

幂硬化材料 III 型稳恒扩展裂纹奇异场¹⁾

高玉臣 张晓堤 黄克智

(哈尔滨船舶工程学院)(中国科学院力学研究所)(清华大学)

提要 幂硬化材料稳恒扩展裂纹奇异场的分析是久未解决的困难问题. 本文对 III 型问题得到了含有对数奇异性的解, 给出了尖端附近应力与应变的奇异场的可能变化范围.

一、引言

裂纹尖端奇异场的研究是建立裂纹前缘断裂准则所必需, 成为断裂力学发展中的中心问题. 裂纹在扩展时尖端附近的应力应变场迥异于静止裂纹的情况. 当裂纹扩展较长距离(例如数倍于塑性区尺寸)后, 裂纹尖端场达到稳恒状态, 此时对于随裂纹尖端一起移动的观察者说来, 尖端场保持不变, 作为裂纹扩展的终极状态, 稳恒扩展裂纹近年来成为重要的研究问题.

对于理想弹塑性材料, Chitaley 和 McClintock^[1] 得到了稳恒扩展的 III 型裂纹解. Слепян^[2], 高玉臣^[3], Rice, Drugan 和 Sham^[4] 用不同的方法互相独立地得到了稳恒扩展的平面应变 I 型裂纹解. 对于 I、II 混合型裂纹, 高玉臣与黄克智^[5] 证明不存在稳恒扩展解. 所有的解都说明稳恒扩展裂纹尖端的应变奇异性比静止裂纹情况要弱得多. 如果采用裂纹尖端附近的变形作为断裂准则(例如裂纹前方某一距离 r_c 处达到临界剪应变 γ_c , 或裂纹后方某一距离 r_c 处达到临界开口位移 δ_c), 那么维持裂纹稳恒扩展所需的荷载(例如 J 积分值 J_{ss}) 比裂纹开始扩展时的荷载(例如 J 积分值 J_c) 要大得多.

但是实际材料一般都具有硬化现象. Dean 和 Hutchinson^[6] 用有限元数值方法对于在幂硬化材料中稳恒扩展的平面应变 I 型裂纹进行了计算. 采用临界开口位移断裂准则, 得到 J_{ss}/J_c 值与材料幂指数 n 有关. 当材料愈接近理想塑性 ($n \rightarrow \infty$) 时, J_{ss}/J_c 值愈大. 如 Hutchinson^[7] 所指出, 这说明根据理想弹塑性计算所得的 J 积分阻力曲线, 对于实际的硬化材料说来可能是非常偏于危险的.

硬化材料中稳恒扩展裂纹尖端场奇异性的分析工作目前还进行得很少. Amazigo 和 Hutchinson^[8] 研究了线性硬化材料的 III 型与 I 型(平面应变与平面应力)裂纹情况. 但是实际材料一般更接近于幂硬化, 而幂硬化材料中扩展裂纹的奇异场是一个多年来没有弄清楚的问题, Hutchinson^[6,7] 称它为“最不可捉摸的”. 高玉臣与黄克智^[5] 对幂硬化材料中稳恒扩展的平面应变 I 型问题作了求解的尝试. 由于 I 型问题在数学上甚为复杂, 本文求解了 III 型裂纹问题, 从 III 型裂纹的解可以见到 I 型裂纹之端倪.

1) 本文由编委张维教授推荐;于1981年4月8日收到.

二、基本方程

图 1 示稳恒扩展问题中 x, y 平面上的分区情况. 以裂纹尖端为原点, 假定裂纹沿 x 轴方向扩展. Γ_A 表示弹性区 I 与主塑性区 II 的交界线; Γ_B 表示主塑性区 II 与卸载尾区 III 的交界线, 又称卸载边界; 而 Γ_D 则表示卸载尾区 III 与第二塑性区 IV 的交界线, 又称二次加载边界. 将应力分量 τ_{xx}, τ_{yz} 记作 τ_x, τ_y . 剪应变分量 γ_{xx}, γ_{yz} 记作 γ_x, γ_y . 应力分量通过应力函数 φ 的表示式为

$$\tau_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.1)$$

应变分量分解为弹性与塑性两部分:

$$\gamma_x = \gamma_x^e + \gamma_x^p, \quad \gamma_y = \gamma_y^e + \gamma_y^p \quad (2.2)$$

其中弹性部分服从虎克定律,

$$\gamma_x^e = \tau_x / G, \quad \gamma_y^e = \tau_y / G \quad (2.3)$$

G 为剪切弹性模量. 塑性应变增量由 Reuss 关系式确定

$$d\gamma_x^p = \lambda \tau_x da, \quad d\gamma_y^p = \lambda \tau_y da \quad (2.4)$$

式中 da 表示裂纹尖端移动距离, $\lambda > 0$. 对于稳恒状态, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial x} \quad (2.5)$$

由 (2.4) 与 (2.5) 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_x^p}{\partial x} &= -\lambda \tau_x, & \frac{\partial \gamma_y^p}{\partial x} &= -\lambda \tau_y \\ \gamma_x^p &= \int_x^{x_A} \lambda \tau_x dx, & \gamma_y^p &= \int_x^{x_A} \lambda \tau_y dx \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式中 x_A 表示弹塑性边界 Γ_A (图 1) 处的 x 值.

根据应变分量与位移 w 的关系

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.7)$$

可以得到协调方程

$$\frac{1}{G} \Delta \varphi + \frac{\partial \gamma_x^p}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_y^p}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

有时为了方便, 取协调方程 (2.8) 对 x 的导数, 并利用 (2.6) 得到

$$\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi - \lambda \Delta \varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

对于硬化材料, 我们有

$$\lambda = \begin{cases} -h \frac{\partial \tau}{\partial x} & \text{当 } -\frac{\partial \tau}{\partial x} \geq 0 \text{ (加载)} \\ 0 & \text{当 } -\frac{\partial \tau}{\partial x} \leq 0 \text{ (卸载)} \end{cases} \quad (2.10)$$

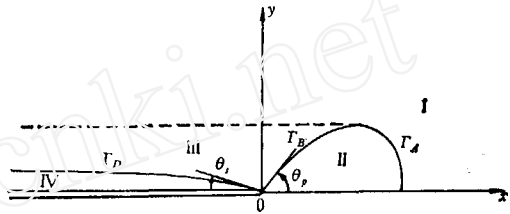


图 1 稳恒扩展问题中 x, y 平面上的分区

式中 $h > 0$, h 与材料的硬化规律有关, τ 为合剪应力

$$\tau = (\tau_x^2 + \tau_y^2)^{1/2} = \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (2.11)$$

对于幂硬化规律

$$\tau = \tau/G + c \cdot \tau^n \quad (2.12)$$

式中 c, n 为材料常数, 则

$$h = cn\tau^{n-2} \quad (2.13)$$

三、区域连接条件

1. 区域的必要连接条件

以 Γ 表示图 1 中所示某两个区域的交界曲线. 取平行于 Γ 的一组曲线与其法线族为坐标曲线, 并以 s 与 n 表示曲线坐标(图 2). 以 $[\phi]_\Gamma$ 表示任一物理量 ϕ 通过 Γ 时的间断量, 即 $[\phi]_\Gamma = \phi|_{n=+0} - \phi|_{n=-0}$ 根据应力连续的条件, 可得

$$[\phi]_\Gamma = 0, \quad \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_\Gamma = 0 \quad (3.1)$$

(3.1) 的两式各称为第一与第二连接条件.

在曲线坐标 s, n 中, 应力分量与应力函数 φ 的关系和应变分量与位移 w 的关系各为

$$\tau_n = \left(1 + \frac{n}{R_2} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad \tau_s = - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (3.2)$$

$$\gamma_n = \frac{\partial w}{\partial n}, \quad \gamma_s = \left(1 + \frac{n}{R_2} \right)^{-1} \frac{\partial w}{\partial s} \quad (3.3)$$

式中 R_2 为 Γ 曲线的曲率半径. 以 ϑ 表示从 x 轴至 Γ 的法线之角, 则有

$$1/R_2 = \frac{d\vartheta}{ds} \quad (3.4)$$

由位移连续条件 $[w]_\Gamma = 0$, 利用 (3.3) 可得 $[\gamma_s]_\Gamma = 0$; 再利用应力连续条件 (3.1) 可得 $[\tau_s]_\Gamma = [\tau_n]_\Gamma = [\tau_\varphi]_\Gamma = 0$. 由 (3.3) 可导出第三连接条件

$$\left[\frac{\partial \tau_s}{\partial n} \right]_\Gamma - \frac{d}{ds} [\tau_n]_\Gamma = 0 \quad (3.5)$$

利用曲线坐标系 s, n 与直角坐标系 x, y 间应力与应变分量的转换关系与 (2.1), (2.3), (2.6) 式, 可将第三连接条件 (3.5) 表示成以下形式:

$$\frac{1}{G} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \right]_\Gamma + \frac{\tau_s}{\cos \vartheta} [\lambda]_\Gamma - \tan \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} [\tau_n]_\Gamma + \frac{d}{ds} [\tau_n]_\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

可以证明, 第三连接条件 (3.6) 实际上恰好就是协调方程 (2.8) 的左端在 Γ 处之间断值. 如果以协调方程 (2.8) 为定解方程, 在区域边界 Γ 处应满足第一与第二连接条件 (3.1). 但是, 如果以协调方程的 x 导数 (2.9) 为定解方程, 则在区域边界 Γ 处除了 (3.1) 外, 还必须满足第三连接条件 (3.6). 对于具有硬化的材料, 不可能出现 $[\tau_n]_\Gamma \approx 0$ 的强间断. (3.6) 式中令 $[\tau_n]_\Gamma = 0$, 得

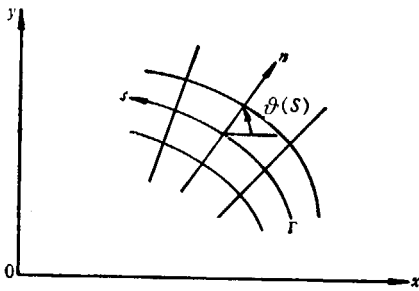


图 2 与曲线 Γ 相应的曲线坐标 (s, n)

$$\frac{1}{G} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \right]_{\Gamma} + \frac{\tau_s}{\cos \vartheta} [\lambda]_{\Gamma} = 0 \quad (3.7)$$

2. 卸载边界与二次加载边界的附加条件

在卸载边界(例如 Γ_B , 图 1), 除了必须满足上述的连接条件 (3.1), (3.7) 以外, 还必须满足一定的附加条件. 可以证明以下的卸载边界定理.

定理 设 Γ (图 2) 为卸载边界, 则对于硬化材料中的稳恒状态必有

$$\lambda|_{\Gamma(p)} = 0 \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial x} \right|_{\Gamma(e)} = 0 \quad (3.9)$$

式中下标 $\Gamma(e)$, $\Gamma(p)$ 各表示取在 Γ 处卸载区一侧与加载区一侧之值.

证明 利用 (3.1), (3.2) 和方向导数间的关系

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial n} - \left(1 + \frac{n}{R_2} \right)^{-1} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial s} \quad (3.10)$$

可得

$$\left[\frac{\partial \tau_n}{\partial x} \right]_{\Gamma} = 0, \quad \left[\frac{\partial \tau_s}{\partial x} \right]_{\Gamma} = -\cos \vartheta \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \right]_{\Gamma} \quad (3.11)$$

由 (2.11), (3.7), (3.11) 易得

$$\tau \left[\frac{\partial \tau}{\partial x} \right]_{\Gamma} = G \tau_s^2 [\lambda]_{\Gamma} \quad (3.12)$$

显然, $\lambda|_{\Gamma(e)} = 0$. 利用 (2.10) 的第一式与 (3.12) 可得

$$\tau \left. \frac{\partial \tau}{\partial x} \right|_{\Gamma(e)} = - \left(G \tau_s^2 + \frac{\tau}{h} \right) \lambda|_{\Gamma(p)} \leq 0 \quad (3.13)$$

但因为 Γ 为卸载边界, 要求

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial x} \right|_{\Gamma(e)} \geq 0 \quad (3.14)$$

综合 (3.13), (3.14) 可得 (3.8) 与 (3.9). 定理证毕.

(3.8) 称为卸载边界附加条件. (3.9) 是 (3.7) 与 (3.8) 的推论.

在二次加载边界 (Γ_D , 图 1), 除了 (3.1), (3.7) 以外, 还必须满足下列附加条件

$$\tau|_{\Gamma_D}(y) = \tau|_{\Gamma_B}(y) \quad (3.15)$$

四、渐近解

为了研究裂纹尖端附近的渐近行为, 我们假设 φ 的级数形式

$$\varphi = r \left(\ln \frac{A}{r} \right)^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\theta) \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{-m}, \quad f_0(\theta) \cong 0 \quad (4.1)$$

由此可求出应力分量 τ_r , τ_θ 与合剪应力 τ :

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = \left(\ln \frac{A}{r} \right)^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \tau_{rm}(\theta) \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{-m} \\ \tau_\theta &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(\ln \frac{A}{r} \right)^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \tau_{\theta m}(\theta) \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{-m} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\tau^2 = \tau_r^2 + \tau_\theta^2 = \left(\ln \frac{A}{r}\right)^{2\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} K_m(\theta) \left(\ln \frac{A}{r}\right)^{-m} \quad (4.3)$$

式中: $\tau_{rm}(\theta) = f'_m \quad (m \geq 0) \quad (4.4)$

$$\tau_{\theta 0}(\theta) = -f_0, \quad \tau_{\theta m}(\theta) = -f_m + (\alpha - m + 1)f_{m-1}, \quad (m \geq 1) \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} K_0(\theta) &= f_0^2 + f_0'^2 \\ K_1(\theta) &= 2f_0 f_1' + 2f_0(f_1 - \alpha f_0) \\ K_2(\theta) &= 2f_0 f_2' + 2f_0[f_2 - (\alpha - 1)f_1] + f_1'^2 + (f_1 - \alpha f_0)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

此处及今后用“'”表示对 θ 的导数。对于幂硬化材料,由(2.10), (2.13) 可得塑性加载区(图1的II与IV区)的 λ

$$\lambda = \frac{1}{r} \left(\ln \frac{A}{r}\right)^{\alpha(n-1)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m(\theta) \left(\ln \frac{A}{r}\right)^{-m} \quad (4.7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0(\theta) &= \frac{1}{2} n c K_0^{(n-3)/2} \cdot \sin \theta K_0' \\ \lambda_1(\theta) &= \frac{1}{2} n c K_0^{(n-5)/2} \left\{ \frac{1}{2} (n-3) \sin \theta K_0' K_1 + K_0 (\sin \theta K_1' + 2\alpha \cos \theta K_0) \right\} \\ \lambda_2(\theta) &= \frac{1}{2} n c K_0^{(n-7)/2} \left\{ \frac{1}{2} (n-3) \sin \theta K_0' \left(K_0 K_2 + \frac{n-5}{4} K_1^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (n-3) K_0 K_1 (\sin \theta K_1' + 2\alpha \cos \theta K_0) \right. \\ &\quad \left. + K_0^2 (\sin \theta K_2' + (2\alpha - 1) \cos \theta K_1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

将塑性加载区内协调方程的 x 导数(2.9)写成极坐标中的形式

$$\frac{1}{G} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Delta \varphi - \lambda \Delta \varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad (4.9)$$

式中左端带有 $1/G$ 系数的首项表示弹性变形项,后面的三项表示塑性变形项。将(4.1)代入(4.9)得到其中弹性变形项与塑性变形项的渐近行为各为

$$\left. \begin{aligned} &\text{弹性变形项 } r^{-2} \left(\ln \frac{A}{r}\right)^\alpha \\ &\text{塑性变形项 } r^{-2} \left(\ln \frac{A}{r}\right)^{\alpha n} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

由于 $n > 1$, 塑性变形项为主奇异项。取(4.9)的第一次渐近,即主奇异项:

$$(\lambda_0(\theta) f_0'(\theta))' = 0 \quad (4.11)$$

即 $\lambda_0(\theta) f_0'(\theta) = \text{const} \quad (4.12)$

对于主塑性区II,由于对称性, $f_0'(0) = 0$, 而对于第二塑性区IV,由于(4.8)的第一式, $\lambda_0(\pi) = 0$, 均可得(4.12)右端之常数为零

$$\lambda_0(\theta) f_0'(\theta) = 0 \quad (4.13)$$

利用(4.6)第一式, (4.8)第一式与(4.13), 对于II与IV区可得

$$K_0'(\theta) = 2f_0'(\theta) \{ f_0''(\theta) + f_0(\theta) \} = 0 \quad (4.14)$$

$$\lambda_0(\theta) = 0 \quad (4.15)$$

比较 (4.9) 中塑性变形项与弹性变形项的量级, 如果设 $\alpha n = \alpha + 1$, 以后将得到 $f_0(\theta) \equiv 0$ 的不合理结果. 所以我们假定

$$\alpha n = \alpha + 2 \quad \text{即 } \alpha = 2/(n-1) \quad (4.16)$$

因此 (4.7) 式成为

$$\lambda = \frac{1}{r} \left(\ln \frac{A}{r} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m(\theta) \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{-(m-1)} \quad (4.17)$$

协调方程 x 导数 (4.9) 的第二次与第三次渐近各为 (注意 $\lambda_0(\theta) \equiv 0$)

$$(\lambda_1 f_0)' = 0 \quad (4.18)$$

与

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 f_1)' + (\lambda_2 f_1)' + (1 - \alpha n) \lambda_1 f_0 \\ & + \frac{1}{G} \{ \sin \theta (f_0'' + f_0') + \cos \theta (f_0'' + f_0') \} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

现在分区来求解应力与应变.

1. 主塑性区 II (图 1), $0 \leq \theta < \theta_p$.

取 (4.14) 之解为

$$f_0(\theta) = \text{const} = -F \quad (4.20)$$

代入 (4.4), (4.5) 得

$$\left. \begin{aligned} r_{r0}(\theta) &= 0, \quad r_{\theta 0}(\theta) = F, \quad K_0(\theta) = F^2 \\ r_{x0}(\theta) &= -F \sin \theta, \quad r_{y0}(\theta) = F \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

(4.18) 式恒满足, (4.19) 成为求解 f_1 的微分方程

$$(\lambda_1 f_1)' + (\alpha + 1) F \lambda_1 - F \cdot \cos \theta / G = 0 \quad (4.22)$$

式中, 由 (4.8) 第二式, 并利用 (4.6) 第二式

$$\lambda_1(\theta) = -nc F^{n-2} [f_1'(\theta) \sin \theta - \alpha F \cos \theta] \quad (4.23)$$

将应力分量与 λ 的渐近表达式 (4.2), (4.21) 与 (4.17) 代入 Reuss 关系 (2.6), 并注意

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.24)$$

可得 II 区内塑性应变的渐近表达式

$$\left. \begin{aligned} r_x^p &= \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{\alpha+1} \sum_{m=0}^{\infty} r_{xm}^p(\theta) \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{-m} \\ r_y^p &= \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{\alpha+2} \sum_{m=0}^{\infty} r_{ym}^p(\theta) \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{-m} \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

式中

$$r_{x0}^p(\theta) = -F \int_0^\theta \lambda_1(\theta) d\theta, \quad r_{y0}^p(\theta) = c F^n \quad (4.26)$$

上式出现的积分, 可以利用后面的 (5.13) 式计算.

2. 卸载尾区 III (图 1), $\theta_p < \theta < \pi - \theta_p$.

在 III 区内, 由 (2.10), $\lambda \equiv 0$; 由 (2.5) 塑性应变 r_x^p, r_y^p 只是 y 的函数. 故协调方程

(2.8) 成为

$$\frac{1}{G} \Delta \varphi + \frac{d\gamma_x^p}{dy} = 0 \quad (4.27)$$

设 III 区内塑性应变的渐近表达式

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x^p &= \left(\ln \frac{A}{y} \right)^{\alpha+1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\ln \frac{A}{y} \right)^{-m} \\ \gamma_y^p &= \left(\ln \frac{A}{y} \right)^{\alpha+2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(\ln \frac{A}{y} \right)^{-m} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

由卸载边界 Γ_B (图 1, $\theta = \theta_p$) 处塑性应变的连续性, 比较 (4.25) 与 (4.28) 可得

$$\left. \begin{aligned} a_0 = \gamma_{x0}^p(\theta_p) &= -F \int_0^{\theta_p} \lambda_1(\theta) d\theta \\ b_0 &= cF^n \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

利用 (4.1) 与 (4.28) 第一式可得协调方程 (4.27) 的第一次渐近式

$$\frac{1}{G} (f_0''(\theta) + f_0(\theta)) - (\alpha + 1) \frac{a_0}{\sin \theta} = 0 \quad (4.30)$$

其解为 $f_0(\theta) = h_1 \cos \theta + h_2 \sin \theta + G(\alpha + 1)a_0 f_0^*(\theta)$ (4.31)

式中 $f_0^*(\theta) = \sin \theta \ln(\sin \theta) - \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta$ (4.32)

3. 第二塑性区 IV (图 1), $\pi - \theta_s < \theta \leq \pi$.

在裂纹表面的自由边界条件 $\tau_{\theta 0}(\pi) = -f_0(\pi) = 0$ 下, 注意到二次加载边界 (Γ_D , 图 1) 的附加条件 (3.15), 取 (4.14) 之解为

$$f_0(\theta) = F \sin \theta \quad (4.33)$$

代入 (4.4), (4.5) 得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta}(\theta) &= F \cos \theta, \quad \tau_{\theta 0}(\theta) = -F \sin \theta, \quad K_0(\theta) = F^2 \\ \tau_{x0}(\theta) &= F, \quad \tau_{y0}(\theta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

协调方程 x 导数的第二次渐近 (4.18) 的解为

$$\lambda_1(\theta) = b / \cos \theta \quad (4.35)$$

将应力分量与 λ_1 的表达式 (4.34) 与 (4.35) 代入 Reuss 关系 (2.6), 利用 (4.24) 并注意在二次加载边界 Γ_D ($\theta = \pi - \theta_s$, 图 1) 处塑性剪应变应连续, 可得 $b = 0$, 及 IV 区内塑性剪应变

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x^p &= \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{\alpha+1} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{xm}^p(\theta) \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{-m} \\ \gamma_y^p &= \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{\alpha+2} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{ym}^p(\theta) \left(\ln \frac{A}{r} \right)^{-m} \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{x0}^p(\theta) &= a_0, \quad \gamma_{y0}^p(\theta) = b_0 = cF^n \\ \gamma_{y1}^p(\theta) &= -(\alpha + 2)cF^n \ln(\sin \theta) + \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

在 (4.37) 式中 $\gamma_{y1}^p(\theta)$ 在 $\theta \rightarrow \pi$ 时出现奇异性, 这是可以预料的. 凡是含有 $\ln(A/y)$ 因

子的奇异性, 在将 r 与 θ 变量分离以后, 二次渐近将出现 $\ln(\sin \theta)$ 项. 常数 F 表征塑性区 (II 与 IV, 图 1) 中合剪应力奇异性的幅度.

五、常数与角度的确定

卸载边界 Γ_B ($\theta = \theta_p$, 图 1) 与二次加载边界 Γ_D ($\theta = \pi - \theta_s$, 图 1) 处的第一与第二连接条件 (3.1) 的第一次渐近可写成

$$f_0(\theta_p) = 0, \quad f_0'(\theta_p) = -F \quad (5.1)$$

$$f_0(\pi - \theta_s) = -F \cos \theta_s, \quad f_0'(\pi - \theta_s) = F \sin \theta_s \quad (5.2)$$

式中 $f_0(\theta)$ 见 (4.31). 引进无量纲参数 T , 并利用 (4.29) 第一式

$$T = -\frac{F}{G(\alpha+1)a_0} = \left[G(\alpha+1) \int_0^{\theta_p} \lambda_1(\theta) d\theta \right]^{-1} > 0 \quad (5.3)$$

则由 (5.1), (5.2) 可求出积分常数 h_1, h_2 , 主塑性区角 θ_p , 第二塑性区角 θ_s 通过 T 表示的关系:

$$\sin \theta_s \exp [T(1 + \sin \theta_p)] - \sin \theta_p = 0 \quad (5.4)$$

$$T = \frac{\pi - \theta_s - \theta_p}{\cos \theta_p} \quad (5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{h_2}{G(\alpha+1)a_0} = \frac{C \cdot \cos \theta_s + D \cos \theta_p}{\sin(\theta_p + \theta_s)} \\ B_1 &= \frac{h_1}{G(\alpha+1)a_0} = \frac{C \cdot \sin \theta_s - D \sin \theta_p}{\sin(\theta_p + \theta_s)} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

式中

$$C = T - \sin \theta_p \ln(\sin \theta_p) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_p \right) \cos \theta_p$$

$$D = -T \sin \theta_s - \sin \theta_s \ln(\sin \theta_s) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_s \right) \cos \theta_s$$

利用 (4.6) 第一式, (4.30) 与连接条件 (5.1), (5.2), 可证明在卸载尾区 III (图 1) 的边界 Γ_B ($\theta = \theta_p$) 与 Γ_D ($\theta = \pi - \theta_s$) 处满足以下关系

$$K_0(\theta_p) = K_0(\pi - \theta_s) = F^2, \quad K_0'(\theta_p) = 0$$

在卸载边界 Γ_B 处与在二次加载边界 Γ_D 处各要求

$$K_0''(\theta_p) = \frac{-2F^2}{T \sin \theta_p} \left(1 - \frac{1}{T \sin \theta_p} \right) \leq 0 \quad (5.7)$$

$$K_0'(\pi - \theta_s) = \frac{2F^2}{T} \cot \theta_s \geq 0 \quad (5.8)$$

而在卸载尾区 III 的内部则要求

$$K_0(\theta) \leq F^2, \quad \theta_p < \theta < \pi - \theta_s \quad (5.9)$$

引进无量纲参数 $S = cF^{n-1}G$, 及在主塑性区 II (图 1) 内的无量纲函数

$$f_1^*(\theta) = \frac{1}{F} f_1(\theta), \quad \lambda_1^*(\theta) = \frac{1}{cF^{n-1}} \lambda_1(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \theta_p \quad (5.10)$$

则微分方程 (4.22), (4.23) 可写成

$$(\lambda_1^*(\theta)f_1^{*'}(\theta))' + (\alpha + 1)\lambda_1^*(\theta) - \cos\theta/S = 0 \tag{5.11}$$

式中 $\lambda_1^*(\theta) = -n\{f_1^{*'}(\theta) \sin\theta - \alpha \cos\theta\}$ (5.12)

(5.11) 乃是 $f_1^{*'}(\theta)$ 的一阶微分方程. 利用对称性条件 $f_1^{*'}(0) = 0$ 可以解出 $f_1^{*'}(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \theta_p$. 将 (5.11) 式进行积分得

$$\int_0^{\theta_p} \lambda_1^*(\theta)d\theta = \frac{1}{\alpha + 1} \left\{ \frac{1}{S} \sin\theta_p - \lambda_1^*(\theta_p)f_1^{*'}(\theta_p) \right\} \tag{5.13}$$

将此积分值代入 (5.3) 并利用 (5.10) 可得关系式

$$T\{ \sin\theta_p - S\lambda_1^*(\theta_p)f_1^{*'}(\theta_p) \} - 1 = 0 \tag{5.14}$$

式中 T 见 (5.5) 式. 在主塑性区 II (图 1) 要求

$$\lambda_1^*(\theta) \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_p \tag{5.15}$$

将 (5.5) 代入 (5.4) 可得 θ_s 与 θ_p 的关系式, 如图 3 所示. 由 (5.3)、(5.5) 与 (5.8) 可知 θ_p 与 θ_s 都必须是锐角. 在以上的渐近解中, 我们有一个自由参数 (例如 S) 还不能确定. 任意假定一个 S 值: 以 $f_1^{*'}(0) = 0$ 为初值, 我们可以从 $\theta = 0$ 开始积分 (5.11) 式. 由 (5.14) 式确定 θ_p . 这样可以得到 S 与 θ_p 的关系, 如图 4 中的一组曲线所示.

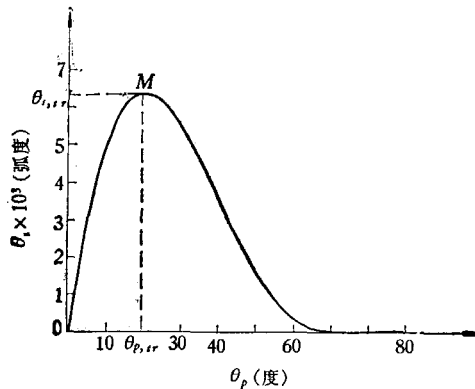


图 3 主塑性区角 θ_p 与第二塑性区角 θ_s 的关系

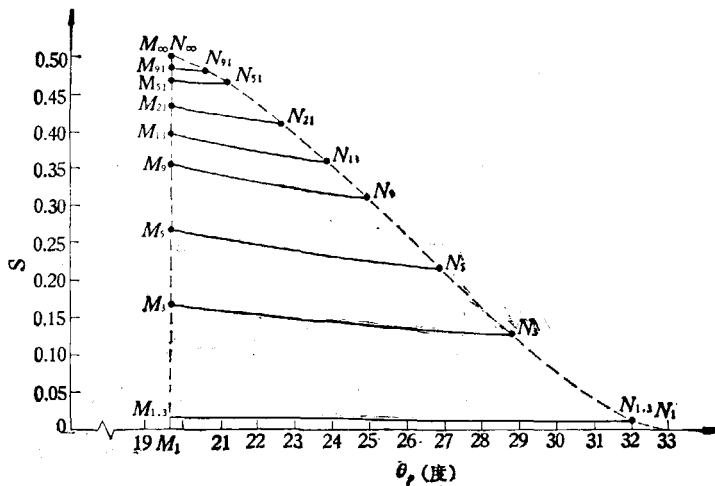


图 4 几种不同硬化指数下, 自由参数 S 与主塑性区角 θ_p 的关系

无论材料幂指数 n 为何值, 均存在一显然解(以下标 tr 表示), 满足上述全部关系:

$$\left. \begin{aligned} S_{tr} &= 1/n\alpha(\alpha + 1), \quad T_{tr} = 1/\sin \theta_{p,tr} \\ f_{1,tr}'(\theta) &\equiv 0, \quad \lambda_{1,tr}^*(\theta) = n\alpha \cos \theta \\ \theta_{p,tr} &= 0.344026 \text{ 弧度} = 19.7112^\circ = 19^\circ 42' 40'' \\ \theta_{s,tr} &= 0.0063982 \text{ 弧度} = 0.36659^\circ = 22' 00'' \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

这里 $\theta_{p,tr}$ 与 $\theta_{s,tr}$ 恰好是 Chitaley 和 McClintock^[1] 对于理想塑性 ($n \rightarrow \infty$) 所给出的角值. 在图 3 中以 M 点表示, M 点的 θ_s 为曲线的极大值; 在图 4 中则依 n 值之不同以 M_n 表示. 显然解满足 (5.7) 的等式 $K_0''(\theta_{p,tr}) = 0$. (5.7) 的不等式要求 $S \leq S_{tr}$, $\theta_p \geq \theta_{p,tr}$. 图 4 中的 $M_n N_n$ 表示 (θ_p, S) 变化的可能范围, 令 N_n 点的 θ_b 值为 θ_b , 它表示微分方程 (5.11) 解的最大边界, 即在 $\theta = \theta_b$ 处微分方程 (5.11) 中的最高阶导数项 $f_1'''(\theta)$ 的系数为零

$$-n\{2f_1''(\theta_b) \sin \theta_b - \alpha \cdot \cos \theta_b\} = 0 \quad (5.17)$$

以 θ_{sb} 表示对应于 $\theta_p = \theta_b$ 的 θ_s 值. 由 (5.5)、(5.12)、(5.14) 与 (5.17) 可得到对应于 N_n 状态 ($\theta_p = \theta_b$) 的 $f_1''(\theta_p)$, $\lambda_1^*(\theta_p)$, T 与 S 值:

$$\left. \begin{aligned} f_1''(\theta_b) &= \frac{1}{2} \alpha \cot \theta_b, \quad \lambda_1^*(\theta_b) = \frac{1}{2} n\alpha \cos \theta_b \\ T_b &= \frac{\pi - \theta_{sb} - \theta_s}{\cos \theta_b}, \quad S_b = \frac{4}{n\alpha^2} \tan^2 \theta_b \left(1 - \frac{1}{T_b \cdot \sin \theta_b} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

对于几种材料幂指数 n , 对应于极端状态 M_n 和 N_n 的 θ_p , θ_s 与 S 值见表 1.

表 1

n	M_n			N_n		
	$\theta_{p,tr}$	$\theta_{s,tr}$	S_{tr}	θ_b	θ_{sb}	S_b
1	19°42'40''	22'00''	0	32°50'40''	16°51''	0
1.3	同上	同上	0.01505	31°58'11''	17°25''	0.01021
3	同上	同上	0.1667	28°50'56''	19°16''	0.1255
5	同上	同上	0.2667	26°54'14''	20°14''	0.2149
9	同上	同上	0.3556	24°52'31''	21°03''	0.3083
13	同上	同上	0.3956	23°47'06''	21°23''	0.3570
21	同上	同上	0.4329	22°36'00''	21°41''	0.4076
51	同上	同上	0.4713	21°06'23''	21°55''	0.4649
91	同上	同上	0.4838	20°32'09''	21°58''	0.4824
∞	同上	同上	0.5000	19°42'40''	22°00''	0.5000

对于理想塑性材料 ($n \rightarrow \infty$), M_n 、 N_n 缩成一点 ($\theta_p = \theta_{p,tr}$, $S = 0.5$). Chitaley 和 McClintock^[1] 对于理想塑性材料的解乃本文解当 $n \rightarrow \infty$ 时的特例. 对应于极端点 M_n 和 N_n 的尖端应力场与合剪应力的角分布各见图 5 与图 6. 显然解的应力场与材料无关, n 取不同值时的显然解应力场均与 Chitaley 和 McClintock^[1] 对于理想塑性所给出的相同. 在图 5、6 的坐标比例尺下, n 增大到 13 时对应于极端状态 M_n 与 N_n 的曲线已十分靠近, 难于区分. 显然解的塑性应变场与材料有关. 由 (4.26)、(4.29) 与 (4.37), 剪应变分量 $\gamma_{\theta_0}^p$ 为常数: $\gamma_{\theta_0}^p \cdot G/F = S$, 极端状态下的值见表 1. $\gamma_{\theta_0}^p$ 的角分布见图 7.

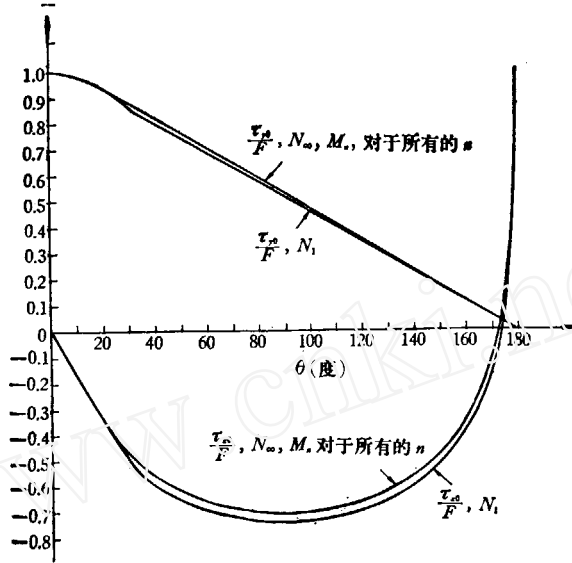


图 5 极端状态 M_n 与 N_n 的裂纹顶端应力场

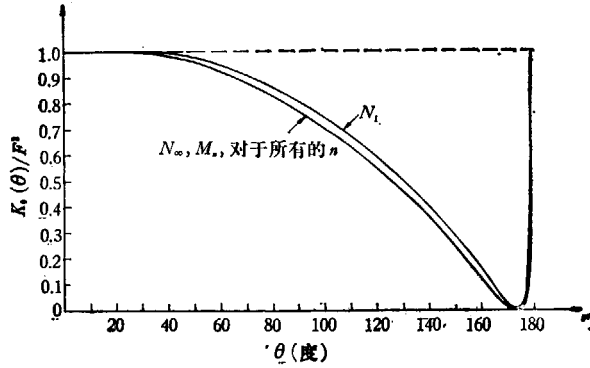


图 6 极端状态 M_n 和 N_n 的合剪应力角分布

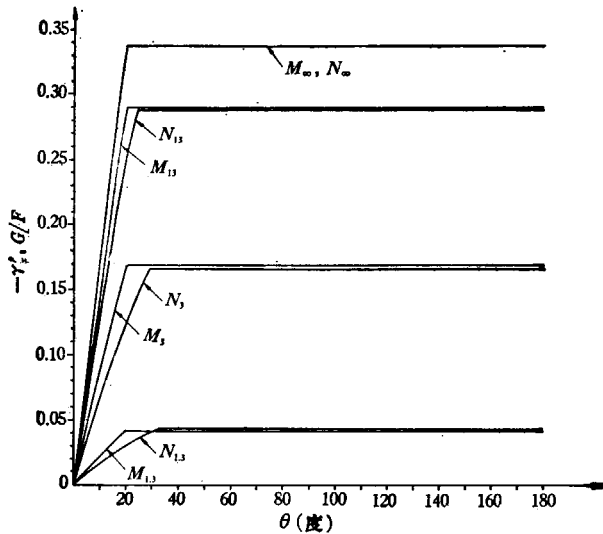


图 7 极端状态 M_n 和 N_n 的裂纹顶端应变场

可以验证, 主塑性区 II (图 1) 中的加载条件 (5.16) 恒得到满足. 但是卸载边界 Γ_B 处的附加条件 (3.8), 即 $\lambda_1^*(\theta_p) = 0$ 得不到满足. 我们预料, 在 Γ_B 处附近将出现一个 $\lambda_1^*(\theta)$ 值急剧变化的“内边界层”, 经过这个“内边界层”后 λ_1^* 值将在卸载边界上变为零. 这个“内边界层”的出现可以用协调方程 (2.8) 或 (2.9) 在裂纹尖端从椭圆型退化为抛物型来解释. 我们知道, 在硬化材料的弹塑性问题中, 协调方程 (2.8) 对于应力函数 φ 或者协调方程 (2.9) (其中 λ 用 (2.10)、(2.11) 式代入以后) 对于 $\partial\varphi/\partial x$ 为椭圆型方程. 对于 Amazigo 与 Hutchinson^[9] 所讨论的线性硬化材料, 在裂纹尖端附近弹性变形与塑性变形的奇异性相若, 协调方程仍为椭圆型. 椭圆型方程的解是不允许有间断的. 但是对于本文所研究的幂硬化材料, (4.10) 式表明在裂纹尖端附近塑性变形项是主奇异项, 而弹性变形项可以相对略去, 因此当 $r \rightarrow 0$ 时协调方程从椭圆型退化为抛物型, 而抛物型方程可以沿其特征线发生某种间断. 在奇异摄动理论中, 当某一小参数趋于零时, 如果高阶微分方程退化为低阶, 一般将出现边界层, 在边界层内解发生急剧的变化. 我们预料, 由于这种方程式型的退化, 也会有边界层出现. 由于本文的解没有考虑这个内边界层, 所以不能要求满足 $\lambda_1^*(\theta_p - 0) = 0$. 考虑内边界层而得到满足 $\lambda_1^*(\theta_p - 0) = 0$ 条件的唯一解的工作将于另文给出.

参 考 文 献

- [1] Chitaley, A. D. and McClintock, F. A., *J. Mech. Phys. Solids*, 19(1971), 147—163.
- [2] Слепян, Л. И. *Мех. Тверд. Тела.* (1974), 57—67.
- [3] 高玉臣, 力学学报 (1980), 48—56.
- [4] Rice, J. R., Drugan, W. J. and Sham, T. L., *Fracture Mechanics*, ASTM STP 700(1980).
- [5] Gao Yuchen and Hwang Kehchih, *Proceedings IUTAM Symposium on Three Dimensional Constitutive Relationships and Ductile Fracture* (1980 ed. S. Nemat-Nasser), in press.
- [6] Dean, R. H. and Hutchinson, J. W., *Fracture Mechanics*, ASTM STP 700(1980).
- [7] Hutchison, J. W., *Crack-tip singularity fields in nonlinear fracture mechanics: A survey of current status*, to be presented at ICF5, Cannes.
- [8] Amazigo, J. C. and Hutchison, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 25(1977), 81—97.
- [9] Gao Yuchen and Hwang Kehchih, *Elastic-plastic fields in steady crack growth in a strain-hardening material*, to be presented at ICF 5, Cannes.

SINGULAR FIELDS FOR MODE-III CRACK GROWING STEADILY IN POWER HARDENING MEDIUM

Gao Yuchen

(Harbin Shipbuilding Engineering Institute)

Zhang Xiaoti

(The Institute of Mechanics, The Academy of Sciences)

Hwang Kehchih

(Tsing Hua University)

Abstract

This paper deals with the near-tip singular fields for Mode-III crack growing quasi-statically and steadily in a power hardening medium. In Section 2 the basic equations are set up and in Section 3 the contiguity conditions for neighbouring domains (3.1), (3.7) and also the supplementary conditions (3.8) for the unloading boundary and (3.15) for the reloading boundary are derived. As shown in Fig. 1, the near-tip region (upper half-plane) is composed of the active plastic zone II, the unloading wake zone III, and the reloading plastic zone IV, subtending angles θ_p , $(\pi - \theta_p - \theta_s)$ and θ_s respectively.

In Sections 4 and 5 the stress function φ is solved in the form of a series (4.1) in $[\ln(A/r)]^{-1}$, and the near-tip stress and strain fields are obtained to within a parameter, say the parameter $S (= cF^{n-1}G)$, n, c being material constants, G the shear modulus and F the intensity of stress singularity), which varies in a range $S_{tr} \leq S \leq S_b$, corresponding to the segments $M_n N_n$ on the S versus θ_p curves in Fig. 4. θ_s versus θ_p curve is given in Fig. 3. M_n state corresponds to a trivial solution (5.16), with the same values of angles $\theta_{p,tr}$ and $\theta_{s,tr}$ as for elastic perfectly-plastic medium^[1]. N_n state corresponds to the upper bound θ_b of the angle θ_p . θ_b is the natural boundary for the solution of the differential equation (5.11), i.e. θ_b is determined by the condition that the coefficients of the highest-order derivative $f_1^{*''}(\theta)$ in (5.11) should vanish at $\theta = \theta_b$ (see (5.17)). For elastic perfectly-plastic material ($n \rightarrow \infty$), $M_n N_n$ in Fig. 4 shrinks to a point ($\theta_p = \theta_{p,tr}$, $S = 0.5$), which corresponds to the solution given by Chitaley and McClintock^[2]. For several values of n , the near-tip stress and strain distribution is shown in Fig. 5 and 6. It is seen from these Figures that the difference between the extreme states M_n and N_n is only slight. It is expected that a inner boundary-layer type of solution exists in the neighbourhood of the unloading boundary Γ_b (Fig. 1). The consideration of this boundary-layer solution will be necessary for the determination of the unique true solution (corresponding to some state on the segment $M_n N_n$ in Fig. 4), with vanishing plastic strain rates on the unloading boundary, $\lambda|_{\Gamma_b} = 0$. The determination of this unique true solution will be given in a separate paper.