断裂力学中权函数的推广和计算

王 克 仁
（中国科学院力学研究所）

提要 本文对于裂纹体应力和位移的 Williams 展开式的各项系数定义了权函数．这是 Bueckner 对于应力强度因子定义的权函数[1]的一个推广．本文证明了这样定义的权函数的一系列性质，并指出了计算权函数的方法．

一、引 言

Bueckner[1] 在 1970 年首先提出了计算应力强度因子的权函数的概念．对于任意二维裂纹体，可将其外边界 s 分为 s_σ 和 s_U 两部分．在 s_σ 上指定载荷 P_i（本文中下标 i、j 取值 1、2、3 代表 x、y、z 三个方向，而且重复的指标代表求和），在 s_U 上指定位移 u_i^s．裂纹面上不受力，不包括在 s 内，裂纹体还可以有体力的作用．这时裂纹体的应力强度因子 K_α 可以表示为

$$K_\alpha = \int_{s_\sigma} P_i W_i^{(\alpha)} ds + \int_V f_i W_i^{(\alpha)} dV \tag{1.1}$$

这里 α = I、II、III，分别代表张开型、滑开型和撕开型三种加载方式．$W_i^{(\alpha)}$ 即为 Bueckner 定义的权函数，它仅与裂纹体几何形状和指定的边界位移有关．

从权函数的定义可以看出，通过它可以很方便地计算在任意载荷作用下的应力强度因子．Paris 等[2]用有限元法计算了若干矩形裂纹体的权函数，力学所张晓堤[3]也用有限元法作了计算，方法与 Paris 等的稍有不同，结果大体相似，由此计算的应力强度因子误差在 5% 以内．

应力强度因子 K_α 实际上是裂纹体应力和位移的 Williams 展开式第一项的系数．在断裂力学试验或对断裂准则的研究中，有时对 Williams 展开式的其它各项也感兴趣．本文对于 Williams 展开式任意项的系数定义了权函数．这些权函数都可以用 Williams 展开式加以表示．我们导得了其系数之间的一系列关系式．通过这些关系式可以得到计算权函数的一般方法．

二、二维裂纹体的特征状态

采用图 1 所示的坐标系．z 轴与图面相垂直，裂纹面在 xz 面内，z 轴即为裂纹前缘．如果裂纹体内的应力和位移均仅为 x、y 的函数，与 z 无关，则我们称之为二维裂纹体．

命 x、y 和 z 方向的位移为 u、v 和 w，并引入复变量 $t = x + iy$（这里 i 为虚数 $\sqrt{-1}$），则二维裂纹体的应力和位移可以表示为

本文于 1980 年 4 月收到．

$$
\begin{aligned}
\sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'(t) + \overline{\varphi'(t)}] \\
\sigma_\theta - \sigma_r - 2\tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x - 2\tau_{xy})e^{-2i\theta} = 2[t\overline{\varphi''(t)} + \overline{\psi''(t)}] \\
\tau_{rz} + i\tau_{\theta z} &= (\tau_{xz} + i\tau_{yz})e^{-i\theta} = 2\overline{\omega'(t)}e^{i\theta} \\
\sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\
2\mu(u_r + iu_\theta) &= 2\mu(u_x + iu_y)e^{-i\theta} = [K\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi'(t)}]e^{-i\theta} \\
\mu u_z &= \omega(t) + \overline{\omega'(t)}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

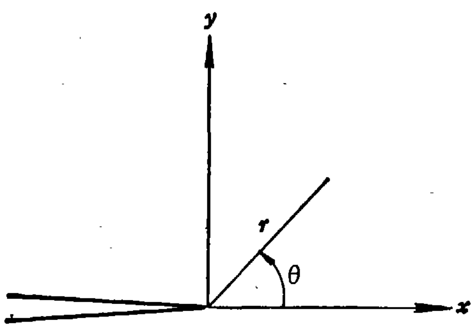

图 1

其中 ν 为泊松比，$K = 3 - 4\nu$，μ 为剪切模量．$\varphi(t)$、$\psi(t)$ 和 $\omega(t)$ 是在裂纹面和外边界围成的区域内定义的解析函数[4]．(2.1)式定义的应力和位移已满足弹性力学中的平衡方程、应力应变关系和协调条件．如果再令其满足裂纹面上不受力的条件，则可以得到二维裂纹体的特征状态．

根据解析函数的理论[5]，如果裂纹面上无奇点的话，$\varphi(t)$、$\psi(t)$ 和 $\omega(t)$ 均可沿着裂纹面进行解析延拓，从而成为在多叶的黎曼平面上定义的解析函数（多值函数），裂纹顶端是分歧点．为了求得分歧点的阶数，我们要考虑裂纹面上的条件．裂纹面上不受力的条件可以写成

$$
\left.
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{y\to 0+\\ y\to 0-}} [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi'(t)}] = 0 \\
&\lim_{\substack{y\to 0+\\ y\to 0-}} [\omega'(t) - \overline{\omega'(t)}] = 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.2}
$$

上式可以改写为

$$
\left.
\begin{aligned}
\lim_{y\to 0+} \varphi(t) &= \lim_{y\to 0-} [-t\bar{\varphi}'(t) - \bar{\psi}'(t)] \\
\lim_{y\to 0-} \varphi(t) &= \lim_{y\to 0+} [-t\bar{\varphi}'(t) - \bar{\psi}'(t)]
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.3a}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\lim_{y\to 0+} \omega'(t) &= \lim_{y\to 0-} \bar{\omega}'(t) \\
\lim_{y\to 0-} \omega'(t) &= \lim_{y\to 0+} \bar{\omega}'(t)
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.3b}
$$

这里 $\bar{f}(t) = \overline{f(\bar{t})}$．如果 $f(t)$ 是解析函数，则 $\bar{f}(t)$ 也是解析函数．命

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi^*(t) &= -t\bar{\varphi}'(t) - \bar{\psi}'(t) \\
\omega^{*\prime}(t) &= \bar{\omega}'(t)
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.4}
$$

它们都是解析函数，而且由(2.3)式可知，在裂纹面上有

$$
\left.
\begin{aligned}
\lim_{y\to 0+} \varphi(t) &= \lim_{y\to 0-} \varphi^*(t) \\
\lim_{y\to 0-} \varphi(t) &= \lim_{y\to 0+} \varphi^*(t) \\
\lim_{y\to 0+} \omega'(t) &= \lim_{y\to 0-} \omega^{*\prime}(t) \\
\lim_{y\to 0-} \omega'(t) &= \lim_{y\to 0+} \omega^{*\prime}(t)
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.5}
$$

也就是说，$\varphi(t)$ 和 $\omega'(t)$ 沿上下裂纹面延拓出来的函数均为 $\varphi^*(t)$ 和 $\omega^{*\prime}(t)$，而且是唯一的．由此可知，$\varphi(t)$、$\psi(t)$ 和 $\omega(t)$ 是定义在双叶黎曼平面上的解析函数，它们在第二叶上的值分别记作 $\varphi^*(t)$、$\psi^*(t)$ 和 $\omega^*(t)$．命

$$\zeta = t^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

式内可选 $t^{\frac{1}{2}}$ 中的任意一支，则不难证明，相应的函数 $\varphi(\zeta)$、$\psi(\zeta)$ 和 $\omega(\zeta)$ 即为单叶的黎曼平面上的解析函数．它们可以展成 ζ 的幂级数

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n \\ \psi(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^{n+2} \\ \omega(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \zeta^n \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

这里 n 不取负值，因为不然的话，应变能要达到无限大．用(2.6)式代入，即得

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^{\frac{n}{2}} \\ \psi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^{\frac{n}{2}+1} \\ \omega(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{\frac{n}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

容易证明，它们在另一叶黎曼平面上的值为

$$\left.\begin{aligned} \varphi^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^n t^{\frac{n}{2}} \\ \psi^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n (-1)^n t^{\frac{n}{2}+1} \\ \omega^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (-1)^n t^{\frac{n}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

(2.8) 式和 (2.9) 式代入 (2.4) 式，即得

$$\left.\begin{aligned} B_n &= -\frac{1}{1+\frac{n}{2}}\left[\frac{n}{2} A_n + (-1)^n \bar{A}_n\right] \\ C_n &= \frac{1}{2}\{[1+(-1)^n] - i[1-(-1)^n]\}E_n \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

这里 E_n 为实常数．

若令 $A_n = 1$，其它系数均为零，则得到张开型 (I 型)的特征函数

$$\varphi_n^{\mathrm{I}}(t) = t^{\frac{n}{2}} \qquad \psi_n^{\mathrm{I}}(t) = -\frac{\frac{n}{2}+(-1)^n}{1+\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}+1} \qquad \omega_n^{\mathrm{I}}(t) = 0 \tag{2.11a}$$

相应的应力和位移记作 $(\sigma_r)^c_n\cdots(u_r)^c_n\cdots$ 等.

若令 $A_n=-i$, 其它系数均为零,则得到滑开型(II 型)的特征函数

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{\mathrm{II}}_n(t)&=-it^{\frac{n}{2}}\\ \phi^{\mathrm{II}}_n(t)&=-\frac{\frac{n}{2}-(-1)^n}{1+\frac{n}{2}}it^{\frac{n}{2}+1}\\ \omega^{\mathrm{II}}_n(t)&=0\end{aligned}\right\}\tag{2.11b}$$

相应的应力和位移记作 $(\sigma_r)^s_n\cdots(u_r)^s_n\cdots$等.

若令 $E_n=1$, 其它系数均为零,则得到撕开型 (III 型)的特征函数

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{\mathrm{III}}_n(t)&=\phi^{\mathrm{III}}_n(t)=0\\ \omega^{\mathrm{III}}_n(t)&=\frac{1}{2}\{[1+(-1)^n]-i[1-(-1)^n]\}t^{\frac{n}{2}}\end{aligned}\right\}\tag{2.11c}$$

相应的应力和位移记作 $(\sigma_r)^t_n\cdots(u_r)^t_n\cdots$ 等.

不难看出,当 n 取负值时,特征状态的位移要为无限大,裂纹体的应变能也为无限大,因而并非裂纹体可能的应力状态. 当 $n=0$ 时应力为零,位移代表裂纹体的刚体平动.

Bueckner 在相当普遍的条件下证明[6],在任意边界条件下(在 s_σ 上指定载荷P_i, 在 s_U 上指定位移 u°_i, 在裂纹面上不受力),裂纹体内的应力位移(用 A 来代表)可以唯一地表示为

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(A)^c_n+D_n(A)^s_n+E_n(A)^t_n\tag{2.12}$$

式内 C_n、D_n 和 E_n 为实系数. 这就是著名的 Williams 展开式. 系数 C_1、D_1 和 E_1 与通常定义的应力强度因子 K_{I}、K_{II} 和 K_{III} 有如下关系

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi}}\\ D_1&=\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi}}\\ E_1&=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

在 (2.12) 式内, $n=0$ 的系数取决于边界上指定的位移. 如果全部边界均指定载荷, 则 C_0、D_0 和 E_0 不确定, 可为任意值. 不难看出, D_2 是不确定的,这一项代表裂纹体的刚体转动.

三、 A_{mn} 的定义及性质

在下面的讨论中常常要遇到如下形式的积分(记作 A_{mn})

$$A_{mn}=\int_s(\sigma_{ij})_m(u_i)_n n_j ds\tag{3.1}$$

这里 n_j 是边界 s 上的单位外法线向量. $(\sigma_{ij})_m$ 和 $(u_i)_n$ 的上标 c、s 或 t 没有标出, 可以取其任意一个,分别代表 I 型、II 型或 III 型.

若 m、n 为正整数时，$(\sigma_{ij})_m$、$(u_i)_m$、$(\sigma_{ij})_n$ 和 $(u_i)_n$ 均为裂纹体允许的应力和位移，从而可以应用功的互等定理，有

$$A_{mn}=A_{nm}\qquad(m>0,n>0)\tag{3.2}$$

定理　在 m、n 为整数的一般情况下有

$$A_{mn}-A_{nm}=\begin{cases}\delta_{m,-n}\dfrac{(-1)^m m(1+K)\pi}{\mu} & (\text{I、II 型})\\[2ex] \delta_{m,-n}\dfrac{4(-1)^m m\pi}{\mu} & (\text{III 型})\end{cases}\tag{3.3}$$

式内 δ_{mn} 是克罗内克符号：

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1 & \text{若 } m=n\\ 0 & \text{若 } m\neq n\end{cases}\tag{3.4}$$

证明　在裂纹体内挖去以裂纹顶端为中心，以 R 为半径的圆形部分(图 2)．在余下的环状区域内，不管 m 是正或负，$(\sigma_{ij})_m$ 和 $(u_i)_m$ 均为允许的应力位移状态．对此环状区域应用功的互等定理，得

$$A_{mn}+\int_{s_R}(\sigma_{ij})_m(u_i)_n n_j ds=A_{nm}+\int_{s_R}(\sigma_{ij})_n(u_i)_m n_j ds\tag{3.5}$$

这里 s_R 为环状区域的内边界，也即半径为 R 的圆(外法线指向圆心)．因此有

$$\int_{s_R}(\sigma_{ij})_m(u_i)_n n_j ds=-\int_{-\pi}^{\pi}[(\sigma_r)_m(u_r)_n+(\tau_{r\theta})_m(u_\theta)_n+(\tau_{rz})_m(u_z)_n]Rd\theta\tag{3.6}$$

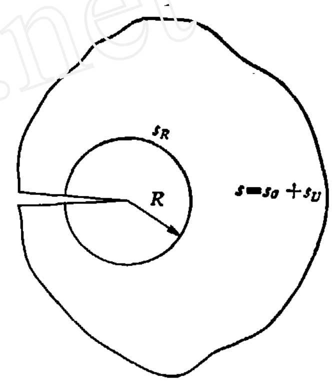

图 2

把 I 型、II 型和 III 型相应的特征函数代入(3.6)式，积分之，即得(3.3)式．

四、权函数的定义及性质

对于某一裂纹体，其外边界 s 分为指定载荷的边界 s_σ 和指定位移的边界 s_U 两部分．若在 s_σ 上的载荷为 P_i，在 s_U 上的位移为 u_i^s，则其内的应力和位移(用 A 代表)可以表示为

$$A=\sum_{l=0}^{\infty}C_l(A)_l\tag{4.1}$$

$(A)_l$ 为 I 型、II 型或 III 型的特征函数，上标可为 c、s 或 t，故未予标出．C_l [这里 C_l 可代表(2.12)式内的 C_l、D_l 或 E_l] 在 s_σ 和 s_U 上的权函数 $W^\sigma_{i(l)}$ 和 $W^U_{i(l)}$ 是这样定义的

$$C_l=\int_{s_\sigma}P_iW^\sigma_{i(l)}ds+\int_{s_U}u_i^sW^U_{i(l)}ds\tag{4.2}$$

下面我们来推导权函数的表达式．命

$$C^*_{-l}=\begin{cases}\dfrac{\mu(-1)^l}{l(1+K)\pi} & (\text{I、II 型})\\[2ex] \dfrac{\mu(-1)^l}{4\pi l} & (\text{III 型})\end{cases}\tag{4.3}$$

则(3.3)式可以改写成

$$A_{mn}-A_{nm}=\delta_{m,-n}\frac{1}{C^*_{-m}} \tag{4.4}$$

考虑一特殊的载荷情况

$$\left.\begin{aligned} P_i &= -P_i^{(1)} = -C^*_{-l}(\sigma_{ij})_{-l}n_j \quad &(\text{在 } s_\sigma \text{ 上}) \\ u_i^s &= -u_i^{(1)} = -C^*_{-l}(u_i)_{-l} \quad &(\text{在 } s_U \text{ 上}) \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

这时裂纹体内的应力和位移可以表示为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{-l,n}(\sigma_{ij})_n \\ u_i^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{-l,n}(u_i)_n \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

在 s_σ 上有

$$P_i^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)}n_j=0 \tag{4.7a}$$

在 s_U 上有

$$u_i^{(1)}+u_i^{(2)}=0 \tag{4.7b}$$

对于一般的应力状态(4.1)和特殊的应力状态(4.6)应用功的互等定理,得

$$\int_{s_\sigma} P_i u_i^{(2)} ds - \int_{s_U} \sigma_{ij} n_j u_i^{(1)} ds = -\int_{s_\sigma} P_i^{(1)} u_i ds + \int_{s_U} \sigma_{ij}^{(2)} n_j u_i^s ds \tag{4.8}$$

这样,我们有

$$\begin{aligned} &\int_{s_\sigma} P_i(u_i^{(1)}+u_i^{(2)})ds - \int_{s_U} u_i^s(P_i^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)}n_j)ds \\ &\quad = \int_{s_\sigma} P_i u_i^{(1)} ds + \int_{s_U} \sigma_{ij} n_j u_i^{(1)} ds - \int_{s_U} u_i^s P_i^{(1)} ds - \int_{s_\sigma} P_i^{(1)} u_i ds \end{aligned}$$

考虑到 $s=s_\sigma+s_U$, 从而得

$$\begin{aligned} &\int_{s_\sigma} P_i(u_i^{(1)}+u_i^{(2)})ds - \int_{s_U} u_i^s(P_i^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)}n_j)ds \\ &\quad = \int_s \left\{\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\sigma_{ij})_n n_j\right\} C^*_{-l}(u_i)_{-l} ds - \int_s C^*_{-l}(\sigma_{ij})_{-l}n_j \left\{\sum_{n=0}^{\infty} C_n(u_i)_n\right\} ds \\ &\quad = \sum_{n=0}^{\infty} C_n C^*_{-l}[A_{n,-l}-A_{-l,n}] \\ &\quad = \sum_{n=0}^{\infty} C_n C^*_{-l}\frac{\delta_{n,-l}}{C^*_{-n}} = C_l \end{aligned}$$

比较上式和(4.2)式,即得

$$\left.\begin{aligned} W^\sigma_{i(l)} &= u_i^{(1)}+u_i^{(2)} = C^*_{-l}(u_i)_{-l} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{-l,n}(u_i)_n \\ W^U_{i(l)} &= -P_i^{(1)}-\sigma_{ij}^{(2)}n_j = -C^*_{-l}(\sigma_{ij})_{-l}n_j - \sum_{n=1}^{\infty} C_{-l,n}(\sigma_{ij})_n n_j \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

这就是权函数的 Williams 展开式.

下面讨论权函数的一些性质.

第一，根据 (4.9) 式，权函数可以用特征函数加以展开，从而满足无体力的平衡条件、协调条件和应力应变关系 ($W^e_{i(l)}$ 相应于位移，$W^U_{i(l)}$ 相应于内力)．在裂纹面上和载荷边界上，$W^U_{i(l)}$ 为零；在位移边界上 $W^e_{i(l)}$ 为零．根据我们的推导过程，展开式(4.9)式是唯一的．

第二，如果在边界上给定一些特定的载荷，可以导得关于权函数的一些关系式．首先定义下面形式的积分

$$B_{mn}=\int_{s_\sigma}(\sigma_{ij})_m(u_i)_n n_j ds-\int_{s_U}(\sigma_{ij})_n(u_i)_m n_j ds \tag{4.10}$$

不难证明

$$B_{mn}-B_{nm}=A_{mn}-A_{nm}=\frac{\delta_{m,-n}}{C^*_{-m}} \tag{4.11}$$

1. 若在 s_σ 上给定载荷 $P_i=(\sigma_{ij})_k n_j$，在 s_U 上给定位移 $u_i^s=(u_i)_k$，$k>0$，则其解显然即为 $(\sigma_{ij})_k$ 和 $(u_i)_k$．换言之，

$$\sigma_{ij}=\sum_{l=1}^{\infty}\delta_{lk}(\sigma_{ij})_l$$

$$u_i=\sum_{l=0}^{\infty}\delta_{lk}(u_i)_l$$

应用 (4.2) 式和 (4.9) 式，即得

$$\delta_{lk}=C^*_{-l}B_{k,-l}+\sum_{n=0}^{\infty}C_{-l,n}B_{kn} \tag{4.12}$$

由(4.11)式

$$B_{k,-l}=B_{-l,k}+\frac{\delta_{kl}}{C^*_{-k}} \tag{4.13}$$

(4.13) 式代入 (4.12) 式，得

$$-C^*_{-l}B_{-l,k}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{-l,n}B_{kn} \tag{4.14}$$

这是我们推导的第一个关系式．

2. 若在 s_σ 上给定载荷 $P_i=-C^*_{-k}(\sigma_{ij})_{-k}$，在 s_U 上给定位移 $u_i^s=-C^*_{-k}(u_i)_{-k}$，则由第四节的讨论，其位移的展开式为

$$u_i=\sum_{l=0}^{\infty}C_{-k,l}(u_i)_l$$

应用 (4.2) 式和 (4.9) 式，得

$$C_{-k,l}=-C^*_{-k}C^*_{-l}B_{-k,-l}-C^*_{-k}\sum_{n=0}^{\infty}C_{-l,n}B_{-k,n} \tag{4.15}$$

这是我们推导的第二个关系式．

3. 由 (4.14) 式，

$$-C^*_{-k}B_{-k,n}=\sum_{m=0}^{\infty}C_{-k,m}B_{nm}$$

代入 (4.15) 式，得

$$C_{-k,l}=-C^*_{-k}C^*_{-l}B_{-k,-l}-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{-l,n}C_{-k,m}B_{nm} \tag{4.16}$$

由于 $B_{nm}=B_{mn}$，从而

$$C_{-k,l}=C_{-l,k} \tag{4.17}$$

这是我们推导的第三个关系式.

4. 应用(4.17)式，可以把(4.15)式改写成

$$C_{-l,k}=-C^*_{-k}C^*_{-l}B_{-k,-l}-C^*_{-k}\sum_{n=0}^{\infty}C_{-l,n}B_{-k,n} \tag{4.18}$$

(4.14)式和(4.18)式均可以用来直接计算 $C_{-l,n}$，从而确定权函数. 对于一些结构的权函数的计算结果，将在另文发表.

五、应力和位移对裂纹长度的导数

Rice[7] 指出，在任意载荷下裂纹体内的位移对裂纹长度的一次导数可以用来确定权函数. 下面把这个结果加以推广.

假定在 s_σ 上给定载荷 P_i，在 s_U 上给定位移 u_i^s，这时裂纹体内的应力和位移可以表示为

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(A)_n \tag{5.1}$$

设裂纹的长度为 a，采用图 1 所示的坐标，则有

$$\frac{\partial A}{\partial a}=-\frac{\partial A}{\partial x} \tag{5.2}$$

因为 $(A)_n$ 满足裂纹体内的平衡条件、协调条件、应力应变关系和裂纹面上不受力的条件，因此 $\frac{\partial}{\partial a}(A)_n$ 也同样满足这些条件，从而可以表示为 $(A)_m$ 的线性组合. 为了确定这个线性组合的系数，只要考虑应力和位移的任意一个分量就可以了. 经过计算容易证明，对于三种加载形式均有

$$\frac{\partial}{\partial a}(A)_{n+2}=-\left(1+\frac{n}{2}\right)(A)_n \tag{5.3}$$

由(5.1)式

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial a}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial C_n}{\partial a}(A)_n+\sum_{n=0}^{\infty}C_n\frac{\partial (A)_n}{\partial a}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial C_n}{\partial a}(A)_n-\sum_{n=-1}^{\infty}C_{n+2}\left(1+\frac{n}{2}\right)(A)_n=\sum_{n=-1}^{\infty}C'_n(A)_n\end{aligned} \tag{5.4}$$

从而有

$$C'_n=\frac{\partial C_n}{\partial a}-\left(1+\frac{n}{2}\right)C_{n+2} \tag{5.5}$$

式内当 $n<0$ 时有 $C_n=0$.

在一般情况下，我们有

$$\frac{\partial^k A}{\partial a^k}=\sum_{n=-(2k-1)}^{\infty}C_n^{(k)}(A)_n \tag{5.6}$$

$$C_n^{(k)}=\frac{\partial C_n^{(k-1)}}{\partial a}-\left(1+\frac{n}{2}\right)C_{n+2}^{(k-1)} \tag{5.7}$$

式内当 $n\leqslant-(2k-1)$ 时有 $C_n^{(k-1)}=0$。

由此可见

$$C_{-(2k-1)}^{(k)}=\left(k-\frac{3}{2}\right)C_{-(2k-3)}^{(k-1)} \tag{5.8}$$

从而

$$C_{-(2k-1)}^{(k)}=C_1\prod_{l=1}^{k}\left(l-\frac{3}{2}\right) \tag{5.9}$$

用归纳法可以证明

$$C_{-2l}^{(k)}=0 \qquad (l>0) \tag{5.10}$$

由(5.9)式和(4.9)式可以得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^k u_i}{\partial a^k}&=\frac{C_1\prod\limits_{l=1}^{k}\left(l-\frac{3}{2}\right)}{C_{-k}^*}W_{i(2k-1)}^{\sigma}+\sum_{l=1}^{k-1}D_lW_{i(2l-1)}^{\sigma}\\ \frac{\partial^k\sigma_{ij}}{\partial a^k}n_j&=-\frac{C_1\prod\limits_{l=1}^{k}\left(l-\frac{3}{2}\right)}{C_{-k}^*}W_{i(2k-1)}^{U}-\sum_{l=1}^{k-1}D_lW_{i(2k-1)}^{U}\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

这里 D_l 为一系列常数．根据(5.11)式，我们可以由位移和应力对于裂纹长度的导数得到 Williams 展开式奇次项系数的权函数．

对于一次导数，$k=1$，(5.11)式简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial a}&=-\frac{1}{2C_{-1}^*}(C_1W_{\mathrm{I}i}^{\sigma}+D_1W_{\mathrm{II}i}^{\sigma}+E_1W_{\mathrm{III}i}^{\sigma})\\ \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial a}n_j&=\frac{1}{2C_{-1}^*}(C_1W_{\mathrm{I}i}^{U}+D_1W_{\mathrm{II}i}^{U}+E_1W_{\mathrm{III}i}^{U})\end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

这里 C_1、D_1 和 E_1 分别为 u_i 或 σ_{ij} 的 I、II 和 III 型 Williams 展开式第一项的系数，它们与应力强度因子 K_{I}、K_{II} 和 K_{II} 的关系如(2.13)式所示．$W_{\mathrm{I}i}^{\sigma}$、$W_{\mathrm{I}i}^{U}$、$W_{\mathrm{II}i}^{\sigma}$、$W_{\mathrm{II}i}^{U}$、$W_{\mathrm{III}i}^{\sigma}$ 和 $W_{\mathrm{III}i}^{U}$ 则分别为三种载荷形式下 Williams 展开式第一项系数的权函数．

六、体力和裂纹面上的力

在上面的讨论中，我们均未考虑体力和裂纹面上受力的情况．由于特征状态是无体力和裂纹面上不受力的，因此在有体力和裂纹面上受力的情况下，解的一部分是不能用特征函数展开的．其应力和位移可以表为

$$A=A_s+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(A)_n \tag{6.1}$$

A_s 满足有体力的平衡条件以及裂纹面上的边界条件． Bueckner 证明[6]，如果裂纹面上的应力可以展成如下幂级数：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_nx^n$，则可以找到这样的 A_s，使其应力和位移均为有限，在裂纹顶端附近为 $(A)_1$ 的高阶小量．这样，对于图 2 所示的环状区域，若使内径 R 充分

小，则有 s_R 上的应力和位移可以分别认为是 $C_1(\sigma_{ij})_1$ 和 $C_1(u_i)_1$. 另外我们考虑环状区域内的如下应力和位移

$$C^*_{-1}(\sigma_{ij})_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1,n}(\sigma_{ij})_n = -W^U_{i(-1)}$$

$$C^*_{-1}(u_i)_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1,n}(u_i)_n = W^{\sigma}_{i(-1)}$$

对于上述两个应力状态应用功的互等定理，得

$$\begin{aligned}\int_{s_\sigma} P_i W^{\sigma}_{i(-1)} ds &+ \int_{s_C} P_i W^{\sigma}_{i(-1)} ds + \int_{V-V_R} f_i W^{\sigma}_{i(-1)} dV \\ &+ C_1 \int_{s_R} (\sigma_{ij})_1 n_j \left[C^*_{-1}(u_i)_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1,n}(u_i)_n\right] ds \\ &= -\int_{s_U} u_i^t W^U_{i(-1)} ds + C_1 \int_{s_R} (u_i)_1 \left[C^*_{-1}(\sigma_{ij})_{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-1,n}(\sigma_{ij})_n\right] n_j ds\end{aligned}$$

这里 s_C 是裂纹面. 当 $R \to 0$ 时，即得

$$C_1 = \int_{s_\sigma} P_i W^{\sigma}_{i(-1)} ds + \int_{s_U} u_i^t W^U_{i(-1)} ds + \int_{s_C} P_i W^{\sigma}_{i(-1)} ds + \int_V f_i W^{\sigma}_{i(-1)} ds \qquad (6.2)$$

很显然，当有 A_i 存在的话，展开式(6.1)内除了 C_1 外的其它系数均不是唯一确定的，从而不能采用本文提出的权函数.

参 考 文 献

[1] Bueckner, H. F., Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 46(1970), 529—545.

[2] Paris, P. C., McMeeking, R. M and Tada, H., «Crack and Fracture, ASTM STP601» (1976), 471—489.

[3] 张晓堤，«力学学报特刊»1981.

[4] Мусхелишвили, Н. И., «Некоторые основные задачи математической теории упругости», Изд. Академии Наук СССР (1949).

[5] Привалов, И. И., «Введение в теорию функции комплексного переменого» ГИТТЛ (1954),

[6] Bueckner, H. F., «Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems» ed. G. C. Sih. Noordhoff (1973), Ch. 5.

[7] Rice, James, R., *Int. J. Solids Structures*, 8 (1972), 751—758.

THE WEIGHTING FUNCTIONS IN FRACTURE MECHANICS, THEIR GENERALIZATION AND CALCULATIONS

Wang Keren.

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

Bueckner's weighting functions are discussed in a systematic way and generalized. A weighting function is defined for every coefficient in William's expansions of stress funtions at the crack tip and it is also expanded into eigenfunction. Some relations between the coefficients of that expansion are derived and can be used to calculate weighting functions for specific configurations.