

关于脉冲星磁层的共转区域

胡文瑞

(中国科学院力学研究所)

1980年5月29日收到

恒星演化到晚期,根据其质量的大小,可坍缩为白矮星,中子星或者黑洞。六十年代由于射电天文学的发展,发现了脉冲星。一般认为,脉冲星就是高速旋转的、具有强磁场的中子星。因此,从观测和理论上研究脉冲星的性质就引起了强烈的兴趣。脉冲星研究涉及三个基本问题,即中子星的内部结构,脉冲星的磁层结构,以及其辐射机制。近来发现,脉冲星往往是X射线星体,这就需要分析脉冲星周围的环境,即了解脉冲星磁层的结构。

简单的脉冲星磁层分析假设脉冲星具有偶极位形的磁场,随脉冲星一起高速转动,在脉冲星周围感应电场,从而形成电荷分布。如果磁轴与转轴不重合,从脉冲星极区激发的电磁辐射强度对远处星球呈现脉冲的讯号特征。为了理论上分析简单,常常讨论磁轴与转轴重合的情形。当脉冲星周围的磁层与星体共同转动时,在几百个脉冲星半径处就会达到光速,该处就称为光速圆柱。Ferraro 旋转定理认为^[1],有磁场的星体周围的等离子体中存在与星体共转的区域。脉冲星的共转区一直延伸到光速圆柱^[2],但共转区会使密度分布出现奇异性。而在定常和轴对称时,每个磁面上的角速度应保持不变。事实上,由于许多星体表面附近都有一层有限电阻的大气,那里的电阻效应是不可忽略的,磁面上的转动角速度有剪切。这样,无穷电导率条件下的 Ferraro 定理不能直接用到星体大气层中。人们可以讨论无共转区的脉冲星磁层结构,这时也没有光速圆柱引起的困难。

仍然假设定常和轴对称,导电流体作纯粹

的旋转运动。在球坐标 (r, θ, φ) 中的感应方程可以写为

$$\left(\Delta B_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{2B_r}{r^2} - \frac{2\text{ctg}\theta}{r^2} B_\theta\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \ln \eta_m}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right) = 0, \quad (1)$$

$$\left(\Delta B_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \ln \eta_m}{\partial r} \times \left(\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \eta_m \left(\Delta B_\varphi - \frac{B_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta}\right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \eta_m}{\partial r} \frac{\partial r B_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \eta_m}{\partial \theta} \frac{\partial B_\varphi \sin \theta}{\partial \theta}\right) = 0, \quad (3)$$

其中 η_m 为磁粘性系数, Δ 为拉普拉斯算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\text{ctg}\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (4)$$

而磁势函数 $\psi(r, \theta)$ 满足关系

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (5)$$

由(3)式可以看出,如果 η_m 和 B_φ 中有一个为零,则可得到

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = 0. \quad (6)$$

由(6)式可得到

$$\Omega = \Omega(\psi). \quad (7)$$

所以,每一个 $\psi = \text{常数}$ 的磁面上,角速度 Ω 也

必须保持不变,这就是 Ferraro 定理.但是,上面的推导并不要求 η_m 一定为零,即只要 $B_\varphi = 0$,有限电阻对 Ferraro 定理也成立.

如果 η_m 和 B_φ 都不为零,则每一磁面上的角速度可以不同.如果已知磁场位形,可由(3)具体计算角速度的变化关系.(3)式可以改写为

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\frac{\partial Q}{\partial r} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\partial Q}{\partial\theta} = f(r,\theta), \quad (8)$$

其中

$$f(r,\theta) = -r \left[\eta_m \left(\Delta B_\varphi - \frac{B_\varphi}{r^2 \sin^2\theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial\eta_m}{\partial r} \frac{\partial r B_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \times \frac{\partial\eta_m}{\partial\theta} \frac{\partial B_\varphi \sin\theta}{\partial\theta} \right]. \quad (9)$$

方程(3)是 $Q(r,\theta)$ 的一阶非齐次线性偏微分方程,其特征方程为

$$\frac{dr}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)} = - \frac{d\theta}{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)} = \frac{dQ}{f(r,\theta)}. \quad (10)$$

由前两项可得到首次积分

$$\psi(r,\theta) = C_1. \quad (11)$$

当磁场位形给定时, $\psi(r,\theta)$ 是已知函数,它可以解出函数关系

$$\theta = \Theta(r, C_1). \quad (12)$$

由(10)式的第一和第三项可求出另一积分关系

$$Q(r,\theta) = C_2 + \int \frac{f[r, \Theta(r, C_1)]}{\frac{\partial\psi[r, \Theta(r, C_1)]}{\partial\theta}} dr = C_2 + F(r, C_1). \quad (13)$$

由两个首次积分可得到方程(8)的通解为

$$\chi\{\psi(r,\theta), Q(r,\theta) - F[r, \psi(r,\theta)]\} = 0,$$

或者也可以写为

$$Q(r,\theta) = F[r, \psi(r,\theta)] + \chi[\psi(r,\theta)], \quad (14)$$

其中 χ 为待定的任意函数关系.当 $f=0$ 或 $F=0$ 时,(14)式就化为等旋转定理的关系(7).只要给定磁场的位形和电导率的分布关

系,我们就可以由(14)式求出角速度的分布关系.

一般而言,电导率在星体外面的介质中是不均匀的.在星体附近,有限电阻的效应必须考虑;但在星体较外层大气中,可以看成是无穷电导率.这样,整个区域可以分为外场和内场区域两部分.在外场区域中, $\eta_m \rightarrow 0$,因此满足 Ferraro 定理,角速度由(7)式确定.在内场区域中, η_m 有限,这时角速度由(14)式确定,转动有剪切效应.由于内场区域的厚度较小,内场特征很类似于粘性边界层,转动可以有大的剪切,然后与一个沿磁面刚性转动的区域衔接.由于转动的剪切可以随 θ 角变化,所以沿脉冲星赤道的 r 方向,角速度 $Q\left(r, \frac{\pi}{2}\right)$ 是 r 的函数,因此不一定有和星体共转的区域.当 Qr 随 r 不增大时,也就没有光速圆柱.

如果星体具有粘性剪切效应,则需要(3)式中的有限电阻项不比第一项小.也就是要求磁雷诺数不能过大,即

$$R_m = \frac{vL}{\eta_m} \lesssim 1.$$

脉冲星的质量一般为1个太阳质量,半径约1公里,转动周期约1秒,等离子体的温度约为 10^6 K.由此可估计脉冲星的大气标高 $L \approx 10^{-2}$ 厘米,磁粘性系数 $\eta_m = 10^4$ 厘米²/秒,特征转动速度为 $v \approx 6$ 公厘/秒.相应的磁雷诺数 $R_m \approx 0.6$.这表明,脉冲星大气层中确实可以存在很显著的较差转动,具有边界层的特征.对于地球或土星磁层也有类似的情况.因为这些星体表面的气体电导率很低,那里的磁粘性效应不强,而只有动力学粘性起作用.

由于脉冲星大气的特征标高 L 远小于脉冲星半径,不妨记此特征有限电阻层典型厚度为 $r_0\epsilon$,它比星的半径 r_0 小得多,即 $\epsilon \ll 1$.所以

$$\left| \frac{\partial\eta_m}{\partial r} \right| \gg \frac{1}{r_0} \left| \frac{\partial\eta_m}{\partial\theta} \right|, \quad \left| \frac{\partial\eta_m}{\partial r} \right| \gg \frac{\eta_m}{r_0}.$$

这时,(9)式中可略去 η_m 和 $\frac{\partial\eta_m}{\partial\theta}$ 项,近似得到

$$f(r,\theta) = - \frac{\partial\eta_m}{\partial r} \left(\frac{\partial r B_\varphi}{\partial r} \right). \quad (15)$$

对于轴对称的无力场, 不难得到环向场分量与极场的关系

$$r \sin \theta B_{\varphi}(r, \theta) = G(\psi), \quad (16)$$

其中 G 为待定函数. 因此, (15) 式可化为

$$f(r, \theta) = - \frac{G'(\psi)}{\sin \theta} \frac{\partial \eta_m}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (17)$$

求解微分方程 (8) 式的特征方程 (10), 用后两式得到首次积分关系

$$\begin{aligned} Q(r, \theta) = C_2 - G'(\psi) \int \frac{1}{\sin \theta} \\ \times \frac{\partial \eta_m}{\partial r} \Big|_{r=R(\theta)} d\theta, \quad (18) \end{aligned}$$

其中 $r = R(\theta)$ 是由 (11) 式解出的函数关系. 只要具体给出 η_m , ψ 和 G 的分布, 就可以求出 Q .

例如, 可具体讨论如下的磁粘性系数:

$$\eta_m(r, \theta) = \eta_0(\theta) \exp \left[- \left(\frac{r - r_0}{\varepsilon r_0} \right) \right]. \quad (19)$$

如果极向磁场的位形很接近于偶极场, 则由偶极场关系可得到磁势分布为

$$\psi = \frac{a}{r} \sin^2 \theta + \psi_0. \quad (20)$$

不妨取 $\psi_0 = 0$. 利用 (11) 和 (20), 将 (19) 代入 (18) 后可求出积分关系为

$$Q(r, \theta) = C_2 + \frac{G'(\psi)}{\varepsilon r_0} \varphi[\theta, \psi(r, \theta)], \quad (21)$$

其中的积分函数 φ 的定义是

$$\begin{aligned} \varphi(\theta, C_1) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\eta_0(\theta)}{\sin \theta} \\ \times \exp \left[- \left(\frac{\frac{a}{C_1} \sin^2 \theta - r_0}{\varepsilon r_0} \right) \right] d\theta, \quad (22) \end{aligned}$$

θ_0 为某一初始角度. 当 $r \gg \varepsilon r_0$ 时, $\varphi[\theta, \psi(r,$

$\theta)] \rightarrow 0$, 就得到外场的等旋度关系.

作为一个最简单的情况, 如果取

$$\eta_0(\theta) = \eta_* \sin^2 \theta \cos \theta, \quad (23)$$

则 (22) 式可以通过积分得到

$$\begin{aligned} \varphi[\theta, \psi(r, \theta)] = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon r_0}{r}} \sin \theta \\ \times \exp \left[- \left(\frac{r - r_0}{\varepsilon r_0} \right) \right], \quad (24) \end{aligned}$$

由此可得到角速度分布关系为

$$\begin{aligned} Q(r, \theta) = \frac{\eta_* G'(\psi)}{2 \sqrt{\varepsilon r_0 r}} \exp \left[- \left(\frac{r - r_0}{\varepsilon r_0} \right) \right] \\ \times \sin \theta + \chi(\psi), \quad (25) \end{aligned}$$

(25) 式表明, 当 $r - r_0 \gg \varepsilon r_0$ 时, 磁粘性引起的较差自转项迅速趋于零, 但有限电阻在 εr_0 厚度的层内产生有限的较差转动效应. 这种效应可以使外部磁层中没有共转的区域. 假设 (23) 有很大的任意性, 但由此得出的具体性质则大体相当, 即在有限电阻层内的磁面上有较差转动. 目前, 脉冲星磁层研究中往往假设没有共转区^[3-5], 但也有人指出刚性转动会引起困难^[6]. 可能需要进一步研究非刚性转动的模型.

这里讨论的结果不仅可用于脉冲星磁层结构, 对一般行星的环境也适用.

参 考 文 献

- [1] V. C. A, Ferraro *Monthly Notices R.A.S.*, **97** (1937), 458.
- [2] P. Goldreich, Julian, W. H., *Astrophys. J.*, **157** (1969), 869.
- [3] F. C., Michel, *Astrophys. J.*, **180**(1973), 207
- [4] E. T. Scharlemann, Wagoner, R. V., *Astrophys. J.*, **182**(1973), 951.
- [5] W. H. Julian, *Astrophys. J.*, **183**(1973), 967.
- [6] I. Okamoto, *Monthly Notices R.A.S.*, **167**(1974), 457.

来 函 照 登

《物理》编辑部:

贵刊1980年9卷4期刊登拙著“相变和临界现象(I)”一文, 其中380页上“二维伊辛模型的严格解, 是后来昂萨格获得诺贝尔奖金的原因”一句说得不对, 应予删除. 我们感谢杨振宁教授在一封信中提醒: 授奖决议中并未明显提到伊辛模型. 能否将此信刊出, 以兹更正. 此问

撰安

于 淦、郝柏林
1981年1月30日