

# 轴对称磁力线管的静力学平衡

胡文瑞

(中国科学院力学研究所)

## 摘 要

轴对称磁力线管具有细长体的位形。在球坐标中,将严格的非线性方程组对极角坐标展开,可得到静力学平衡位形边值问题的级数解。利用这些解,讨论了太阳磁力线管的特性。结果表明,沿磁力线管横向的温度不均匀性,可使磁力线管内的磁场强度增强;磁力线管在光球层底部有收缩的趋势,并向两边扩散;以及磁力线在磁面上有扭转的特征。由于磁力线管的下层是有力场,而上层是无力场,下层磁力线扭转增强时,可使上层无力场横向磁场分量增强,从而提供太阳耀斑所需的能量。最后,还具体地讨论了某些典型的通量管模型。

## 一、前 言

最近的观测表明,太阳磁场的基本结构是孤立而离散的磁通量管,每个磁力线管的半径仅200—400公里,平均磁场强度约500—2000高斯。磁力线管从对流区浮出,经过光球而延伸到色球层和日冕,表现为复杂的特征位形。研究这些磁力线管的平衡位形,以及热力学状态对磁场位形的影响,对于理解太阳磁场和活动区的动力学过程都是十分重要的(可参看文献[1])。太阳活动区磁场经常处理为无力场<sup>[2]</sup>,这种假设只是在色球和日冕低层才近似成立。在对流区和光球层中,压力梯度和重力项是重要的,必须讨论一般的磁流体静力学平衡关系。另外,宁静日珥也可以看成是一个磁力线管<sup>[3]</sup>,研究等离子体参数与磁场的平衡关系也是很重要的。本文一般地讨论轴对称磁力线管的静力学平衡关系,其中等离子体的温度场可以是二维不均匀的。

如果磁通量管沿截面是均匀的,就可得到Lüst和Schlüter(1954)的解<sup>[4]</sup>。Parker将这种一维解推广到二维的情况<sup>[5,6]</sup>,但在数学处理上不严格。因此,Wilson在柱坐标下展开磁流体静力学方程,得到一类特定的渐近解<sup>[7]</sup>。最近,Low利用磁面函数一般地讨论了二维有力场的性质,又重新研究了Schlüter-Temesvary(1954)黑子模型的平衡位形,并得到了Wilson的特解为其特例<sup>[8,9]</sup>。另一方面,Comfort, Tandberg-Hanssen和吴式灿利用分离变量法,求出了非线性方程的一类特解,并具体地讨论了一些黑子位形。

磁流体静力学求解的困难在于,微分方程组是非线性的。如果还给定具体的边值或初值,问题就更为复杂。此外,应用到具体问题,磁力线管中的热力学参数,随高度有急剧变化,也

本文1980年4月28日收到。

不易于数值计算。考虑到磁力线管细长体的特性，我们可以在球坐标  $(r, \theta, \varphi)$  中对小角度  $\theta$  展开，由此可得到磁流体静力学方程的一般的二维解。这种展开解的形式简洁，便于应用来讨论各种问题。

## 二、基本方程组及其解法

磁流体静力学平衡的方程组，包括动量守恒关系、磁场无源方程、状态方程。在球坐标系中，轴对称问题的基本方程组可表示为：

$$B_\theta \left( \frac{\partial B_r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial r B_\theta}{\partial r} \right) - B_\varphi \frac{\partial r B_\varphi}{\partial r} = 4\pi r \left( \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{G\mathcal{M}_\odot}{r^2} \rho \right), \quad (2.1)$$

$$B_r \left( \frac{\partial r B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) - \frac{B_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial B_\varphi \sin \theta}{\partial \vartheta} = 4\pi \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (2.2)$$

$$B_r \frac{\partial r B_\varphi}{\partial r} + \frac{B_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial B_\varphi \sin \theta}{\partial \vartheta} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r^2 B_r}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_\theta \sin \theta}{\partial \vartheta} = 0, \quad (2.4)$$

$$p = \rho \mathcal{R} T; \quad (2.5)$$

其中  $B_r, B_\theta, B_\varphi$  为磁感应强度， $\rho, p$  和  $T$  为等离子体的密度、压力和温度， $\mathcal{R}, G$  为气体常数和引力常数。在这里没有考虑能量方程，温度  $T(r, \theta)$  是给定的，它可以由观测给出。引进无量纲参数

$$\begin{cases} R = \frac{r}{r_0}, & \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, & p^* = \frac{p}{p_0}, & \mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}}{B_0}, \\ \sigma = \frac{G\mathcal{M}_\odot \rho_0 / r_0}{B_0^2 / 4\pi}, & \beta = p_0 / \left( \frac{B_0^2}{4\pi} \right), & \delta = \frac{\sigma}{\beta}, \end{cases} \quad (2.6)$$

其中下标“0”标志相应的典型值。略去标志无量纲量的上标“\*”，就得到无量纲方程组

$$B_\theta \left( \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{\partial R B_\theta}{\partial R} \right) - B_\varphi \frac{\partial R B_\varphi}{\partial R} = R \left( \beta \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\sigma}{R^2} \rho \right), \quad (2.7)$$

$$B_r \left( \frac{\partial R B_\theta}{\partial R} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) - \frac{B_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial B_\varphi \sin \theta}{\partial \theta} = \beta \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (2.8)$$

$$B_r \frac{\partial R B_\varphi}{\partial R} + \frac{B_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial B_\varphi \sin \theta}{\partial \theta} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R^2 B_r}{\partial R} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_\theta \sin \theta}{\partial \theta} = 0, \quad (2.10)$$

$$p = \rho T. \quad (2.11)$$

由于磁通量管一般是细长体，将球坐标原点取在太阳对流区下的某处，磁通量管内部的  $\theta$  角都很小。因此，可以将二维参数对  $\theta$  展开

$$\begin{cases} p = \sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)} \theta^m, & \rho = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{(m)} \theta^m, & T = \sum_{m=0}^{\infty} T^{(m)} \theta^m, \\ \mathbf{B} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{B}^{(m)} \theta^m, \end{cases} \quad (2.12)$$

将 (2.12) 代入基本方程组 (2.7)–(2.11), 注意到关系式

$$\cos \theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \theta^{2m}, \quad \sin \theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \theta^{2m+1},$$

就可得到各阶  $\theta^m$  的常微分方程组.

零阶关系为:

$$\begin{cases} \frac{dp^{(0)}}{dR} + \frac{\delta}{R^2} \rho^{(0)} = 0, & (2.13) \\ B_{\theta}^{(0)} = 0, \quad B_{\phi}^{(0)} = 0, & (2.14) \\ p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)}. & (2.15) \end{cases}$$

由 (2.13), (2.15) 式可得到压力分布为:

$$p^{(0)}(R) = p_0^{(0)} \exp \left[ - \int_1^R \frac{\delta}{R^2 T^{(0)}} dR \right], \quad (2.16)$$

其中边值  $p_0^{(0)} = p^{(0)}(1) = 1$ , 也就是  $p(1, 0)$  处的压力值. 得到这个关系是很自然的. 零阶关系相当于对称轴  $\theta = 0$  时的关系, 对称轴应该是一根磁力线, 而沿磁力线的压力梯度与重力平衡<sup>[8]</sup>. 在零阶方程中,  $B_r^{(0)}$  是任意的. 由特定类型的  $B_r^{(0)}$  分布, 就可以求出更高阶的量.

一阶方程组可以导出:

$$\begin{cases} B_{\theta}^{(1)} B_r^{(1)} = \beta R \frac{dp^{(1)}}{dR} + \frac{\sigma}{R} \rho^{(1)}, & (2.17) \\ -B_r^{(0)} B_r^{(1)} = \beta p^{(1)}, & (2.18) \\ B_{\theta}^{(1)} = -\frac{1}{2R} \frac{dR^2 B_r^{(0)}}{dR}, & (2.19) \\ p^{(1)} = \rho^{(0)} T^{(1)} + \rho^{(1)} T^{(0)}. & (2.20) \end{cases}$$

将 (2.20) 和 (2.18) 式代入 (2.17) 式, 就得到  $p^{(1)}$  的方程

$$\frac{dp^{(1)}}{dR} + \left( \frac{\delta}{R^2 T^{(0)}} - \frac{1}{2R B_r^{(0)}} \frac{dR^2 B_r^{(0)}}{dR} \right) p^{(1)} = \delta \frac{p^{(0)}}{R^2 T^{(0)}} \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}}$$

注意到关系式 (2.16), 可求出上式的解为:

$$p^{(1)}(R) = R \sqrt{B^{(0)}(R)} p^{(0)}(R) \left[ p_0^{(1)} + \int_1^R \frac{\delta}{R^3 \sqrt{B_r^{(0)}}} \frac{T^{(1)}}{T^{(0)2}} dR \right], \quad (2.21)$$

其中  $p_0^{(1)} = p^{(1)}(1)$ . 将 (2.21) 式代入 (2.18) 式, 就得到  $B_r^{(1)}$  为:

$$B_r^{(1)}(R) = -\frac{R p^{(0)}(R)}{\sqrt{B^{(0)}(R)}} \left[ p_0^{(1)} + \int_1^R \frac{\delta}{R^3 \sqrt{B_r^{(0)}}} \frac{T^{(1)}}{T^{(0)2}} dR \right]. \quad (2.22)$$

而 (2.19) 式给出了  $B_{\theta}^{(1)}$  的关系. 对于一维的情况, 相当于  $B_{\theta}^{(1)} = 0$ , 这时有  $R^2 B_r = \text{常数}$ . 非零的  $B_{\theta}^{(1)}$  正表现了磁场位形的二维特征. 在积分 (2.21) 式时, 我们取  $B^{(0)}(1) = 1$ .

同样地, 二阶方程组表示为:

$$\begin{cases} R \left( \beta \frac{dp^{(2)}}{dR} + \frac{\sigma}{R^2} \rho^{(2)} \right) = B_{\theta}^{(1)} \left( 2B_r^{(2)} - \frac{dR B_{\theta}^{(1)}}{dR} \right) + B_{\theta}^{(2)} B_r^{(1)} - B_{\phi}^{(1)} \frac{dR B_{\phi}^{(1)}}{dR}, & (2.23) \\ 2B_r^{(0)} B_r^{(2)} - B_r^{(0)} \frac{dR B_{\theta}^{(1)}}{dR} + B_r^{(1)2} - 2B_{\phi}^{(1)2} = 2\beta p^{(2)}, & (2.24) \end{cases}$$

$$B_r^{(0)} \frac{dR B_\Phi^{(1)}}{dR} + 2 B_\Phi^{(1)} B_r^{(0)} = 0, \quad (2.25)$$

$$B_\theta^{(1)} = -\frac{1}{3R} \frac{dR^2 B_r^{(1)}}{dR}, \quad (2.26)$$

$$p^{(2)} = \rho^{(0)} T^{(2)} + \rho^{(1)} T^{(1)} + \rho^{(2)} T^{(0)}, \quad (2.27)$$

将(2.24)–(2.27)式的磁场分量代入(2.23)式,可得  $p^{(2)}$  的方程

$$\frac{dp^{(2)}}{dR} + \left( \frac{\delta}{RT^{(0)}} + \frac{2}{R} \frac{B_\theta^{(1)}}{B_r^{(0)}} \right) p^{(2)} = S_2(R), \quad (2.28)$$

其中的非齐次项  $S_2(R)$  为:

$$S_2(R) = \frac{\delta}{R^2 T^{(0)}} \left\{ p^{(1)} \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} + p^{(0)} \left[ \frac{T^{(2)}}{T^{(0)}} - \left( \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} \right)^2 \right] \right\} \\ + \frac{1}{\beta R} \left[ \frac{B_\theta^{(1)}}{B_r^{(0)}} (2B_\Phi^{(1)2} - B_r^{(1)2}) + B_\theta^{(2)} B_r^{(1)} - B_\Phi^{(1)} \frac{dR B_\Phi^{(1)}}{dR} \right], \quad (2.29)$$

利用关系(2.19)式,就可以得到  $p^{(2)}$  的解为:

$$p^{(2)}(R) = R^2 B_r^{(0)}(R) p^{(0)}(R) \left\{ p_0^{(2)} + \int_1^R \frac{S_2(R)}{R^2 B_r^{(0)} p^{(0)}} dR \right\}. \quad (2.30)$$

对(2.25)式积分,并考虑到关系(2.19)式,则有

$$B_\Phi^{(1)}(R) = B_\Phi^{(1)} R B_r^{(0)}(R), \quad (2.31)$$

其中  $B_\Phi^{(1)} = B_\Phi^{(1)}(1)$ . 由(2.22)和(2.26)式解出

$$B_\theta^{(1)}(R) = \frac{1}{3R} \frac{d}{dR} \left\{ \frac{\beta R^2 p^{(0)}(R)}{\sqrt{B_r^{(0)}(R)}} \left[ p_0^{(1)} + \int_1^R \frac{\delta}{R^3 \sqrt{B_r^{(0)}} T^{(0)}} dR \right] \right\}. \quad (2.32)$$

利用(2.31)和(2.32)式就完全确定了源项  $S_2(R)$ , 进而可求出(2.30)式. 由(2.30)和(2.24)式可求出  $B_r^{(2)}$  为:

$$B_r^{(2)}(R) = \frac{1}{2} \frac{dR B_\theta^{(1)}}{dR} + \frac{2B_\Phi^{(1)2} - B_r^{(1)2}}{2B_r^{(0)}} + \frac{\beta}{2} R^2 p^{(0)} \left\{ p_0^{(2)} + \int_1^R \frac{S_2(R) dR}{R^2 B_r^{(0)} p^{(0)}} \right\}, \quad (2.33)$$

三阶方程组可以表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} B_\theta^{(1)} \left( 3B_r^{(3)} - \frac{dR B_\theta^{(1)}}{dR} \right) + B_\theta^{(2)} \left( 2B_r^{(2)} - \frac{dR B_\theta^{(2)}}{dR} \right) + B_r^{(1)} B_\theta^{(3)} - \left( B_\Phi^{(1)} \frac{dR B_\Phi^{(2)}}{dR} + B_\Phi^{(2)} \frac{dR B_\Phi^{(1)}}{dR} \right) \\ = R \left( \beta \frac{dp^{(3)}}{dR} + \frac{\sigma}{R} \rho^{(3)} \right), \end{aligned} \right. \quad (2.34)$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_r^{(0)} \left( \frac{dR B_\theta^{(2)}}{dR} - 3B_r^{(3)} \right) + B_r^{(1)} \left( \frac{dR B_\theta^{(1)}}{dR} - 2B_r^{(2)} \right) - B_r^{(2)} B_r^{(1)} - 5B_\Phi^{(1)} B_\Phi^{(2)} \\ + \frac{1}{6} B_r^{(0)} B_r^{(1)} = \beta \left( 3p^{(3)} - \frac{1}{6} p^{(1)} \right), \end{aligned} \right. \quad (2.35)$$

$$B_r^{(0)} \frac{dR B_\Phi^{(2)}}{dR} + B_r^{(1)} \frac{dR B_\Phi^{(1)}}{dR} + 3B_\theta^{(1)} B_\Phi^{(2)} + 2B_\theta^{(2)} B_\Phi^{(1)} = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{R} \frac{dR^2 B_r^{(2)}}{dR} - \frac{1}{6R} \frac{dR^2 B_r^{(0)}}{dR} + 4B_\theta^{(3)} - \frac{2}{3} B_\theta^{(1)} = 0, \quad (2.37)$$

$$p^{(3)} = \rho^{(0)} T^{(3)} + \rho^{(1)} T^{(2)} + \rho^{(2)} T^{(1)} + \rho^{(3)} T^{(0)}. \quad (2.38)$$

将(2.35)和(2.37)式代入(2.34)式,则导出  $p^{(3)}$  的方程为:

$$\frac{dp^{(3)}}{dR} + \left( \frac{\delta}{RT^{(0)}} - \frac{3}{2R^2 B_r^{(0)}} \frac{dR^2 B_r^{(0)}}{dR} \right) p^{(3)} = S_3(R), \quad (2.39)$$

其中

$$\begin{aligned} S_3(R) = & \frac{B_\theta^{(1)}}{6RB_r^{(0)}} p^{(1)} + \frac{\delta}{RT^{(0)}} \left\{ p^{(2)} \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} + p^{(1)} \left[ \frac{T^{(2)}}{T^{(0)}} - \left( \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + p^{(0)} \left[ \frac{T^{(3)}}{T^{(0)}} - 2 \frac{T^{(1)}T^{(2)}}{T^{(0)2}} + \left( \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} \right)^3 \right] \right\} + \frac{B_\theta^{(1)}}{\beta R B_r^{(0)}} \left[ B_r^{(1)} \frac{dRB_\theta^{(1)}}{dR} - 3B_r^{(1)}B_r^{(2)} \right. \\ & \left. - 5B_\Phi^{(1)}B_\Phi^{(2)} \right] + \frac{1}{\beta R} \left[ B_r^{(1)}B_\theta^{(3)} + 2B_r^{(2)}B_\theta^{(2)} + \frac{1}{6} B_r^{(1)}B_\theta^{(1)} - B_\theta^{(2)} \frac{dRB_\theta^{(1)}}{dR} \right. \\ & \left. - B_\Phi^{(1)} \frac{dRB_\Phi^{(2)}}{dR} - B_\Phi^{(2)} \frac{dRB_\Phi^{(1)}}{dR} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

由 (2.39) 式即求出  $p^{(3)}$ ,

$$p^{(3)}(R) = R^3 (B_r^{(0)})^{3/2} p^{(0)}(R) \left\{ p_0^{(3)} + \int_1^R \frac{S_3(R) dR}{R^3 (B_r^{(0)})^{3/2} p^{(0)}} \right\}, \quad (2.41)$$

其中的边值  $p_0^{(3)} = p^{(3)}(1)$ . 由 (2.36) 式得到  $B_\Phi^{(2)}$  的线性常微分方程为:

$$\frac{dRB_\Phi^{(2)}}{dR} - \left( \frac{3}{2RB_r^{(0)}} \frac{dR^2 B_r^{(0)}}{dR} \right) B_\Phi^{(2)} + \frac{B_r^{(1)}(R)}{B_r^{(0)}(R)} \frac{dRB_\Phi^{(1)}}{dR} + 2 \frac{B_\Phi^{(1)}B_\theta^{(2)}}{B_r^{(0)}} = 0, \quad (2.42)$$

其解为:

$$B_\Phi^{(2)}(R) = R^2 (B_r^{(0)})^{3/2} \left[ B_{\Phi_0}^{(2)} - \int_1^R \frac{2B_\Phi^{(1)}B_\theta^{(2)} + B_r^{(1)} \frac{dRB_\Phi^{(1)}}{dR}}{R^3 (B_r^{(0)})^{5/2}} dR \right], \quad (2.43)$$

其中  $B_\theta^{(2)}$ ,  $B_\Phi^{(1)}$ ,  $B_r^{(1)}$  分别由 (2.32), (2.31) 和 (2.22) 式给出. 而由 (2.37) 式得到

$$B_\theta^{(3)}(R) = \frac{1}{6} B_\theta^{(1)} + \frac{1}{24R} \frac{dR^2 B_r^{(0)}}{dR} - \frac{1}{4R} \frac{dR^2 B_r^{(2)}}{dR}. \quad (2.44)$$

由 (2.35) 式就求出  $B_r^{(3)}$  的解为:

$$\begin{aligned} B_r^{(3)}(R) = & \frac{1}{3} \frac{dRB_\theta^{(2)}}{dR} + \frac{B_r^{(1)}}{3B_r^{(0)}} \left( \frac{dRB_\theta^{(1)}}{dR} - 3B_r^{(2)} \right) - \frac{5B_\Phi^{(1)}B_\Phi^{(2)}}{3B_r^{(0)}} + \frac{1}{18} B_r^{(1)} \\ & + \frac{\beta p^{(1)}}{18B_r^{(0)}} - \beta R^3 \sqrt{B_r^{(0)}} p^{(0)} \left\{ p_0^{(3)} + \int_1^R \frac{S_3(R) dR}{R^3 (B_r^{(0)})^{3/2} p^{(0)}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

如此类推, 可以导出更高阶的方程组和解. 这些解中只包含简单的微分和积分运算, 以及  $R=1$  处各相应参数的边值. 这样, 我们就形式地求出了初值问题的级数展开解. 利用这些解, 可以讨论磁力线管的一般特征.

### 三、太阳磁力线管的一般特征

#### 1. 温度不均匀性的影响

在磁力线管的内外, 总压平衡, 即

$$p + \frac{B^2}{8\pi} = p_e, \quad (3.1)$$

$p_e$  为管外的气体压力. 由内外的压差  $p_e - p$  就确定了磁场的强度. 由光球层的观测值  $p_e - p$

定出的磁场不超过 1500 高斯,因此需寻求放大磁场的机制<sup>[1]</sup>. Parker 曾指出,磁力线管内外的温度差可使磁场增强.不失一般性,将温度场表示为:

$$T(R, \theta) = T^{(0)}(R)[1 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \dots], \quad (3.2)$$

其中的函数  $\alpha_i(R)$  与  $T^{(i)}(R)$  的关系为:

$$\alpha_i(R) = \frac{T^{(i)}(R)}{T^{(0)}(R)}. \quad (3.3)$$

将 (3.2) 式代入 (2.21), (2.28), (2.39) 等式,就得到压力的展开表达式为:

$$p(R, \theta) = \exp\left(-\delta \int_1^R \frac{dR}{R^2 T^{(0)}}\right) \left\{ 1 + R \sqrt{B_r^{(0)}} \left[ p_0^{(1)} + \delta \int_1^R \frac{\alpha_1(R) dR}{R^3 \sqrt{B_r^{(0)}}} \right] \theta + \sum_{i=2}^{\infty} R^i (B_r^{(0)})^{i/2} \left[ p_0^{(i)} + \int_1^R \frac{\alpha_i S_i dR}{R^i (B_r^{(0)})^{i/2}} \right] \theta^i \right\}. \quad (3.4)$$

对于太阳表面的磁力线管,压力随  $\theta$  的增加而增大.一般地有  $p_0^{(1)} > 0$ , 但  $\alpha_1(R) > 0$ , 因而  $p^{(1)}(R) > 0$ . 这样, (2.22) 式给出

$$B_r^{(1)}(R) = -\beta \frac{R}{\sqrt{B_r^{(0)}}} \exp\left(-\delta \int_1^R \frac{dR}{R^2 T^{(0)}}\right) \left[ p_0^{(1)} + \int_1^R \frac{\delta \alpha_1 dR}{R^3 T^{(0)} \sqrt{B_r^{(0)}}} \right] < 0. \quad (3.5)$$

磁能密度可以表示为:

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} [B_r^{(0)2} + 2B_r^{(0)} B_r^{(1)}\theta + (B_r^{(1)2} + B_\theta^{(1)2} + B_\phi^{(1)2} + 2B_r^{(0)} B_r^{(2)})\theta^2 + \dots], \quad (3.6)$$

其中  $\theta$  项的系数为负. 这表明, 当温度横过磁力线管不均匀时, 磁能分布也有显著的不均匀性. 温度均匀时, 磁能的不均匀性是高阶量.

对于线性问题, 压力的不均匀性为:

$$\frac{p^{(1)}(R)}{p^{(0)}(R)} \theta = R \sqrt{B_r^{(0)}} \left[ p_0^{(1)} + \delta \int_1^R \frac{\alpha_1(R) dR}{R^3 \sqrt{B_r^{(0)}}} \right] \theta, \quad (3.7)$$

而磁能的不均匀性可以表示为:

$$\frac{2B_r^{(1)}}{B_r^{(0)}} \theta = - \left( \frac{2\beta p^{(0)}}{B_r^{(0)2}} \right) \left( \frac{p^{(1)}\theta}{p^{(0)}} \right). \quad (3.8)$$

从太阳对流区向外,  $p^{(0)}$  和  $B_r^{(0)}$  都向外迅速减少.  $p^{(0)}$  从光球层底部到过流区大约减少五个量级, 而  $B_r^{(0)}$  却只有一、两个量级. 因此, 在光球或光球以下的区域中, 由于温度的不均匀性产生的压力和磁压的不均匀性都很大; 而在光球层以上, 磁压的不均匀性迅速减弱, 比压力的不均匀性小得多. 所以, 温度不均匀性产生的磁压增强, 主要出现在太阳大气低层.

再讨论温度没有横向梯度的情况. 这时,

$$\alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots.$$

如果  $R = 1$  处的初始压力也均匀, 则

$$p_0^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots.$$

由 (2.21) 和 (2.22) 式得出

$$p^{(1)}(R) = 0, \quad B_r^{(1)}(R) = 0. \quad (3.9)$$

在 (2.29) 式中, 磁场变化引起的源项不为零, 即

$$S_2(R) = \frac{1}{\beta R} \left[ \frac{2B_\theta^{(1)}B_\varphi^{(1)2}}{B_r^{(0)}} - B_\varphi^{(1)} \frac{dR B_\varphi^{(1)}}{dR} \right] \\ = - \frac{(B_{\varphi 0}^{(1)})^2}{\beta} B_r^{(0)} \cdot \frac{d}{dR} [(R+1)R B_r^{(0)}]. \quad (3.10)$$

相应地得到  $p^{(2)}(R)$  的分布为:

$$p^{(2)}(R) = - \frac{(B_{\varphi 0}^{(1)})^2}{\beta} R^2 B_r^{(0)} p^{(0)} \int_1^R \frac{1}{R^2 p^{(0)}} \frac{d}{dR} [R(R+1)B_r^{(0)}] dR. \quad (3.11)$$

上式表明,若初始磁力线管不扭转,即  $B_{\varphi 0}^{(1)} = 0$ , 则  $p^{(2)}(R) = 0$ ; 否则,当  $B_r^{(0)}$  衰减得比  $1/R(R+1)$  更快时,  $p^{(2)}$  为正,反之为负. 相应地,磁压变化为:

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{(B_r^{(0)})^2}{8\pi} + \frac{\theta^2}{8\pi} \left\{ \frac{1}{4R^2} \left( \frac{dR^2 B_r^{(0)}}{dR} \right)^2 - \frac{B_r^{(0)}}{2} \frac{d^2}{dR^2} (R^2 B_r^{(0)}) \right. \\ \left. + (B_{\varphi 0}^{(1)})^2 \left[ R^2 (B_r^{(0)})^2 + 2R^2 B_r^{(0)} - R^2 B_r^{(0)} p^{(0)} \right] \int_1^R \frac{dR(R+1)B_r^{(0)}}{dR} \right. \\ \left. \cdot \frac{dR}{R^2 p^{(0)}} \right\} + O(\theta^3). \quad (3.12)$$

所以,当温度场横向均匀时,磁压和热力学压力也可以不均匀,这种不均匀表现为  $\theta^2$  项. 当  $B_r^{(0)}$  衰减较快时,磁压会增大.

根据上述分析,温度分布对磁压的影响如图 1 所示,  $\theta = \theta_0$  为磁力线管的边界.

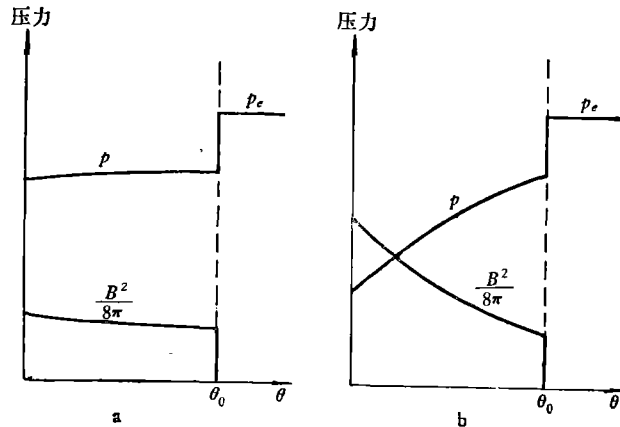


图 1 温度分布对磁压的影响

a.  $\alpha_1 = 0$ , b.  $\alpha_1 \neq 0$

## 2. 磁面的位形特征

磁力线的方程为:

$$\frac{dR}{B_r} = \frac{R d\theta}{B_\theta} = \frac{R \sin \theta d\varphi}{B_\varphi}, \quad (3.13)$$

在轴对称问题中,子午面上每一根磁力线绕对称轴转成一个磁面,磁面的方程可表示为:

$$\frac{d\theta}{dR} = \frac{1}{R} \frac{B_\theta^{(1)}\theta + B_\theta^{(2)}\theta^2 + \dots}{B_r^{(0)} + B_r^{(1)}\theta + B_r^{(2)}\theta^2 + \dots}, \quad (3.14)$$

将 (3.2) 式对  $\theta$  展开, 就得到渐近方程

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dR} = & \frac{1}{R} \frac{B_{\theta}^{(1)}}{B_r^{(0)}} \theta + \frac{1}{R} \left( \frac{B_{\theta}^{(2)}}{B_r^{(0)}} - \frac{B_{\theta}^{(1)} B_r^{(1)}}{B_r^{(0)2}} \right) \theta^2 + \frac{1}{R} \left[ \frac{B_{\theta}^{(3)}}{B_r^{(0)}} - \frac{B_r^{(1)} B_{\theta}^{(2)}}{B_r^{(0)2}} \right. \\ & \left. + \frac{B_{\theta}^{(1)}}{B_r^{(0)}} \left( 2 \frac{B_r^{(1)2}}{B_r^{(0)2}} - \frac{B_r^{(2)}}{B_r^{(0)}} \right) \right] \theta^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

这是一个复杂的非线性方程, 一般难于求解. 如果只考虑到  $\theta^2$  项, 略去高阶项, 将整个方程除以  $\theta^2$ , 就得到  $\frac{1}{\theta}$  的线性方程为:

$$\frac{d}{dR} \left( \frac{1}{\theta} \right) + \left( \frac{1}{R} \frac{B_{\theta}^{(1)}}{B_r^{(0)}} \right) \frac{1}{\theta} = - \frac{1}{R} \left( \frac{B_{\theta}^{(2)}}{B_r^{(0)}} - \frac{B_{\theta}^{(1)} B_r^{(1)}}{B_r^{(0)2}} \right). \quad (3.16)$$

由此得到

$$\frac{1}{\theta} = R \sqrt{B_r^{(0)}} \left\{ \frac{1}{\theta_0} - \int_1^R \left( B_{\theta}^{(2)} - \frac{B_{\theta}^{(1)} B_r^{(1)}}{B_r^{(0)}} \right) \frac{dR}{R^2 (\sqrt{B_r^{(0)}})^3} \right\},$$

或者表示为:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{1/R \sqrt{B_r^{(0)}}}{1 - \theta_0 \int_1^R \left( B_{\theta}^{(2)} - \frac{B_{\theta}^{(1)} B_r^{(1)}}{B_r^{(0)}} \right) \frac{dR}{R^2 (\sqrt{B_r^{(0)}})^3}}. \quad (3.17)$$

近似地有

$$\frac{\theta}{\theta_0} \approx \frac{1}{R \sqrt{B_r^{(0)}}} \left\{ 1 + \theta_0 \int_1^R \left( B_{\theta}^{(2)} - \frac{B_{\theta}^{(1)} B_r^{(1)}}{B_r^{(0)}} \right) \frac{dR}{R^2 (\sqrt{B_r^{(0)}})^3} \right\} + O(\theta^2). \quad (3.18)$$

(3.18) 式表明, 磁面的基本位形可表示为:

$$\theta = \theta_0 / R \sqrt{B_r^{(0)}(R)}.$$

当  $B_r^{(0)}$  衰减得比  $\frac{1}{R^2}$  更快时, 磁力线随  $R$  的增加而发散, 否则收敛. 对于太阳表面的磁力线管,

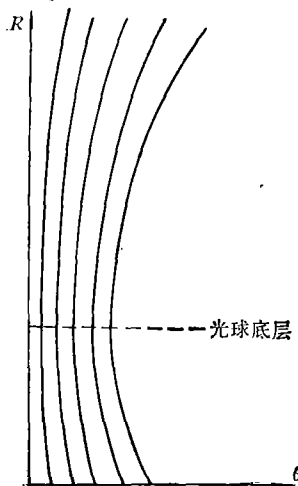


图2 磁面位形示意图

光球层以外, 衰减急剧, 磁力线是发散的; 但在对流区中, 某种发电机效应使磁场增强, 那里的磁力线将随高度而汇聚. 整个磁力线在光球底层收聚, 向两边散开, 如图 2 所示. (3.18) 式中的  $\theta_0$  项对磁面位形略有修正, 基本特征应如图 2 所示. 热力学参数沿磁力线管均匀时, 有关系式

$$B_{\theta}^{(1)} = 0, \quad B_{\theta}^{(2)} = 0,$$

故 (3.18) 式的线性项为零, 非线性项反应了温度分布不均匀性对磁面位形的影响.

### 3. 磁力线的扭转效应

在无作用力磁场的情形, 磁力线都有扭转的趋势. 轴对称情况下, 磁力线在磁面上缠卷成空间螺旋线<sup>[2]</sup>. 由 (2.31) 和 (2.43) 式可见, 如果初始的  $B_{\phi}^{(1)} = 0$ , 则总是有

$$B_{\phi}^{(1)} = 0, \quad B_{\phi}^{(2)} = 0;$$

反之, 若初始的磁力线缠绕时, 它延伸出去也是缠卷的. 看来,



磁力线管中力线的缠卷特征不仅对无力场存在,在有力场时也仍然存在.

由于我们这里是对几何坐标  $\theta$  展开,而不具体要求  $\beta$  值的大小,可以用这个解来讨论有力场和无力场区域的交接情况.不少耀斑理论认为,由于光球层根部磁场的扭转,逐渐在色球和日冕中使横向磁场分量增加而储存能量.解 (2.31) 式表明,如果对流区磁场扭转,  $B_{\phi}^{(0)} \neq 0$ ,将使光球层的磁场扭转,扭转场的大小将随  $R B_r^{(0)}(R)$  的增减而增减.在光球层以下,  $R B_r^{(0)}(R)$  衰减不会很大,所以扭转程度与初始的情况不会差别太大;光球层以上,扭转程度会减弱.对于不同的初始扭转程度  $B_{\phi}^{(0)}$ ,上层的扭转程度也不同.当对流区中磁力线逐渐增强扭转时,确实可以使上层大气中的横场分量增加,从而储存磁能.将这里的分析与无力场的分析结合起来,可以解释太阳耀斑的储能过程.当然,更细致的讨论还应该分析磁力线管的动力学过程.粗略地由 (2.31) 式估计,纵场磁能与横场磁能之比为:

$$\frac{B_{\phi}^2}{B_r^2} \simeq \left( \frac{B_{\phi}^{(0)} \theta}{B_r^{(0)}} \right)^2 \simeq (B_{\phi}^{(0)})^2 R^2 \theta^2. \quad (3.19)$$

如果  $B_{\phi}^{(0)}$  不小,则上述比值达到 0.1 即足以供应一次耀斑所需的能量.

还应该指出,这里讨论的渐近展开解是一种局部解,在具体运用时要注意其有效区域.太阳大气中参数变化极为剧烈.局部的  $\beta = p / \frac{B^2}{8\pi}$  值,从对流区的大于 1,光球层的接近于 1,到外层活动区中远小于 1.当  $\beta$  远小于 1 时,局部量之间的平衡关系会发生变化,磁力变得越来越起主要作用;压力梯度与重力平衡的关系只在非常靠近对称轴的小区域中才成立.

#### 4. 一类具体的解

讨论下列典型的二维温度场

$$T(R, \theta) = R^n (1 + \alpha_1 R^{n_1} \theta + \alpha_2 R^{n_2} \theta^2 + \dots), \quad (3.20)$$

其中的常系数  $\alpha_i$  和幂指数  $n_i$  皆已知.当  $n > 0$  时,温度随高度  $R$  的增加而增加; $n = 0$  时,对称轴上温度均匀; $\alpha_i = 0$  时,通量管截面上等温.再进一步假设

$$B_r^{(0)} = R^{-m}. \quad (3.21)$$

$m > 0$  时,代表衰减场.

将上述关系式代入 (2.16) 和 (2.21) 式,则分别得到

$$p^{(0)}(R) = \exp \left[ \frac{-\delta}{n+1} \left( 1 - \frac{1}{R^{n+1}} \right) \right], \quad n \neq -1, \quad (3.22)$$

和

$$p^{(1)}(R) = \begin{cases} R^{1-\frac{m}{2}} \exp \left[ -\frac{\delta}{n+1} \left( 1 - \frac{1}{R^{n+1}} \right) \right] \left[ p_0^{(1)} + \frac{\alpha_1 \delta}{2+n-n_1-m/2} \right. \\ \quad \left. \times (1 - R^{n_1-n-2+\frac{m}{2}}) \right], & n+2 \neq n_1 + \frac{m}{2}, \\ R^{1-\frac{m}{2}} \exp \left[ -\frac{\delta}{n+1} \left( 1 - \frac{1}{R^{n+1}} \right) \right] [p_0^{(1)} + \alpha_1 \delta \ln R], \\ \quad n+2 = n_1 + \frac{m}{2}. \end{cases} \quad (3.23)$$

由 (2.22), (2.19) 和 (2.31) 式分别导出一阶分量为:

$$B_r^{(1)}(R) = \begin{cases} -\beta R^{1+\frac{m}{2}} \exp\left[-\frac{\delta}{n+1}\left(1-\frac{1}{R^{n+1}}\right)\right] \left[ p_0^{(1)} + \frac{\alpha_1 \delta}{2+n-n_1-\frac{m}{2}} \right. \\ \left. \times \left(1-R^{n_1-n-2+\frac{m}{2}}\right) \right], & n+2 \approx n_1 + \frac{m}{2}, \\ -\beta R^{1+\frac{m}{2}} \exp\left[-\frac{\delta}{n+1}\left(1-\frac{1}{R^{n+1}}\right)\right] [p_0^{(1)} + \alpha_1 \delta \ln R], \\ n+2 = n_1 + \frac{m}{2}. \end{cases} \quad (3.24)$$

$$B_\theta^{(1)}(R) = \frac{m-2}{2} R^{-m}, \quad (3.25)$$

$$B_\phi^{(1)}(R) = B_{\phi 0}^{(1)} R^{1-m}. \quad (3.26)$$

而由(2.32)式可以得到

$$B_\theta^{(2)}(R) = \frac{\beta}{3} \exp\left[-\frac{\delta}{n+1}\left(1-\frac{1}{R^{n+1}}\right)\right] \left\{ p_0^{(1)} R^{\frac{m}{2}} \left[ \left(3+\frac{m}{2}\right)R - \frac{\delta}{R^n} \right] \right. \\ \left. + \alpha_1 \delta \left[ R^{m+n_1-n-1} + \frac{R^{m/2}}{2+n-n_1-\frac{m}{2}} \left[ \left(3+\frac{m}{2}\right)R - \frac{\delta}{R^m} \right] \right] \right\} \\ \times \left(1-R^{n_1-n-2+\frac{m}{2}}\right) \Bigg], \quad n+2 \approx n_1 + \frac{m}{2}; \quad (3.27)$$

或者

$$B_\theta^{(2)}(R) = \frac{\beta}{3} \exp\left[-\frac{\delta}{n+1}\left(1-\frac{1}{R^{n+1}}\right)\right] \left\{ p_0^{(1)} R^{\frac{m}{2}} \left[ \left(3+\frac{m}{2}\right)R - \frac{\delta}{R^n} \right] \right. \\ \left. + \alpha_1 \delta \left[ R + \left[ \left(3+\frac{m}{2}\right)R - \frac{\delta}{R^n} \right] \ln R \right] R^{\frac{m}{2}} \right\}, \\ n+2 = n_1 + \frac{m}{2}. \quad (3.28)$$

进一步还可以求出其他的相应分量。

对于太阳表面的磁力线管,温度的增长速率与磁场的衰减速率相当,所以  $n > m/2$ . 同时,随高度增加时横向温度梯度应减少,即  $n_1 < 0$ , 上述表达式中的幂指数  $n+2 > n_1 + \frac{m}{2}$ . 所以,当  $R$  超过几个标高以后,由(3.23)和(3.24)式可渐近地得到:

$$p^{(1)}(R) \approx R^{-\frac{(m-2)}{2}} \exp\left(-\frac{\delta}{n+1}\right) \left[ p_0^{(1)} + \frac{\alpha_1 \delta}{2+n-n_1-\frac{m}{2}} \right], \quad (3.29)$$

$$B_r^{(1)}(R) \approx -\beta R^{1+\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{\delta}{n+1}\right) \left[ p_0^{(1)} + \frac{\alpha_1 \delta}{2+n-n_1-\frac{m}{2}} \right]. \quad (3.30)$$

上面的关系式表明,对于象太阳磁通量管中的那种热力学参数的横向不均匀性,  $p_0^{(1)} > 0$ ,  $\alpha_1 > 0$ ,  $B_r^{(1)}$  在几个标高以后是很大的负值量. 因此,温度的不均匀性使这种模型中磁场显著地地放大。

作为一个简单情况, 如果温度不均匀性是一维的, 即所有  $\alpha_i = 0$ , 则可求出解为:

$$p = \exp\left[-\frac{\delta}{n+1}\left(1 - \frac{1}{R^{n+1}}\right)\right] \left\{ 1 + p_0^{(1)} R^{1-\frac{m}{2}} \theta + R^{2-m} \left[ p_0^{(2)} + \frac{2(m-1)}{\beta} B_{\varphi 0}^{(1)2} e^{\frac{\delta}{n+1}} \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_1^R \exp\left(-\frac{\delta}{n+1} \frac{1}{R^{n+1}}\right) dR \right] \theta^2 + \dots \right\}, \quad (3.31)$$

$$B_r = R^{-m} - \beta p_0^{(1)} R^{1+\frac{m}{2}} \exp\left[-\frac{\delta}{n+1}\left(1 - \frac{1}{R^{n+1}}\right)\right] \theta + \left\{ -\frac{(m-2)(m-1)}{4} \right. \\ \left. - \frac{\beta^2}{2} R^{2+2m} \exp\left[-\frac{2\delta}{n+1}\left(1 - \frac{1}{R^{n+1}}\right)\right] p_0^{(1)2} + B_{\varphi 0}^{(1)2} R^{2-m} \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2} R^2 \exp\left[-\frac{2\delta}{n+1}\left(1 - \frac{1}{R^{n+1}}\right)\right] \left[ p_0^{(1)} + \frac{2(m-2)}{\beta} B_{\varphi 0}^{(1)2} e^{\frac{\delta}{n+1}} \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_1^R \exp\left(-\frac{\delta}{n+1} \frac{1}{R^{n+1}}\right) dR \right] \right\} \theta^2 + \dots, \quad (3.32)$$

$$B_\theta = \frac{m-2}{2} R^{-m} \theta + \frac{\beta}{3} p_0^{(1)} \exp\left[-\frac{\delta}{n+1}\left(1 - \frac{1}{R^{n+1}}\right)\right] R^{\frac{m}{2}} \\ \times \left[ \left(3 + \frac{m}{2}\right) R - \frac{\delta}{R^n} \right] \theta^2 + \dots, \quad (3.33)$$

$$B_\varphi = B_{\varphi 0}^{(1)} R^{1-m} \theta + R^{2-3m/2} \left\{ B_{\varphi 0}^{(2)} - \frac{2}{3} \beta p_0^{(1)} B_{\varphi 0}^{(1)} \int_1^R \exp\left[-\frac{\delta}{n+1}\left(1 - \frac{1}{R^{n+1}}\right)\right] \right. \\ \left. \times \left( 2m - \frac{\delta}{R^{n+1}} \right) \frac{dR}{R^{1-2m}} \right\} \theta^2 + \dots. \quad (3.34)$$

如果进口截面的初始压力均匀 ( $p_i^{(0)} = 0$ ), 而且没有磁力线的扭转 ( $B_{\varphi 0}^{(2)} = 0$ ), 可得到很简单的基本磁场位形为:

$$\begin{cases} p = \exp\left[-\frac{\delta}{n+1}\left(1 - \frac{1}{R^{n+1}}\right)\right] [1 + O(\theta^3)], \\ B_r = R^{-m} - \frac{(m-2)(m-1)}{4} \theta^2 + O(\theta^3), \\ B_\theta = \frac{m-2}{2} R^{-m} \theta + O(\theta^3), \quad B_\varphi = O(\theta^3). \end{cases} \quad (3.35)$$

这是无扭转的磁力线管, 是一种最简单的位形, 相应的磁能密度较低。

这样, 我们就求出了轴对称的细长磁力线管的位形, 以及其中的热力学参数. 利用这种展开解, 讨论了太阳大气中磁场位形的特征, 以及温度分布的不均匀性对增加磁场强度的影响. 只要  $\theta$  角度很小, 这种方法就是有效的, 而解的形式都不复杂. 当  $\theta$  角不很小时, 可以对局部的  $\theta_0$  展开, 讨论  $\theta = \theta_0$  附近区域内解的特征. 分别讨论不同的特征区域, 最后就描述出整个磁力线管的完整图象.

### 参 考 文 献

- [1] Parker, E. N., *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 15 (1977), 45.  
[2] 胡文瑞, 中国科学, 1977, 69.

- [ 3 ] Low, B. C., *Astrophys. J.*, 197(1975), 251.  
[ 4 ] Lüst, R., Schlüter, A., *Zs. Astrophys.*, 34(1954), 303.  
[ 5 ] Parker, E. N., *Astrophys. J.*, 191(1974), 245.  
[ 6 ] ———, *Astrophys. Space Sci.*, 44(1976), 107  
[ 7 ] Wilson, P. R., *Astrophys. J.*, 214(1977), 611.  
[ 8 ] Low, B. C., *Solar Phys.*, 65(1980), 147.  
[ 9 ] Comfort, R. H., et al., *Astrophys. J.*, 231(1979), 927.

www.cnki.net