

电磁激波管中电流面的 Rayleigh-Taylor 不稳定性

徐 复

(中国科学院力学研究所)

1. 激波管中的流动

我们现在考虑如图 1 所示的电磁激波管。放电之后,有一个强激波向右传播,后面是一个电流层,它分开了等离子体与磁场。1959 年, Wright 和 Black^[1] 曾详细地研究了在放电初期电磁激波管中的流动。在假定电流 i 与时间 t 成正比之后,他们求出了一个相似解。这时电流层以等加速度 a 向右方运动,可以预料,这将会发生 Rayleigh-Taylor 不稳定性,由于加速度 a 大,不稳定性增长率 ω 也很大。

我们令电流面以等加速度 a 向右运动(见图 2)。电流面的坐标 $x_0(t)$ 与速度 $v_0(t)$ 分别是

$$\left. \begin{aligned} x_0(t) &= \frac{1}{2} at^2 + bt \\ v_0(t) &= at + b \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

设等离子体是可压缩的,无粘性、无热导的,电导率 $\sigma = \infty$, 导磁率 $\mu = 1$ 。采用高斯单位,则基本方程是:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{H}) \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right\} &= -\nabla p - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) p &= r \frac{p}{\rho} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在电流面上的运动学边界条件是:

在 $x = x_0(t)$ 上

$$\left. \begin{aligned} N &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{dt} &= \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

本文于 1979 年 3 月收到。

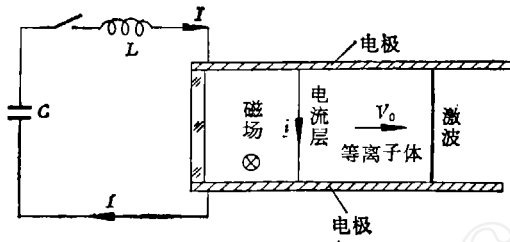


图 1

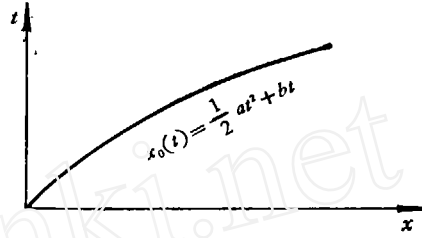


图 2

在公式 (2), (3) 中, 符号和通常 MHD 书上采用的一样, γ 为气体比热比, N 为电流面运动速度, \mathbf{n} 是电流面法线方向.

在电流面上的动力学边界条件, 可以从方程组 (2) 在电流面上进行积分而得到:
在 $x = x_0(t)$ 上

$$\left. \begin{aligned} &[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} - N)\mathbf{H}] = 0 \\ &\mathbf{n} \cdot [\mathbf{H}] = 0 \\ &-\mathbf{n}[p] - \rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} - N)[\mathbf{V}] + \frac{1}{4\pi} \{ \mathbf{n} \times [\mathbf{H}] \times \underline{\mathbf{H}} \} = 0 \\ &[\rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} - N)] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中符号 [] 表示电流面两边物理量之差. $\underline{\mathbf{H}}$ 表示 \mathbf{H} 在电流面两边的算术平均.
假定

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 e^{-h(x-x_0(t))}, & \rho &= \rho_0 e^{-h(x-x_0(t))} \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 = (at + b)\mathbf{i}, & \mathbf{H}_2^0 &= H_2^0 \mathbf{K} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 $h = \frac{\rho_0 a}{p_0}$, p_0, ρ_0 表示等离子体在电流面上的压力和密度, \mathbf{i}, \mathbf{K} 为 x, z 方向的单位矢量, H_1^0 是附加磁场, $H_2^0 = \text{常数}$. 很容易验证式 (5) 满足方程组 (2). 取式 (5) 为基本流动, 在电流面附近, 它与 Wright-Black 的解^[3]符合得较好.

电流面左方的磁场是

$$\mathbf{H}_1 = H_1^0 \mathbf{j} \quad (6)$$

式中 $H_1^0 = \text{常数}$. \mathbf{j} 为 y 方向单位矢量.

为使边界条件 (4) 得到满足, 必须

$$\frac{(H_1^0)^2}{8\pi} = p_0 + \frac{(H_2^0)^2}{8\pi}. \quad (7)$$

下面为讨论方便起见, 把坐标系取在电流面上.

2. 小扰动满足的方程和边界条件

我们在等离子体与磁场的基本流动上迭加一个小扰动. 再假定所有扰动量 δ 都形如

$$\zeta = f(x) e^{\omega t + iK_y y + iK_z z}$$

其中 K_y, K_z 为波数, 则最后可得等离子体中扰动量 \tilde{v}_x 所满足的方程为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{v}_x}{dx^2} & - \left\{ \frac{\gamma \rho_0^2 a \omega^2}{\gamma p_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} (\rho_0 \omega^2 + \gamma p_0 K_z^2)} \right. \\ & + \left((\rho_0 \omega^2)^2 K_y^2 \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} \cdot e^{hx} \cdot h \right) / \left\{ \left(\rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} K_z^2 \right) \left[(\rho_0 \omega^2)^2 + (K_y^2 + K_z^2) \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left(\gamma p_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} (\rho_0 \omega^2 + \gamma p_0 K_z^2) \right) \right] \right\} \frac{d \tilde{v}_x}{dx} \\ & - \left\{ K_y^2 + K_z^2 + \frac{(\rho_0 \omega^2)^2}{\gamma p_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} (\rho_0 \omega^2 + \gamma p_0 K_z^2)} \right. \\ & + \frac{(\gamma - 1)(\rho_0 a)^2 (K_y^2 + K_z^2)}{\gamma p_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} (\rho_0 \omega^2 + \gamma p_0 K_z^2)} - \left(p_0 a \rho_0 \omega^2 K_y^2 (K_y^2 + K_z^2) \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} \right. \\ & \cdot h \left. \right) / \left\{ \left(\rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} K_z^2 \right) \left[(\rho_0 \omega^2)^2 + (K_y^2 + K_z^2) \left(\gamma p_0 \rho_0 \omega^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} (\rho_0 \omega^2 + \gamma p_0 K_z^2) \right) \right] \right\} \tilde{v}_x = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

在求出 \tilde{v}_x 之后, \tilde{v}_y, \tilde{v}_z 可从下式求出:

$$\tilde{v}_y = \frac{\left\{ \gamma p_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} (\rho_0 \omega^2 + \gamma p_0 K_z^2) \right\} i K_y \frac{d \tilde{v}_x}{dx} - \rho_0^2 a \omega^2 i K_y \tilde{v}_x}{(\rho_0 \omega^2)^2 + (K_y^2 + K_z^2) \left\{ \gamma p_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} (\rho_0 \omega^2 + \gamma p_0 K_z^2) \right\}} \quad (9)$$

$$\tilde{v}_z = \frac{\gamma p_0 \left\{ \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} K_z^2 \right\} i K_z \frac{d \tilde{v}_x}{dx} - \rho_0 a i K_z \left\{ \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} (K_y^2 + K_z^2) \right\} \tilde{v}_x}{(\rho_0 \omega^2)^2 + (K_y^2 + K_z^2) \left\{ \gamma p_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} e^{hx} (\rho_0 \omega^2 + \gamma p_0 K_z^2) \right\}} \quad (10)$$

其它各量也可从扰动方程求出.

现在来求电流面左方扰动磁场的解.

扰动磁场有势, 故

$$\tilde{H}_1 = \nabla \varphi \quad (11)$$

扰动磁场的磁通守恒给出

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (12)$$

φ 可写为

$$\varphi = \varphi_0 \cdot e^{K_1 x} \cdot e^{\omega t + i K_y y + i K_z z}, \quad K_1^2 = K_y^2 + K_z^2, \quad (13)$$

代入式 (11), 可求出 \tilde{H}_1 .

对电流面 $x = 0$ 上满足的运动学边界条件 (3) 和动力学边界条件 (4) 线性化, 消去各扰动量之后, 可得 \tilde{v}_x 在 $x = 0$ 所需满足的条件:

$$\left(\rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} K_z^2 \right) \left\{ \gamma p_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} (\rho_0 \omega^2 + \gamma p_0 K_z^2) \right\} \frac{d \tilde{v}_x}{dx} \Big|_{x=0} + \rho_0 a \left\{ \left[\rho_0 \omega^2 \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} K_z^2 \left[\gamma \rho_0 K_z^2 + K_y^2 \left[\gamma \rho_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} (\rho_0 \omega^2 + \gamma \rho_0 K_z^2) \right] \right] \tilde{v}_x \Big|_{x=0} \\
& = \frac{(H_1^0)^2}{4\pi} \frac{K_y^2}{K_1} \left\{ (\rho_0 \omega^2)^2 + (K_y^2 + K_z^2) \left[\gamma \rho_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_1^0)^2}{4\pi} (\rho_0 \omega^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \gamma \rho_0 K_z^2) \right] \right\} \tilde{v}_x \Big|_{x=0} \quad (14)
\end{aligned}$$

另外一个自然的边界条件是

$$x \rightarrow +\infty \text{ 时, } \tilde{v}_x \text{ 有限} \quad (15)$$

3. 等离子体中不存在磁场的情形 ($H_2^0 = 0$)

将 $H_2^0 = 0$ 代入方程 (8), 则式 (8) 化为常系数二阶常微分方程, 设其解为

$$\tilde{v}_x = c e^{-K_2 x} \quad K_2 > 0 \quad (16)$$

则从方程求出 K_2 应满足

$$K_2^2 + h K_2 - (K_y^2 + K_z^2) - \frac{\rho_0 \omega^2}{\gamma \rho_0} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{h a}{\omega^2} (K_y^2 + K_z^2) = 0 \quad (17)$$

从边界条件 (14) 得出色散方程:

$$\rho_0 \omega^2 + \frac{(H_1^0)^2}{4\pi} \frac{K_y^2}{K_1} K_2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} h \frac{(H_1^0)^2}{4\pi} \frac{K_y^2}{K_1} - \rho_0 a K_2 = 0 \quad (18)$$

注意, 边界条件 (15) 已满足.

方程 (18) 表明, 加速度 a 使电流面不稳定, a 越大, ω 也越大. 若 a 改为负号, 则 $\omega^2 < 0$, 运动是稳定的. 磁场 H_1^0 起稳定作用.

如果扰动只在 x 方向, 可以解出:

$$\omega^2 = a K_x \quad (19)$$

一般情形下, 若 $K_x > K_y$, 在式 (18) 中近似地取 $\omega^2 = a K_2$, 代入式 (17) 有

$$K_2 = \sqrt{K_y^2 + K_z^2} \quad (20)$$

再代入式 (18), 就有

$$\omega^2 = a \sqrt{K_y^2 + K_z^2} - 2 \frac{\rho_0}{\rho_0} K_y^2 - 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} a K_y^2 / \sqrt{K_y^2 + K_z^2} \quad (21)$$

有一些从实验方面来研究 Rayleigh-Taylor 不稳定性的工作^[2-4]. 结果表明, 公式 (19) 与实验定性地符合.

4. 等离子体中存在磁场 ($H_2^0 \neq 0$) 的情形

Kruskal 与 Schwarzschild^[5] 曾计算过类似的问题. 他们假定了 hx 很小, 从而将方程 (10) 化为常系数的. 在电磁激波管中不能这样做.

如果我们的目的只是出色散关系, 那么从式 (14) 看出, 我们只要准确求出 $\frac{d\tilde{v}_x}{dx}$ 在 $x = 0$ 的值就足够了.

将方程 (10) 写为

$$\frac{d^2 \tilde{v}_x}{dx^2} + A(x) \frac{d\tilde{v}_x}{dx} + B(x) \tilde{v}_x = 0 \quad (22)$$

令

$$f = \frac{d\tilde{v}_x}{dx} / \tilde{v}_x,$$

则有

$$\frac{df}{dx} + f^2 + A(x)f + B(x) = 0 \tag{23}$$

方程 (10) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时是

$$\frac{d^2\tilde{v}_x}{dx^2} - (K_y^2 + K_z^2)\tilde{v}_x = 0 \tag{24}$$

所以

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) = -\sqrt{K_y^2 + K_z^2} \tag{25}$$

因为在 x 较大时, $f(x)$ 变化缓慢, 故条件 (25) 可近似地改为

$$\text{当 } x = \frac{1}{h} \text{ 时 } f(x) = -\sqrt{K_y^2 + K_z^2} \tag{26}$$

现在用一种近似方法求解满足 (26) 的方程 (23).

若

$$A(x) = A_0 + A_1(x) \quad B(x) = B_0 + B_1(x) \tag{27}$$

在 $x = 0$ 附近, 设

$$f(x) = -K_0 + f_1(x) \tag{28}$$

式 (27), (28) 中 K_0 为正常数, A_1, B_1, f_1 是一阶小量. 代入 (23) 之后

$$K_0^2 - A_0K_0 + B_0 = 0 \tag{29}$$

及

$$\frac{df_1}{dx} + (A_0 - 2K_0)f_1 + B_1(x) - K_0A_1(x) = 0 \tag{30}$$

$f_1(x)$ 满足的条件是

$$f_1(x) = K_0 - \sqrt{K_y^2 + K_z^2} \quad \text{当 } x = \frac{1}{h} \tag{31}$$

解出 $f_1(x)$ 之后, 就可求出

$$\begin{aligned} f(x) \Big|_{x=0} &= \frac{d\tilde{v}_x}{dx} \Big|_{x=0} \\ &= -K_0 + e^{\frac{A_0 - 2K_0}{h}x} \cdot \left\{ K_0 - \sqrt{K_y^2 + K_z^2} + \int_0^{\frac{1}{h}} (B_1(x) - K_0A_1(x)) dx \right\} \end{aligned} \tag{32}$$

代入式 (14), 便得到色散关系.

如果我们近似地取 $f(x) \Big|_{x=0} = -K_0$, 则色散关系为

$$\begin{aligned} \rho_0\omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} K_x^2 + \frac{(H_1^0)^2}{4\pi} \frac{K_y^2}{K_1} - \rho_0aK_0 + \left((\gamma - 1)\rho_0^2a\omega^2 \times \frac{(H_1^0)^2}{4\pi} \frac{K_y^2}{K_1} \right. \\ \left. + (\gamma - 1)(\rho_0a)^2 \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} K_x^2 \right) / \left(\gamma\rho_0\rho_0\omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} (\rho_0\omega^2 + \gamma\rho_0K_x^2) \right) \\ = \left\{ - \left[\gamma\rho_0\rho_0\omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} (\rho_0\omega^2 + \gamma\rho_0K_x^2) \right] \left\{ \left[(\rho_0\omega^2)^2 K_y^2 \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} h \right] K_0 \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\rho_0^2 a \omega^2 K_y^2 (K_y^2 + K_z^2) \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} h \Big\} / \left\{ (\rho_0 \omega^2)^2 + (K_y^2 + K_z^2) \left[\gamma p_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} (\rho_0 \omega^2 + \gamma p_0 K_z^2) \right] \right\} \quad (33)$$

利用这个公式,可以计算为消除 Rayleigh-Taylor 不稳定性所需的磁场大小. 由于磁场 H_2^0 的方向为 \mathbf{K} ,可防止 z 方向扰动. 因此设 $K_y = 0$. 上式化为

$$\rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} K_z^2 - \rho_0 a K_0 + \frac{(\gamma - 1)(\rho_0 a)^2 \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} K_z^2}{\gamma p_0 \rho_0 \omega^2 + \frac{(H_2^0)^2}{4\pi} (\rho_0 \omega^2 + \gamma p_0 K_z^2)} = 0 \quad (34)$$

现在令 $\omega^2 = 0$, 我们有

$$\frac{(H_2^0)^2}{4\pi} K_z^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{(\rho_0 a)^2}{p_0} - \rho_0 a K_0 = 0 \quad (35)$$

在式(29)中令 $\omega^2 = 0$, 求出的 K_0 为

$$K_0 = K_x \cdot \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{h^2}{K_z^2} \frac{p_0}{(H_2^0)^2} 4\pi} \quad (36)$$

代入式(35)并化简,有

$$2 \times \frac{(H_2^0)^2}{8\pi p_0} \cdot \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left(\frac{h}{K_z}\right)^2 \cdot \frac{p_0 \cdot 8\pi}{(H_2^0)^2}} - \frac{h}{K_x} = 0 \quad (37)$$

图 3 是 $\frac{1}{p_0} \frac{(H_2^0)^2}{8\pi}$ 与 $\frac{h}{K_x}$ 的曲线. 结果表明,为使任何 z 方向的扰动得到致稳,只要

$$\frac{1}{p_0} \frac{(H_2^0)^2}{8\pi} > \frac{\gamma}{\gamma - 1} \quad (38)$$

就够了.

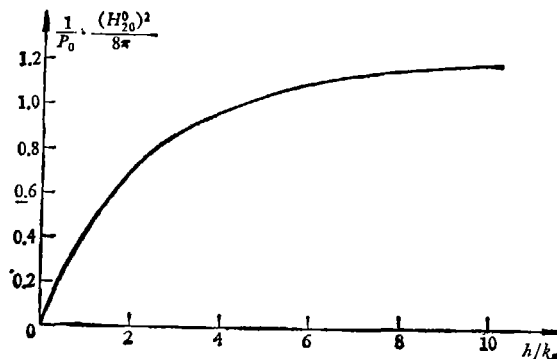


图 3

参 考 文 献

- [1] Wright, J. K., Black, M. C., A theory of electromagnetically driven shock waves, *J. Fluid Mech.* **6**, Part 2(1959), 289—301.
- [2] Dickinson, H., et al., Observation of apparent flute type plasma instabilities, *Phys. Fluids*, **3**, 3(1960), 480—481.
- [3] Curzon, F. L., et al., Experiments on the growth rate of surface instabilities in a linear pinched discharge, *Proc. Roy. Soc.*, **257**(1960), 386—401.
- [4] Albares, D. J., et al., Rayleigh-Taylor instabilities in a stabilized linear pinched tube, *Phys. Fluids*, **4**, 8(1961), 1031—36.
- [5] Kruskal, M., Schwarzschild, M., Some instabilities of a completely ionized plasma, *Proc. Roy. Soc.*, **223**(1954), 348—360.

ON THE RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITY OF A CURRENT SHEET IN A ELECTROMAGNETICALLY DRIVEN SHOCK WAVE APPARATUS

Xu Fu

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

The Rayleigh-Taylor instability of a current sheet in a electromagnetically driven shock wave apparatus is investigated in this paper. We suppose that the plasma is ideal. The linearized equations of small disturbances are solved under certain boundary conditions without the assumption that the acceleration a is small. The results obtained are:

1. When the magnetic field is absent in the plasma, the dispersion relation is $\omega^2 = aK_x$, for disturbances with $K_y = 0$ (the direction of y coincides with the direction of field lines). The magnetic field is a stabilization factor for disturbances with $K_y \neq 0$.
2. When the magnetic field is present in the plasma. We obtain the dispersion relation by using an approximation method, and from this the magnitude of magnetic field which is needed to suppress Rayleigh-Taylor instability is estimated.