光学共振腔稳定性的普遍条件

谈镐生　　朱如曾
（中国科学院力学研究所）

摘　　要

x 方向和 y 方向有耦合的光学共振腔的稳定性问题是激光的理论问题之一．本文对此进行了分析研究，得到了光腔稳定性的充分必要条件，制出了稳定性图．以往 x 方向和 y 方向可以分别考虑的情况是本文的特例．

当光学共振腔是轴对称情况时，光腔的光线往返矩阵是两个相同的二阶矩阵的直接和．问题可以归结为一个二阶矩阵系统对光线的作用．Boyd 和 Kogelnik[1] 以及后来其他研究者，用不同方法得到这类光腔的稳定条件为：

$$|T_rD_2| < 2,$$

T_r 表示求矩阵的迹，D_2 表示二阶光线往返矩阵．这一条件我们[2]进一步修正为：

$$|T_rD_2| < 2 \quad 或 \quad D_2 = \pm I. \tag{1}$$

当光腔不是轴对称情况，但光线往返矩阵是 x 方向和 y 方向的往返矩阵的直接和时，光腔的稳定条件就是 x 方向和 y 方向稳定条件之和．关于非稳定腔，几何光学理论应用得很有成效[3]．近来对非稳定腔进行了严格的几何光学分析[4]．其中，首先引进“光束变换矩阵”的新概念，导得了准模和已知的稳定的模；同时在几何光学框架里，实现了对 Siegman 假定[5]的证明．文献[6]还讨论了非稳定腔模的二维稳定性问题．

但是，在许多实际情况中，光腔的 x 和 y 方向存在耦合．此时，光腔的光线往返矩阵不是两个二阶矩阵的直接和．例如，当腔镜不是轴对称，而且介质的自聚焦作用又有象散效应时[7,8]，腔的光线往返矩阵就不是两个二阶矩阵的直接和．直角棱镜象散腔[9]就是其中一例．近年来，人们开始研究用四阶矩阵所表示的光腔．方洪烈[10]对可分离为两个二阶矩阵直接和的光腔给出了正则描述．他在文献[9]中就特殊取向情况讨论了直角棱镜象散腔．王之江和方洪烈[9]就直接可分离或将坐标轴旋转后可分离为两个二阶矩阵直接和的光腔，总结了其中的光束类型．总之，x 方向和 y 方向有耦合的情况已受到越来越多的重视．这种腔的稳定性问题尚未有严格而完善的解决．本文目的在于对四阶矩阵所表示的光腔的稳定性问题作出完整的解决，其中包括可分离和不可分离为二阶矩阵直接和的情况．特别是，将包括对稳定区边界上各点的细致而严格的结论．需要指出，稳定区边界上的点具有极为重要的实际意义．而对以往人们所讨论的轴对称光腔恰恰落在本文所给出的稳定区的边界上．

本文 1979 年 7 月 26 日收到．

一、用特征值所表示的稳定性充分必要条件

光腔中光线第 n 次往返后的参数,与起始参数之间的关系是

$$\begin{bmatrix} x_n \\ \theta_n \\ y_n \\ \phi_n \end{bmatrix} = D^n \begin{bmatrix} x_0 \\ \theta_0 \\ y_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中 D 是 4×4 阶矩阵,称为光腔的光线往返矩阵. D 的元都是实数. 为了进行严格而完整的讨论,必须把光腔稳定性的物理内容,用严格的数学定义表示出来.

定义 光腔称为稳定的,如果对任意给定的正数 ε, 存在正数 δ, 使得当

$$|x_0| < \delta, \quad |\theta_0| < \delta, \quad |y_0| < \delta \quad 和 \quad |\phi_0| < \delta$$

时,对任意 n 正整数都成立,

$$|x_n| < \varepsilon, \quad |\theta_n| < \varepsilon, \quad |y_n| < \varepsilon \quad 和 \quad |\phi_n| < \varepsilon.$$

不满足这一"稳定性定义"的光腔称为"非稳定腔".

这一定义保证在四维初条件空间 $(x_0, \theta_0, y_0, \phi_0)$ 中的原点周围存在一个四维区域 A, 当光线的起始条件落在 A 中时, 它将永远不逸出腔外. 所以光腔的光轴附近就能维持"大量"的光线,从而从物理上符合光腔稳定的要求. 这里,我们把物理上的"大量"与数学上 A 的"四维"性质相对应. 反之,容易证明, 当违反了"稳定性定义"时, 便没有"大量"光线能维持在光轴附近. 由此定义可证:

判据 1. 光腔稳定的充分必要条件是 D^n 的矩阵元有界.

证明可见附录一. 以后我们称 D^n 的矩阵元有界的系统为"矩阵有界"的系统.

判据 2. 设光腔的光线往返矩阵 D 的特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 若它们满足如下条件之一, 则光腔是稳定的,否则不稳定:

(1) $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

(2) 虽然有些特征根的模等于 1, 但不是多重根,而其余特征根的模小于 1.

(3) 虽然有些特征根 λ_R 的模等于 1,而且又有重数 μ_R, 但对于这些特征根,特征矩阵的秩等于 $(4-\mu_R)$; 而其余特征根具有 (2) 的性质.

证. 由代数学的定理可知, 对任意矩阵 D, 必存在复数域上满秩矩阵 V, 将 D 化为 Jordan 型:

$$H = V^{-1}DV = H_{k_1} \dot{+} H_{k_2} \dot{+} \cdots + H_{k_m}, \qquad (m \leqslant 4) \tag{3}$$

其中每一子块 H_{k_i} 都是 Jordan 块, k_i 是阶数. 于是

$$H^n = H^n_{k_1} \dot{+} H^n_{k_2} + \cdots + H^n_{k_m}. \tag{4}$$

先证条件的充分性:

(1) 所有特征根的模小于 1, 由(3)式和附录二中引理 1 可知 H^n 有界. 又因

$$D^n = VH^nV^{-1},$$

所以 D^n 有界. 根据判据 1, 光腔稳定.

(2) 由附录二引理 1 的 (1) 和 (3) 可知 H^n 有界. 所以 D^n 有界,故光腔稳定.

(3) 对于重数为 $\mu_R > 1$ 的特征根 λ_R, 因为特征矩阵的秩为 $(4-\mu_R)$, 故相应的本征向

量构成 μ_R 维子空间，所以相应的 Jordan 块是 1×1 阶的. 又因 $|\lambda_R|=1$，故 Jordan 块的 n 次方有界. 其余特征根具有 (2) 的性质，所以对应的 Jordan 块的 n 次方也有界，故 H^n 有界. 所以 D^n 有界，故光腔稳定.

下面证明必要性：

假定光腔稳定，由判据 1，D^n 有界，故 H^n 有界，即 (4) 式右边各项均有界. 再由附录二引理 1 可知，H_{k_i} 仅有两种可能性：

(a) $|\lambda|<1$；　　(b) $|\lambda|=1$，但 $k_i=1$.

若 (b) 确实出现，则模为 1 的特征根所对应的 Jordan 块都是 1×1 阶的. 所以这些特征根要么是单重根，要么对于这些特征根 (λ_R)，特征矩阵的秩等于 $(N-\mu_R)$，而 μ_R 是 λ_R 的重数，故 D 必满足本判据所提条件中的 (2) 或 (3).

若 (b) 不出现，即所有 Jordan 块全是情况 (a)，则定理中的(1)得到满足. 判据证毕.

判据 2 使我们能根据光线往返矩阵的特征值来判断光腔稳定与否. 但是当特征值是重根时，需计算相应的特征矩阵的秩. 这较麻烦. 下面的判据 3 给我们一个等价的，然而是方便的方法来处理这后一情况.

判据 3. 上述判据 2 的条件 (3) 等价于

$$\frac{f(D)}{\prod\limits_{l}^{t}(D-\lambda_l I)^{\mu_l-1}}=0, \tag{5}$$

其中 $f(\lambda)$ 是 D 的特征多项式，t 表示不同的模为 1 的多重特征根的种数.

证. 条件 (3) 表示，与模为 1 的多重特征根 λ_l 对应的 Jordan 块是 1×1 阶的. 其充分必要条件是 D 的最小多项式一定能除尽

$$f(\lambda)\Big/\prod_{l=1}^{t}(D-\lambda_l I)^{\mu_l-1}.$$

而这又等价于(5)式. 证毕.

我们给出的判据 2 和判据 3 的最大优点是，它们是充分必要的，因而构成一套完整的判别法则. 在其他有些稳定性理论中，当出现特征值的简并情况时，即所谓“临界情况”，往往不能进行彻底的判断，因而常常只能给出充分条件. 可是，在光腔情况下，“临界情况”特别重要. 下面可以看到，以往人们考虑的轴对称光腔，全都属于“临界情况”，因为其特征根至少是二重的. 运用以上法则，需先求出特征根，很不方便. 我们将给出用矩阵元表示的稳定的充分必要条件，从而可以消除这些麻烦.

二、用矩阵元表示光腔的稳定性充分必要条件

光腔的光线往返矩阵 D 的特征方程为：

$$f(\lambda)=\lambda^4+a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d=0. \tag{6}$$

我们在附录三中根据光路的可逆性，证明了 (6) 式是倒数方程，即特征根必由互成倒数的数对构成. 所以

$$a=c,\qquad d=1. \tag{7}$$

判据 4. 光腔稳定的充分必要条件是满足如下六个条件之一：

$$\text{(i)}\quad \frac{a^2}{4}+2>b>2|a|-2. \tag{8}$$

$$\text{(ii)}\ \begin{cases}-4<a<0,\ b=-2(a+1),\\ D^3+(a+1)D^2-(a+1)D-1=0\end{cases} \tag{9}$$

$$\text{(iii)}\ \begin{cases}0<a<4,\ b=2(a-1),\\ D^3+(a-1)D^2+(a-1)D+1=0.\end{cases} \tag{10}$$

$$\text{(iv)}\ a=0,\ b=-2,\ D^2=I. \tag{11}$$

$$\text{(v)}\ \begin{cases}|a|<4,\ b=\dfrac{a^2}{4}+2,\\ D^2+\dfrac{a}{2}D+I=0.\end{cases} \tag{12}$$

$$\text{(vi)}\ D=\pm I\quad (\text{此时必有 } a=\mp 4,\ b=6). \tag{13}$$

其中 I 为 4×4 单位矩阵

$$a=-T_rD, \tag{14}$$

$$b=D \text{ 的所有二阶主子式之和}, \tag{15}$$

$$-c=D \text{ 的所有三阶主子式之和}.$$

证. 现在我们把使得光腔稳定,也就是使得D的特征方程之根满足判据 2 和判据 3 的 a 和 b 的取值范围寻找出来,就构成了稳定区,此区域之外便是非稳定区.

因为特征方程

$$f(\lambda)=\lambda^4+a\lambda^3+b\lambda^2+a\lambda+1=0 \tag{16}$$

的常数项为 1,所以特征根的模要么全为 1,要么必有大于 1 的. 按判据2,后一情况光腔不稳定,故只需考虑特征根的模全为 1 的情况.

由于方程 (16) 是实系数的,故复数根成对出现. 又由于常数项为 $+1$,故实数根 $+1$ 成对出现,-1 也成对出现. 所以四个根可表示为:

$$\lambda_1=e^{i\theta_1},\ \lambda_2=e^{-i\theta_1},\ \lambda_3=e^{i\theta_2},\ \lambda_4=e^{-i\theta_2}, \tag{17}$$

其中 θ_1 和 θ_2 为实数.

把 (17) 式代入 (16) 式得到

$$a=-2(\cos\theta_1+\cos\theta_2), \tag{18}$$

$$b=2+4\cos\theta_1\cos\theta_2. \tag{19}$$

所以

$$\begin{aligned}\cos\theta_1&=\frac{1}{4}\left[-a+\sqrt{a^2-4b+8}\right]\\ \cos\theta_2&=\frac{1}{4}\left[-a-\sqrt{a^2-4b+8}\right].\end{aligned} \tag{20}$$

分析 (20) 式得到,本判据中的条件 (1)—(6) 分别对应着以下情况:

(1) 有 4 个模全为 1 的互不相等的特征根.

(2) 有 2 个不相等的模为 1 的根,还有一个二重根 $\lambda=1$,但此时又有 $f(D)/(D-I)=0$.

(3) 有 2 个不相等的模为 1 的根,还有一个二重根 $\lambda=-1$,但同时又有 $f(D)/(D+I)=0$.

(4) 有 2 个不同的二重根 $\lambda = \pm 1$，但同时又有 $f(D)/(D+I)(D-I)=0$.

(5) 有 2 个不同的二重根 $\lambda = e^{\pm i\theta}$，$(\theta \neq 0, \pi)$ 但同时又有 $f(D)/(D-e^{i\theta}I)(D-e^{-i\theta}I)=0$.

(6) 有一个四重根 $\lambda = \pm 1$，但同时又有 $f(D)/(D\mp I)^3 = 0$.

按判据 2 和判据 3，以上六种情况全是稳定的. 不满足以上六种情况之一的 a 和 b，将使 θ_1 和 θ_2 无实数解，故必是不稳定的.

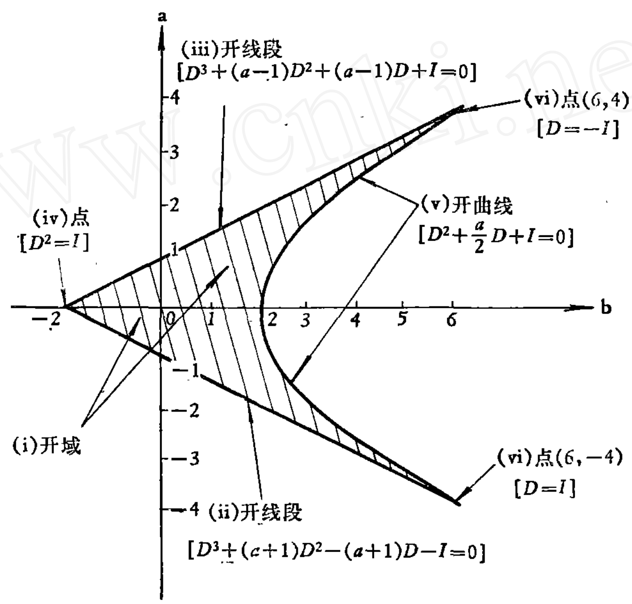

图 1　稳定性图

(根据定理 4 作出. 阴影区是稳定的；边界上的点须加上方括号内指定的条件才是稳定的，否则不稳定；其余部分是不稳定的)

稳定性图示于图 1. 图中阴影区是稳定的，而边界上的点则须附上相应的条件(此条件写在方括号内)才是稳定的，其余部分是不稳定的.

至此，我们已用特征方程的系数 a 和 b 来表示光腔的稳定性的充分必要条件. 而 a 和 b 又通过(14)和(15)式与矩阵 D 的元直接联系起来，也就是用 D 的元来表示了光腔稳定的充分必要条件，所以，只要已知光腔的光线往返矩阵，就可以求出 a 和 b，立即可以从稳定性图上查出该光腔是否是稳定的. 因此，用四阶矩阵表示的光腔的稳定性问题，从原则上是彻底解决了，剩下来的就是对具体的光腔去应用本文的结果.

三、轴对称光腔及可分离的光腔

当光腔是轴对称情况时，光腔的光线往返矩阵 D 可表示为

$$D = D_2 \dotplus D_2,$$

并且[11]

$$|D_2| = 1,$$

其中 D_2 是二阶矩阵. 这种系统的稳定性条件已为人们所熟知[2]. 但为了纳入本文的理论系统，现在用本文的判据来导出，同时观察一下它的稳定区在一般的稳定性图中的位置.

推论 1. 对光线往返矩阵为:

$$D = D_2 \dotplus D_2 \tag{21}$$

的光腔,如果 $|D_2| = 1$, 则稳定的充分必要条件是

$$|T_r D_2| < 2 \ \text{或} \ D_2 = \pm I. \tag{22}$$

证. 因为 $D = D_2 \dotplus D_2$,所以特征根必是偶数重的. 故稳定的情况只可能在判据 4 的(4),(5)和(6)三种情况中出现. 在(4)的情况下, D_2 的特征根必为 $+1$ 和 -1, 所以 $|D_2| = -1$, 但这和条件 $|D_2| = 1$ 矛盾,故被排除. 而(5)即为

$$|T_r D_2| < 2,$$

(6)即为

$$D_2 = \pm I.$$

证毕.

这里,我们要指出,(22)式完全落在本文稳定区的边界线(5)和(6)上. 可见稳定区的边界对应着十分重要的实际情况.

对于虽然不是轴对称的,但 x 和 y 方向仍可分别考虑的情况,有

$$D = D_1 \dotplus D_2,$$

这里 D_1 和 D_2 都是二阶矩阵,并且

$$|D_1| = |D_2| = 1.$$

此时,显然,稳定的充分必要条件是同时满足

$$|T_r D_1| < 2 \ (\text{或} \ D_1 = \pm I)$$

和

$$|T_r D_2| < 2 \ (\text{或} \ D_2 = \pm I.)$$

附录一 判据 1 的证明

判据 1. 光腔稳定的充分必要条件是 D^n 的矩阵元有界.

证. 为了方便,我们引进如下符号:

$$x_{n_1} = x_n, \ x_{n_2} = \theta_n, \ x_{n_3} = y_n, \ x_{n_4} = \phi_n,$$
$$x_{01} = x_0, \ x_{02} = \theta_0, \ x_{03} = y_0, \ x_{04} = \phi_0.$$

D^n 的矩阵元记为 d_{nij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, 则(2)式可以改写为:

$$x_{ni} = \sum_{j=1}^{4} d_{nij} x_{0j} \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{1.1}$$

先证充分性:

设 $|d_{nij}| < K$, $K > 0$.

对任意给定的正数 ε, 我们取 $\delta = \frac{\varepsilon}{4K}$, 则当

$$|x_{0j}| < \delta = \frac{\varepsilon}{4K}$$

时,由(1.1)式得

$$|x_{ni}| \leqslant K \sum_{j=1}^{4} |x_{0j}| < 4K\delta = \varepsilon,$$

故满足了"稳定性定义".

再证必要性:

设光腔稳定. 我们预先指定一个正数 ε. 根据"稳定性定义",可以找到另一个正数 δ, 它具备如下性质:

只要

$$|x_{0i}|<\delta \qquad (i=1,2,3,4), \tag{1.2}$$

就有，对任意 n

$$|x_{ni}|<\varepsilon \qquad (i=1,2,3,4). \tag{1.3}$$

现在取满足 (1.2) 式的 x_{0i} 如下：

$$x_{01}=\frac{\delta}{2}, \qquad x_{02}=x_{03}=x_{04}=0.$$

代入 (1.1) 式得

$$|x_{ni}|=\left|\sum_{j=1}^{4} d_{nij}x_{0j}\right|=\frac{\delta}{2}|d_{ni1}|. \tag{1.4}$$

把 (1.4) 式代入 (1.3) 式得

$$|d_{ni1}|<2\varepsilon/\delta.$$

同样可证

$$|d_{ni2}|<2\varepsilon/\delta, \quad |d_{ni3}|<2\varepsilon/\delta, \quad |d_{ni4}|<2\varepsilon/\delta.$$

即

$$|d_{nij}|<2\varepsilon/\delta, \qquad (i,j=1,2,3,4).$$

所以 $2\varepsilon/\delta$ 就是 D^n 的矩阵元的界．证毕．

附　录　二

引理 1. 设 k 阶 Jordan 块 H_k 的特征根为 λ，则当 n 取一切自然数时，H_k^n 的矩阵元的情况可分为以下四类：

(1) 若 $|\lambda|<1$，则矩阵元有界，

(2) 若 $|\lambda|>1$，则矩阵元无界，

(3) 若 $|\lambda|=1$，而且 $k=1$，则矩阵元有界，

(4) 若 $|\lambda|=1$，而且 $k>1$，则矩阵元无界。

证．用数学归纳法可以证明

$$H_k^n=\begin{bmatrix} C_n^0\lambda^n & & & \\ C_n^1\lambda^{n-1} & & \lambda^n & \\ \vdots & & \vdots & \ddots \\ C_n^{k-1}\lambda^{n-k+1} & & C_n^{k-2}\lambda^{n-k+2} & \lambda^n \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

其中

$$C_n^k=\begin{cases} \dfrac{n!}{m!(n-m)!} & \text{当 } m\leqslant n \\ 0 & \text{当 } m>n, \end{cases} \tag{2.2}$$

式中 $m=0,1,2,\cdots,k-1$．在 (2.1) 式中令 $n\to\infty$，并利用 (2.2) 式便能得到所需证明的四点情况．

附　录　三

判据　光腔的光线往返矩阵的特征方程是倒数方程．

证．光腔中总存在反射面．任取一个反射面 A，如图 2 所示．其反射矩阵记为 R_A．将光线往返矩阵写为：

$$M=R_AG.$$

若

$$R_A G \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ y_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \\ y_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

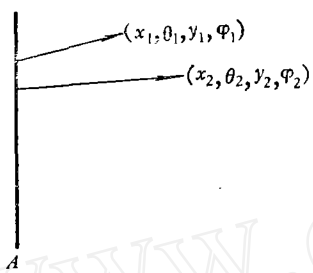

图　2

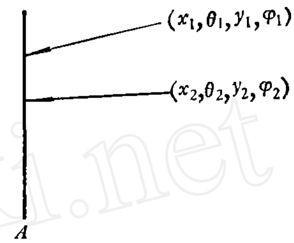

图　3

现在,我们把 $(x_2, \theta_2, y_2, \varphi_2)$ 反向,如图 3 所示. 由光线的符号法则,其符号仍是 $(x_2, \theta_2, y_2, \varphi_2)$. 由光路可逆得

$$G R_A \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \\ y_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ y_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

由 (3.1) 和 (3.2) 式得

$$M = (R_A G) = (G R_A)^{-1},$$

所以

$$G^{-1} = R_A M,$$

$$G^{-1} R_A^{-1} = R_A M R_A^{-1},$$

即

$$M^{-1} = R_A M R_A^{-1}.$$

所以 M 和 M^{-1} 的特征方程相同,故为倒数方程,即其根由互成倒数的数对组成.

本文曾与周光地教授进行过有益讨论,谨此致谢.

参　考　文　献

[1] Boyd, G. D. & Kogelnik, H., *Bell Syst. Tech. J.*, **41**(1962), 1347.
[2] 朱如曾、封开印编译, 激光物理, 国防工业出版社, 1975, 162.
[3] Ананьев, Ю. А., *Квантовая электроника*, 1971, 6:3—34.
[4] 朱如曾, 物理, **10**(1981).
[5] Siegman, A. E., *Proc. I. E. E. E.*, **53**(1965), 277.
[6] 朱如曾, 激光, **8**(1981).
[7] Воробьев, В. В., *Цв. Вуз, Рабиофизка*, **13** (1970), 1905.
[8] Шварцбург, А. Б., *Изв. Вуз, Рабиофизка*, **13** (1970), 1775.
[9] 方洪烈, 激光, **6**(1979), 4:17.
[10] 方洪烈, 物理学报, **28**(1979), 430.
[11] Kogelnik, H., *Bell Syst. Tech. J.*, **44**(1965), 455.