于、等于或小于 2。

(三) 前驱

$l > 2$ 的一个必要条件为 $\alpha_l < 0$, 这意味 $C < c_0$ 。那么在加载部分波的前驱情况如何, 应予讨论。根据定义 C 是静水压体波的加载波速度。但实际问题是存在剪力的, 所以要回到原始方程 (19), 讨论其加载弱间断的传播。根据弱间断的理论求得:

$$\frac{dr}{dt} = c_l = C \sqrt{1 + \frac{4}{3} q_l}.$$

这就是加载前驱波的速度。峰值传播速度 c_0 应小于它。

$$\frac{c_0}{c_l} = \frac{c_0}{C \sqrt{1 + \frac{4}{3} q_l}} < 1 \text{ 代入 } \alpha_l \text{ 定义, 得 } \alpha_l > -\frac{4}{3} q_l, \text{ 这也应该是波形控制的另}$$

一个条件.

参 考 文 献

- [1] 白以龙, 力学学报, 2(1978), 135.
- [2] Wilkins, M. L., *Method in Computational Physics*, 3(1963), 211.
- [3] Nelson, I., *Shock Waves and the Mechanical Properties of Solids*, Ed. by Bucke, I. J.
- [4] UCRL-51689, See 73 AI-Dimensional wave propagation code for rock Media (1974).
- [5] Kinslow, R. W., *High Velocity Impact Phenomena*, Academic, New York (1970).
- [6] M. M. 费罗宁柯—鲍罗第契, 力学强配理论, 奚绍中译, 人民教育出版社 (1963).
- [7] Coates, D. F., *Rock Mechanics Principles*, Information Canada (1970).
- [8] Barrenblatt, G. I. Zeldovich, Ya. B., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 4(1972), 285.

A SIMPLE MATERIAL MODEL AND THE ASYMPTOTIC BEHAVOIR OF PROPAGATION OF A SPHERICALLY SYMETRIC STRESS

Bai Yi-long

Abstract

A simple material model in the calculation of the propagation of a spherically symmetric stress pulse is proposed in this paper. It is proved that self-similarity of wave shape and constant speed of propagation of peak value are consequences of asymptotic behavior of wave propagation. Asymptotically, linear parts of the equation of motion and material property are the controlling factors in wave propagation. On the basis of similarity solution, influences of compaction and material strength on the characteristics of stress wave propagation are analysed. It reveals that if shear force exists and does not couple with hydrostatic force, The attenuation index l is equal to 2. In general, the rate of attenuation changes with the steepness of wave shape. For a given material, there exists a maximum attenuation index

$$l_{\max} = (2 - \alpha_1 k_l / 1 + \alpha_1) / (1 + \alpha_1 k_l / 1 + \alpha_1),$$

when the wave front is discontinuous. If the propagation speed c_0 of the peak value of a stress wave is greater than the bulk wave velocity C in loading the maximum attenuation index l_{\max} may be larger than 2, otherwise it is equal to or less than 2.