

# 稀薄气流在麦克斯韦类型边界条件下对球的绕流

沈 青

(中国科学院力学研究所)

**提要:** 本文讨论低速稀薄气流 ( $K_n \ll 1$ ) 中圆球阻力问题。在 Knudsen 层中取分子在表面作 Maxwell 类型反射的壁面条件求解线性 B-K-W 方程, 而以 Stokes 区的匹配渐近展开解为无穷远处的边界条件。在表面与均匀来流间温差为小量的假设下得到了小  $K_n$  数下圆球绕流的解。除稀薄气体效应外, 还考虑了惯性效应和分子在表面的反射机制, 所得的球阻表达为  $K_n$ 、 $Re$  和热适应系数  $\alpha$  的函数。

## 一、引 言

对于与污染问题密切相关的气溶胶性态的研究, 要求准确知道大气中悬浮的气溶胶粒子的阻力, 这引起稀薄气体动力学对低速流动问题兴趣的增长。已有许多工作从线性 Boltzmann-Krook-Welander 方程<sup>[1,2]</sup> (以下简称 B-K-W 方程) 出发, 研究了各种边界条件下弱稀薄气体 ( $K_n \ll 1$ ) 对物体(主要是球)的绕流<sup>[3-11]</sup>,  $K_n = \lambda_\infty/2a$ ,  $\lambda_\infty$  为平均自由程,  $a$  为球半径。所得阻力表达式揭示了由  $K_n$  和适应系数  $\alpha$  表达的对 Stokes 公式<sup>[12]</sup> 的修正。另一方面, 当  $Re$  为小量但有限时从流体力学观点用匹配渐近展开法对 Stokes 公式作了考虑惯性效应的修正<sup>[13-16]</sup>。文献[17]则从线性 B-K-W 方程出发求解 Knudsen 层中的流动, 在层外与匹配渐近展开解衔接, 从而同时考虑了稀薄和惯性效应, 在壁面取完全漫反射条件。为了在稀薄和惯性效应同时重要情况下考虑分子反射模型的影响, 本文将文献[17]的结果推广到较一般的 Maxwell 类型边界条件, 即分子在壁面有  $\alpha$  部分作漫反射, 其余部分作镜面反射, 将圆球的阻力求得为由  $Re$ 、 $K_n$  和  $\alpha$  表达的对 Stokes 公式的修正。

## 二、基本方程和边界条件

在 Knudsen 层中, 从 B-K-W 方程出发求解

$$v_{m_1} \partial f / \partial x_1 + v_{m_2} \partial f / \partial x_2 + v_{m_3} \partial f / \partial x_3 = \nu N (f_e - f) \quad (1)$$

其中  $f$  为速度分布函数,  $v_{m_i}$  为分子速度,  $N$  为分子数密度,  $\nu$  为修正碰撞频率取  $\nu = (\sqrt{\pi}/1.996) C_{m\infty}/N_\infty \lambda_\infty$ ,  $C_m = \sqrt{2RT}$ ,  $T$  为温度,  $R$  为气体常数, 下标  $\infty$  代表来流值,  $f_e$  为平衡 Maxwell 分布

$$f_e = [N/(\sqrt{\pi} C_{m\infty})^3] \exp[-(\mathbf{v}_m - \mathbf{U})^2/C_m^2] \quad (2)$$

其中  $\mathbf{U}$  为流速。在球面上取 Maxwell 类型边界条件, 同时满足分子在表面无聚集和吸收

本文于 1980 年 7 月收到。

的条件: 对于

$$v_{m_r} > 0, f(v_{m_\theta}, v_{m_r})|_{r=a} = (1 - \alpha)f(v_{m_\theta}, -v_{m_r}) + \alpha[N_w/(\sqrt{\pi} C_{m_w})^3] \exp(-v_m^2/C_{m_w}^2) \quad (3)$$

$$\text{当 } r = a \text{ 时, } \int v_{m_r} f d\mathbf{v}_m = 0 \quad (4)$$

这里  $v_{m_r}, v_{m_\theta}$  为  $\mathbf{v}_m$  在球坐标  $r, \theta$  方向上的分量.

在流速缓慢情况下流动与定常平衡态偏离为小量, 我们引入扰动分布函数  $\phi$

$$f = (N_w/C_{m_w}^3) F_0(1 + \phi) \quad (5)$$

其中  $F_0 = \pi^{-\frac{3}{2}} \exp(-\xi^2)$ ,  $\xi_i = v_{m_i}/C_{m_w}$ . 在方程中转换至对  $a$  无量纲化的球坐标  $r, \theta, \varphi$ , 再从  $r$  变量转换为 Knudsen 变量  $\eta$

$$r = 1 + K\eta \quad (6)$$

其中  $K = (4/\sqrt{\pi}) K_n = (4/\sqrt{\pi})(\lambda_\infty/2a)$ . 将 (5) 式代入 (1), (3), (4), 对小量作幂级数展开而仅保留低阶项, 得到线化的 B-K-W 方程和 Maxwell 类型边界条件:

$$\begin{aligned} \xi_r \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \phi + \frac{K}{1 + K\eta} \left[ -\sqrt{1 - \beta^2} \xi_\theta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + (\xi_\theta^2 + \xi_\varphi^2) \frac{\partial \phi}{\partial \xi_r} \right. \\ \left. + \left( \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \xi_\varphi^2 - \xi_r \xi_\theta \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi_\theta} - \left( \xi_r \xi_\varphi + \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \xi_\theta \xi_\varphi \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi_\varphi} \right] \\ = 2(\xi_r u_r + \xi_\theta u_\theta) + n + \left( \xi^2 - \frac{3}{2} \right) \tau \end{aligned} \quad (7)$$

对于

$$\xi_r > 0, \phi(\xi_\theta, \xi_r)|_{\eta=0} = (1 - \alpha)\phi(\xi_\theta, -\xi_r)|_{\eta=0} + \alpha[n_w + (\xi^2 - 3/2)\tau_w] \quad (8)$$

$$u|_{\eta=0} = \int \xi_r \phi F_0 d\xi = 0 \quad (9)$$

其中  $\beta = \cos\theta$ ,  $n, \tau$  为  $N, T$  对  $N_\infty, T_\infty$  的偏离:  $N = N_\infty(1 + n)$ ,  $T = T_\infty(1 + \tau)$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{U}/C_{m_w}$ .  $n, \tau, \mathbf{u}$  及压力扰动  $p$  由下式给出:

$$n = \int \phi F_0 d\xi \quad (10)$$

$$(1 + n)\mathbf{u} = \int \xi \phi F_0 d\xi \quad (11)$$

$$(3/2)(n + \tau) + u^2 = \int \xi^2 \phi F_0 d\xi \quad (12)$$

$$p = n + \tau \quad (13)$$

在 Knudsen 层中, 即当  $0 < \eta \leq O(1)$ , 或  $0 < r - 1 \leq O(K)$  时, 我们在  $K$  为小量的假设下求解线化 B-K-W 方程 (7), 在球面  $\eta = 0$  处满足边界条件 (8), (9). 当  $\eta \rightarrow \infty$  时, 令解渐近趋于 Stokes 区域 ( $O(K) \leq r - 1 < O(\text{Re}^{-1})$ ) 中的解.

### 三、Stokes 区域的解

在 Knudsen 区域外, 即当  $r - 1 \geq O(K)$  时, 气流满足流体力学基本方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (14)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -(1/\rho)\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad (15)$$

以上方程可以作为 B-K-W 方程的输运方程而得到。如所周知<sup>[16]</sup>, 引入流函数  $\phi$

$$u_r = (S/r^2 \sin^2 \theta)\partial\phi/\partial\theta, \quad u_\theta = -(S/r \sin^2 \theta)\partial\phi/\partial r \quad (16)$$

则 (14) 自动满足, 而 (15) 可以写为

$$\begin{aligned} \delta^4\phi = & (\text{Re}/2r^2 \sin^2 \theta)[(\partial\phi/\partial\theta)\partial/\partial r - (\partial\phi/\partial r)\partial/\partial\theta \\ & + 2(\partial\phi/\partial r)\cot\theta - 2(\partial\phi/\partial\theta)]\delta^2\phi \end{aligned} \quad (17)$$

而

$$\delta^2 = \partial^2/\partial r^2 + (\sin\theta/r^2)(\partial/\partial\theta)(\partial/\sin\theta\partial\theta) \quad (18)$$

这里  $S = U/C_{\infty}$  为速度比, 由于  $K_n \sim S/\text{Re}$ , 故当  $K_n \sim O(\epsilon)$ ,  $S \sim O(\epsilon^2)$  时,  $\text{Re} \sim O(\epsilon)$  与  $K_n$  有相同的量级。利用 Stokes 区 ( $O(K) < r - 1 < O(\text{Re}^{-1})$ ) 和 Oseen 区 ( $r \geq O(\text{Re}^{-1})$ ) 的匹配渐近展开, 可将 Stokes 区的解写为<sup>[14-17]</sup>:

$$\phi = \phi_0 + \text{Re} \phi_1 + \text{Re}^2 \ln \text{Re} \phi_{2l} + \text{Re}^2 \phi_2 \quad (19)$$

这里仅列出  $\phi_0$  和  $\phi_1$  的表达式

$$\phi_0 = 0.25[2r^2 - (3 - 3A_0 - 3/2)r + (1 - 3A_0 + 3B_0/2)/r](1 - \beta^2) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 = & (1/64)[(6 - 6A_0 - 3B_0)r^2 - (9 - 9A_0 - 9A_2 - 9B_2/2 - 16B_2)r \\ & + (3 - 3A_0 - 9A_3 - 3B_0/2 + 16B_2)/r] \cdot (1 - \beta^2) - (1/64)[(6 \\ & - 6A_0 - 3B_0)r^2 - (9 - 18A_0 - 9B_0)r + (3 - 21A_0 - 6B_0 + 12A_1 \\ & - 64B_1) - (3 - 12A_0 + 3B_0)/r + (3 - 3A_0 \\ & + 3B_0 - 12A_1)/r^2]\beta(1 - \beta^2) \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$  是解方程 (17) 所得积分常数, 不考虑稀薄效应时, 壁面无滑移给出它们皆为零。在本问题中, 则应在 Knudsen 区解 B-K-W 方程及 Maxwell 边界条件 (7), (8), (9) 并使之渐近趋于这里的值, 从而定出这些常数之值。至于  $\phi_{2l}$  和  $\phi_2$ , 稀薄气体修正将导至高于要求的精度  $O(\epsilon^2)$ , 故可利用无滑移条件下的解。

当  $O(\text{Re}) \sim O(K) \sim O(\epsilon)$  时, 从式 (19), (20), (21) 可见, 对  $A_1, A_2, B_1, B_2$  仅需考虑  $K$  的一阶项, 对  $A_0, B_0$  则需考虑  $K^2$  项, 因而我们可以写

$$\begin{aligned} A_0 = & KA_0^{(1)} + K^2A_0^{(2)}, \quad A_1 = KA_1^{(1)}, \quad A_2 = KA_2^{(1)}, \quad B_0 = KB_0^{(1)} + K^2B_0^{(2)}, \\ B_1 = & KB_1^{(1)}, \quad B_2 = KB_2^{(1)} \end{aligned} \quad (22)$$

利用 (19), 从 (16) 可以求出  $u_r, u_\theta$ , 引入  $\eta$  代替  $r = 1 + K\eta$ , 对于小  $K\eta$  值展开而仅保留  $O(K^2)$  项, 可以得到  $u_r, u_\theta$  的渐近解为

$$u_{r\text{渐近}} = SK(u_{r\text{渐近}}^{(1)} + Ku_{r\text{渐近}}^{(2)}), \quad u_{\theta\text{渐近}} = SK(u_{\theta\text{渐近}}^{(1)} + Ku_{\theta\text{渐近}}^{(2)}) \quad (23)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} u_{r\text{渐近}}^{(1)} = & (3/2)B_0^{(1)}\beta + \text{Re}[B_1^{(1)}(3\beta^2 - 1) + B_2^{(1)}\beta] \\ u_{\theta\text{渐近}}^{(1)} = & \{(-3/2)(\eta + A_0^{(1)}) + \text{Re}[(-9/32)(\eta + A_2^{(1)}) \\ & + (3/8)(\eta + A_1^{(1)})\beta]\}\sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{r\text{渐近}}^{(2)} = & (3/2)(\eta^2 + 2A_0^{(1)}\eta + B_0^{(2)})\beta, \\ u_{\theta\text{渐近}}^{(2)} = & (3/2)[(3/2)\eta^2 + (2A_0^{(1)} - B_0^{(1)}/2)\eta - A_0^{(2)}]\sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

#### 四、B-K-W 方程的求解

从(23)的形式可见,  $u_r, u_\theta$  的渐近值不依赖于  $\tau_w$ , 在 Knudsen 层中如果  $\tau_w$  为 SK 阶或更小, 且沿球面为均匀分布而无热蠕动效应, 则可设

$$u_r = SK(u_r^{(1)} + Ku_r^{(2)}) \quad (26)$$

$$u_\theta = SK(u_\theta^{(1)} + Ku_\theta^{(2)}) \quad (27)$$

而  $\tau, n, p$  则可能依赖于  $\tau_w$ , 可以将它们写为依赖于  $\tau_w$  和不依赖于  $\tau_w$  的两部分<sup>[17]</sup>

$$\left. \begin{aligned} p &= \tau_w Kg^{(1)} + SK(p^{(1)} + Kp^{(2)}) \\ \tau &= \tau_w(1 + Kh^{(1)}) + SK(\tau^{(1)} + K\tau^{(2)}) \\ n &= \tau_w(-1 + Kf^{(1)}) + SK(n^{(1)} + Kn^{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

这样可以将  $\phi$  分离为依赖于  $\tau_w$  和不依赖于  $\tau_w$  的两部分

$$\phi = \tau_w[\omega(\xi) + K\varphi^{(1)}] + SK(\phi^{(1)} + K\phi^{(2)}) \quad (29)$$

将(29)及表达式(26)–(28)代入基本方程及边界条件(7), (8), (9)以及宏观条件(10)–(13), 分别收集带有  $\tau_w$  的项和不带  $\tau_w$  的 SK 项和 SK<sup>2</sup> 项, 可以得到  $\omega(\xi)$  的解以及  $\varphi^{(1)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}$  的方程, 边界条件及宏观条件:

##### 1. $\omega(\xi)$ 的解

$$\omega(\xi) = \xi^2 - 5/2 \quad (30)$$

##### 2. $\varphi^{(1)}$ 的方程及边界条件

$$\xi_r \partial \varphi^{(1)} / \partial \eta + \varphi^{(1)} = f^{(1)} + (\xi^2 - 3/2)h^{(1)} \quad (31)$$

$$\text{对于 } \xi_r > 0, \quad \varphi^{(1)}|_{\eta=0} = (1 - \alpha)\varphi^{(1)}(\xi_\theta, -\xi_r) + \alpha f_w^{(1)} \quad (32)$$

##### 3. $\phi^{(1)}$ 的方程与边界条件

$$\xi_r \partial \phi^{(1)} / \partial \eta + \phi^{(1)} = 2(\xi_r u_r^{(1)} + \xi_\theta u_\theta^{(1)}) + n^{(1)} + (\xi^2 - 3/2)\tau^{(1)} \quad (\text{I-1})$$

$$\text{对于 } \xi_r > 0, \quad \phi^{(1)}(\xi_\theta, \xi_r)|_{\eta=0} = (1 - \alpha)\phi^{(1)}(\xi_\theta, -\xi_r) + \alpha n_w^{(1)} \quad (\text{I-2})$$

$$u_r^{(1)}|_{\eta=0} = 0 \quad (\text{I-3})$$

其中

$$u_r^{(1)} = \int \xi_r \phi^{(1)} F_0 d\xi, \quad u_\theta^{(1)} = \int \xi_\theta \phi^{(1)} F_0 d\xi \quad (\text{I-4})$$

$$n^{(1)} = \int \phi^{(1)} F_0 d\xi, \quad (3/2)(n^{(1)} + \tau^{(1)}) = \int \xi^2 \phi^{(1)} F_0 d\xi, \quad p^{(1)} = n^{(1)} + \tau^{(1)} \quad (\text{I-5})$$

##### 4. $\phi^{(2)}$ 的方程与边界条件

$$\begin{aligned} \xi_r \partial \phi^{(2)} / \partial \eta + \phi^{(2)} &= 2(\xi_r u_r^{(2)} + \xi_\theta u_\theta^{(2)}) + n^{(2)} + (\xi^2 - 3/2)\tau^2 \\ &+ \sqrt{1 - \beta^2} \xi_\theta \partial \phi^{(1)} / \partial \beta - (\xi_\theta^2 + \xi_\varphi^2) \partial \phi^{(1)} / \partial \xi_r - [(\beta / \sqrt{1 - \beta^2}) \xi_\theta^2 \\ &- \xi_r \xi_\theta] \partial \phi^{(1)} / \partial \xi_\theta + [\xi_r \xi_\theta + (\beta / \sqrt{1 - \beta^2}) \xi_\theta \xi_\varphi] \partial \phi^{(1)} / \partial \xi_\varphi \end{aligned} \quad (\text{II-1})$$

$$\text{对于 } \xi_r > 0, \quad \phi^{(2)}(\xi_\theta, \xi_r)|_{\eta=0} = (1 - \alpha)\phi^{(2)}(\xi_\theta, -\xi_r) + \alpha n_w^{(2)} \quad (\text{II-2})$$

$$u_r^{(2)}|_{\eta=0} = 0 \quad (\text{II-3})$$

其中

$$u_r^{(2)} = \int \xi_r \phi^{(2)} F_0 d\xi, \quad u_\theta^{(2)} = \int \xi_\theta \phi^{(2)} F_0 d\xi \quad (\text{II-4})$$

$$n^{(2)} = \int \phi^{(2)} F_0 d\xi, (3/2)(n^{(2)} + \tau^{(2)}) = \int \xi^2 \phi^{(2)} F_0 d\xi, p^{(2)} = n^{(2)} + \tau^{(2)} \quad (\text{II-5})$$

在对球阻的计算中将发现对于所设的  $\tau_w$  满足的条件,  $\tau_w$  将不在  $C_D$  中出现, 故我们在这里只限于求解问题 (I-1)—(I-5) 及问题 (II-1)—(II-5).

为了求解 (I-1)—(I-5), 首先注意从连续方程 (14) 可得  $\partial u_r^{(1)}/\partial \eta = 0$ . 再从边界条件 (I-3) 得

$$u_r^{(1)} = B_0^{(1)} = B_1^{(1)} = B_2^{(1)} = 0. \quad (33)$$

这时方程 (I-1) 满足边界条件 (I-2) 的解为

$$\begin{aligned} \phi_{\xi_r > 0}^{(1)} &= \left\{ [(1-\alpha)/\xi_r] \int_0^\infty [2\xi_\theta u_\theta^{(1)}(\zeta) + n^{(1)}(\zeta) + (\xi^2 - 3/2)\tau^{(1)}(\zeta)] \right. \\ &\quad \times \exp(-\zeta/\xi_r) d\zeta + \alpha n_w^{(1)} \left. \right\} \cdot \exp(-\eta/\xi_r) + \frac{1}{\xi_r} \int_0^\eta [2\xi_\theta u_\theta^{(1)}(\zeta) \\ &\quad + n^{(1)}(\zeta) + (\xi^2 - 3/2)\tau^{(1)}(\zeta)] \exp(-|\eta - \zeta|/\xi_r) d\zeta \\ \phi_{\xi_r < 0}^{(1)} &= \frac{1}{|\xi_r|} \int_\eta^\infty [2\xi_\theta u_\theta^{(1)}(\zeta) + n^{(1)}(\zeta) + (\xi^2 - 3/2)\tau^{(1)}(\zeta)] \\ &\quad \times \exp(-|\eta - \zeta|/\xi_r) d\zeta \end{aligned} \quad (34)$$

将解 (34) 代入宏观条件 (I-4), (I-5), 可以得到  $u_\theta^{(1)}$ ,  $n^{(1)}$ ,  $\tau^{(1)}$  的积分方程

$$0 = \alpha \tau_w^{(1)} J_1(\eta) + \mathcal{L}_0^*[n^{(1)}(\eta), \tau^{(1)}(\eta), \alpha] \quad (35)$$

$$\sqrt{\pi} u_\theta^{(1)}(\eta) = \mathcal{L}_1^*[u_\theta^{(1)}(\eta), \alpha] \quad (36)$$

$$\sqrt{\pi} n^{(1)}(\eta) = \alpha n_w^{(1)} J_0(\eta) + \mathcal{L}_2^*[n^{(1)}(\eta), \tau^{(1)}(\eta), \alpha] \quad (37)$$

$$(3\sqrt{\pi}/2)[n^{(1)}(\eta) + \tau^{(1)}(\eta)] = \alpha n_w^{(1)} [J_0(\eta) + J_2(\eta)] + \mathcal{L}_3^*[n^{(1)}(\eta), \tau^{(1)}(\eta), \alpha] \quad (38)$$

其中

$$J_n(\eta) = \int_0^\infty t^n \exp(-t^2 - \eta/t) dt \quad (39)$$

$$\mathcal{L}_0^*[f(\eta), g(\eta), \alpha] = \left( \int_0^\eta - \int_\eta^\infty \right) [J_0 f(\zeta) + (J_2 - J_0/2)g(\zeta)] d\zeta$$

$$+ (1-\alpha) \int_0^\infty [J_0^* f(\zeta) + (J_2^* - J_0^*/2)g(\zeta)] d\zeta,$$

$$\mathcal{L}_1^*[f(\eta), \alpha] = \int_0^\infty J_{-1} f(\zeta) d\zeta + (1-\alpha) \int_0^\infty J_{-1}^* f(\zeta) d\zeta$$

$$\mathcal{L}_2^*[f(\eta), g(\eta), \alpha] = \int_0^\infty [J_{-1} f(\zeta) + (J_1 - J_{-1}/2)g(\zeta)] d\zeta$$

$$+ (1-\alpha) \int_0^\infty [J_{-1}^* f(\zeta) + (J_1^* - J_{-1}^*/2)g(\zeta)] d\zeta$$

$$\mathcal{L}_3^*[f(\eta), g(\eta), \alpha] = \int_0^\infty [(J_1 + J_{-1})f(\zeta) + (J_3 + J_1/2 + J_{-1}/2)g(\zeta)] d\zeta$$

$$+ (1-\alpha) \int_0^\infty [(J_1^* + J_{-1}^*)f(\zeta) + (J_3^* + J_1^*/2 + J_{-1}^*/2)g(\zeta)] d\zeta$$

$$J_n \equiv J_n(|\eta - \zeta|), \quad J_n^* \equiv J_n(\eta + \zeta) \quad (40)$$

由于方程 (36) 只包含  $u_\theta^{(1)}$ , 故可对  $u_\theta^{(1)}$  单独求解.  $u_\theta^{(1)}$  的渐近解的形式 (24) 表明, 可以将其写为

$$u_\theta^{(1)} = (-3/2)[\eta + \mathcal{A}_1 + u_\theta^*(\eta)][1 + \text{Re}(3/16 - \beta/4)]\sqrt{1 - \beta^2} \quad (41)$$

其中  $\mathcal{A}_1$  为待定系数，而  $u_\theta^*(\eta)$  为在  $\eta \rightarrow \infty$  时渐近趋于零的函数，因而可将其展开为  $J_n(\eta)$  的级数

$$u_\theta^* = \sum_{n=0}^m a_n^* J_n(\eta) \quad (42)$$

$a_n^*$  为待定系数。将 (41)、(42) 式代入 (36) 式得到

$$\begin{aligned} \alpha \mathcal{A}_1 J_0(\eta) + \sum_{n=0}^m a_n^* \left[ \sqrt{\pi} J_n(\eta) - \int_0^\infty J_n(\zeta) J_{-1} d\zeta - (1 - \alpha) \int_0^\infty J_{-1}(\zeta \right. \\ \left. + \eta) J_n(\zeta) d\zeta \right] = (2 - \alpha) J_1(\eta) \end{aligned} \quad (43)$$

为了求解  $\mathcal{A}_1$  和  $a_n^*$ ,  $n = 0, 1, \dots, m$ , 用求矩法, 即分别用  $\eta^l (l = 0, 1, \dots, m + 1)$  乘以式 (43), 再对  $\eta$  从零到  $\infty$  积分, 可得确定  $m + 2$  个未知量  $\mathcal{A}_1, a_n^*$  的线性代数方程组

$$\begin{aligned} \alpha \mathcal{A}_1 I_{l0} + \sum_{n=0}^m a_n^* [\sqrt{\pi} I_{ln} - H_{ln}^{-1} - (1 - \alpha) G_{ln}^{-1}] = (2 - \alpha) I_{l1}, \\ 0 \leq l \leq m + 1 \end{aligned} \quad (44)$$

其中

$$I_{ln} = \int_0^\infty \eta^l J_n(\eta) d\eta = l! J_{l+n+1}(0) \quad (45)$$

$$H_{ln}^k = \int_0^\infty \eta^l d\eta \int_0^\infty J_n(\zeta) J_k(|\eta - \zeta|) d\zeta = I_{l, n+k+2} F_{ln}^k \quad (46)$$

$$G_{ln}^k = \int_0^\infty \eta^l d\eta \int_0^\infty J_n(\zeta) J_k(\eta + \zeta) d\zeta = I_{l, n+k+2} E_{ln}^k \quad (47)$$

$$F_{ln}^k = \int_0^1 \frac{c^n s^{k+1} [2c^{l+2} - (c + s)s^{l+1}]}{c^2 - s^2} ds, \quad c = \sqrt{1 - s^2} \quad (48)$$

$$E_{ln}^k = \int_0^1 \frac{c^n s^{k+l+2}}{c + s} ds, \quad c = \sqrt{1 - s^2} \quad (49)$$

后两个积分可以对于  $k \geq -1, l, n \geq 0$  用 Gauss 法求积分值。这时对于具体的适应系数  $\alpha$  之值, 对于给定的  $m$  可以求解代数方程组 (44)。数值计算给出不同  $\alpha$  值下的  $\mathcal{A}_1$  值列于表 1。

比较  $u_\theta^{(1)}$  解的形式 (41) 及渐近表达式 (24), 可见

$$A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = A_2^{(1)} = \mathcal{A}_1. \quad (50)$$

$n^{(1)}, \tau^{(1)}$  对球阻无贡献, 这里不涉及它们的解。

为了求解 (II-1) — (II-5), 我们首先注意方程 (II-1) 满足边界条件 (II-2) 的解可以写为

$$\begin{aligned} \phi_{\xi_r > 0}^{(2)} = \left\{ (1 - \alpha) \frac{1}{|\xi_r|} \int_0^\infty \left[ -2 |\xi_r| u_r^{(2)}(\zeta) + 2 \xi_\theta u_\theta^{(2)}(\zeta) + n^{(2)}(\zeta) \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \xi^2 - \frac{3}{2} \right) \tau^{(2)}(\zeta) + \sqrt{1 - \beta^2} \xi_\theta \frac{\partial \phi_{\xi_r < 0}^{(1)}}{\partial \beta} + (\xi_\theta^2 + \xi_\varphi^2) \frac{\partial \phi_{\xi_r < 0}^{(1)}}{\partial |\xi_r|} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi_\varphi^2 + |\xi_r| \xi_\theta \right) \frac{\partial \phi_{\xi_r < 0}^{(1)}}{\partial \xi_\theta} + \left( -|\xi_r| \xi_\varphi + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi_\theta \xi_\varphi \right) \\
& \times \frac{\partial \phi_{\xi_r < 0}^{(1)}}{\partial \xi_\varphi} \left. \right\} e^{-\xi/\xi_r} d\xi + \alpha n_w^{(2)} \Big|_{\eta=0} \exp(-\eta/\xi_r) + \frac{1}{\xi_r} \int_0^\eta \left[ 2\xi_r u_r^{(2)}(\zeta) \right. \\
& + 2\xi_\theta u_\theta^{(2)}(\zeta) + n^{(2)}(\zeta) + (\xi^2 - 3/2) \tau^{(2)}(\zeta) + \sqrt{1-\beta^2} \xi_\theta \frac{\partial \phi_{\xi_r > 0}^{(1)}}{\partial \beta} \\
& - (\xi_\theta^2 + \xi_\varphi^2) \frac{\partial \phi_{\xi_r > 0}^{(1)}}{\partial \xi_r} - \left( \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi_\varphi^2 - \xi_r \xi_\theta \right) \frac{\partial \phi_{\xi_r > 0}^{(1)}}{\partial \xi_\theta} + \left( \xi_r \xi_\varphi \right. \\
& \left. + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi_\theta \xi_\varphi \right) \frac{\partial \phi_{\xi_r > 0}^{(1)}}{\partial \xi_\varphi} \Big] \exp\left(-\frac{\eta-\zeta}{\xi_r}\right) d\zeta \\
\phi_{\xi_r < 0}^{(2)} = & \frac{1}{|\xi_r|} \int_\eta^\infty \left[ -2|\xi_r| u_r^{(2)}(\zeta) + 2\xi_\theta u_\theta^{(2)}(\zeta) + n^{(2)}(\zeta) + \left(\xi^2 - \frac{3}{2}\right) \tau^{(2)}(\zeta) \right. \\
& + \sqrt{1-\beta^2} \xi_\theta \frac{\partial \phi_{\xi_r < 0}^{(1)}}{\partial \beta} + (\xi_\theta^2 + \xi_\varphi^2) \frac{\partial \phi_{\xi_r < 0}^{(1)}}{\partial |\xi_r|} - \left( \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi_\varphi^2 \right. \\
& \left. + |\xi_r| \xi_\theta \right) \frac{\partial \phi_{\xi_r < 0}^{(1)}}{\partial \xi_\theta} + \left( -|\xi_r| \xi_\varphi + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \xi_\theta \xi_\varphi \right) \frac{\partial \phi_{\xi_r < 0}^{(1)}}{\partial \xi_\varphi} \Big] \\
& \times \exp(-|\eta-\zeta|/|\xi_r|) d\zeta, \tag{51}
\end{aligned}$$

将  $\phi^{(2)}$  的这个解代入宏观条件 (II-4), (II-5), 完成对  $\xi$  的积分, 得到  $u_r^{(2)}$ ,  $u_\theta^{(2)}$ ,  $n^{(2)}$ ,  $\tau^{(2)}$  的积分方程

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} u_r^{(2)}(\eta) = & \alpha n_w^{(2)} J_1(\eta) + 2\mathcal{L}_4^*[u_r^{(2)}(\eta), \alpha] + \mathcal{L}_5^*[n^{(2)}(\eta), \tau^{(2)}(\eta), \alpha] \\
& - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathcal{L}_6^*[u_\theta^{(1)}(\eta), \alpha] \tag{52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} u_\theta^{(2)}(\eta) = & \mathcal{L}_7^*[u_\theta^{(1)}(\eta), \alpha] - (3\sqrt{1-\beta^2}/4) [\sqrt{\pi} - \alpha J_0(\eta)] \\
& + \mathcal{L}_8^*[u_\theta^{(1)}(\eta), \alpha] \tag{53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} n^{(2)}(\eta) = & \alpha n_w^{(2)} J_0(\eta) + \mathcal{L}_9^*[u_r^{(2)}(\eta), \alpha] + \mathcal{L}_{10}^*[n^{(2)}(\eta), \tau^{(2)}(\eta), \alpha] \\
& - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathcal{L}_{11}^*[u_\theta^{(1)}(\eta), \alpha] \tag{54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \sqrt{\pi} [n^{(2)}(\eta) + \tau^{(2)}(\eta)] = & \alpha n_w^{(2)} [J_0(\eta) + J_2(\eta)] + 2\mathcal{L}_{12}^*[u_r^{(2)}(\eta), \alpha] \\
& + \mathcal{L}_{13}^*[n^{(2)}(\eta), \tau^{(2)}(\eta), \alpha] - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathcal{L}_{14}^*[u_\theta^{(1)}(\eta), \alpha] \tag{55}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^*[f(\eta), \alpha] = & \int_0^\infty J_1 f(\zeta) d\zeta - (1-\alpha) \int_0^\infty J_1^* f(\zeta) d\zeta \\
\mathcal{L}_5^*[f(\eta), g(\eta), \alpha] = & \left( \int_0^\eta - \int_\eta^\infty \right) [J_0 f(\zeta) + (J_2 - J_0/2) g(\zeta)] d\zeta \\
& + (1-\alpha) \int_0^\infty [J_0^* f(\zeta) + (J_2^* - J_0^*/2) g(\zeta)] d\zeta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_6^*[f(\eta), \alpha] &= \int_0^\infty (\eta - \zeta) J_{-1} f(\zeta) d\zeta + (1 - \alpha) \int_0^\infty J_0^* f(\zeta) d\zeta \\
\mathcal{L}_7^*[f(\eta), \alpha] &= \int_0^\infty J_{-1} f(\zeta) d\zeta + (1 - \alpha) \int_0^\infty J_{-1}^* f(\zeta) d\zeta \\
\mathcal{L}_8^*[f(\eta), \alpha] &= \left( \int_0^\eta - \int_\eta^\infty \right) (J_0 - 2J_2) f(\zeta) d\zeta + (1 - \alpha) \int_0^\infty (3J_0^* \\
&\quad - 2\eta J_{-3}^*) f(\zeta) d\zeta \\
\mathcal{L}_9^*[f(\eta), \alpha] &= \left( \int_0^\eta - \int_\eta^\infty \right) J_0 f(\zeta) d\zeta - (1 - \alpha) \int_0^\infty J_0^* f(\zeta) d\zeta \\
\mathcal{L}_{10}^*[f(\eta), g(\eta), \alpha] &= \int_0^\infty \left[ J_{-1} f(\zeta) + \left( J_1 - \frac{1}{2} J_{-1} \right) g(\zeta) \right] d\zeta \\
&\quad + (1 - \alpha) \int_0^\infty [J_{-1}^* f(\zeta) + (J_1^* - J_{-1}^*/2) g(\zeta)] d\zeta \\
\mathcal{L}_{11}^*[f(\eta), \alpha] &= \int_0^\infty |\zeta - \eta| J_{-2} f(\zeta) d\zeta + (1 - \alpha) \int_0^\infty J_{-2}^* f(\zeta) d\zeta \\
\mathcal{L}_{12}^*[f(\eta), \alpha] &= \left( \int_0^\eta - \int_\eta^\infty \right) (J_0 + J_2) f(\zeta) d\zeta - (1 - \alpha) \int_0^\infty (J_0^* \\
&\quad + J_2^*) f(\zeta) d\zeta \\
\mathcal{L}_{13}^*[f(\eta), g(\eta), \alpha] &= \int_0^\infty \left\{ [J_{-1} + J_1] f(\zeta) + \left( J_3 + \frac{1}{2} J_1 + \frac{1}{2} J_{-1} \right) g(\zeta) \right\} d\zeta \\
&\quad + (1 - \alpha) \int_0^\infty \left[ (J_{-1}^* + J_1^*) f(\zeta) + \left( J_3^* + \frac{1}{2} J_1^* + \frac{1}{2} J_{-1}^* \right) g(\zeta) \right] d\zeta \\
\mathcal{L}_{14}^*[f(\eta), \alpha] &= \int_0^\infty |\zeta - \eta| (J_0 + 2J_{-2}) f(\zeta) d\zeta + (1 - \alpha) \int_0^\infty [J_1^* \\
&\quad + J_{-1}^*] f(\zeta) d\zeta
\end{aligned}$$

而  $J_n(\eta)$ ,  $J_n$ ,  $J_n^*$  由 (39), (40) 式给出.  $u_r^{(2)}$ ,  $u_\theta^{(2)}$  满足以上积分方程, 其渐近解有式 (25) 形式, 我们可以将其写为:

$$u_r^{(2)} = (3/2)[\eta^2 + 2\mathcal{A}_1\eta + \mathcal{B}_2 + u_r^{**}(\eta)]\beta, \quad (56)$$

$$u_\theta^{(2)} = (3/2)[3\eta^2/2 + 2\mathcal{A}_1\eta - \mathcal{A}_2 + u_\theta^{**}(\eta)]\sqrt{1 - \beta^2}, \quad (57)$$

其中  $u_r^{**}$ ,  $u_\theta^{**}$  满足  $\eta \rightarrow \infty$  时渐近趋于零的条件,  $\mathcal{B}_2$  与  $\mathcal{A}_2$  根据 (25) 式代替了  $B_0^{(2)}$  与  $A_0^{(2)}$ . 由于 (53) 仅包含  $u_\theta^{(2)}$  为未知函数, 可以对其单独求解. 将  $u_\theta^{(1)}$  的表达式 (41) 及 (42) 以及  $u_\theta^{(2)}$  的表达式 (57) 代入式 (53), 经较复杂的运算, 可以将式 (53) 写为对  $u_\theta^{**}$  的方程

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} u_\theta^{**}(\eta) &= \mathcal{L}_7^{**}[u_\theta^{**}(\eta), \alpha] + [1/2 + \mathcal{A}_2 - (5/2 - \mathcal{A}_2)(1 - \alpha)]J_0(\eta) \\
&\quad + 2\mathcal{A}_1(3 - 2\alpha)J_1(\eta) + (2 - 5\alpha)J_2(\eta) - 2\mathcal{A}_1(1 - \alpha)J_3(\eta) \\
&\quad - 2(1 - \alpha)J_4(\eta) - \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^m a_n^* J_{n+1}(\eta) - 2(1 - \alpha) \int_0^\infty (2J_0^* \\
&\quad - \eta J_{-3}^* - J_2^*) u_\theta^*(\zeta) d\zeta.
\end{aligned} \quad (58)$$

可将  $u_\theta^{**}$  对  $J_n(\eta)$  展开

$$u_\theta^{**}(\eta) = \sum_{n=0}^m a_n^{**} J_{n+1}(\eta), \quad (59)$$

其中  $a_n^{**}$  为待定系数. 为了解方程 (58), 从中定出  $m+2$  个未知量  $\mathcal{A}_2$  和  $a_n^{**}$ , 仍用求矩法, 即将 (58) 两端各乘以  $\eta^l (l=0, \dots, m+1)$  并对  $\eta$  从 0 到  $\infty$  积分. 注意,  $u_\theta^0(\eta)$  已展开为  $J_n(\eta)$  的函数 (42), 而  $a_n^*$ ,  $\mathcal{A}_1$  已在解 (44) 时定出, 我们得到对  $\mathcal{A}_2$  和  $a_n^{**}$  的联立代数方程组

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2} + \mathcal{A}_2 - \left( \frac{5}{2} - \mathcal{A}_2 \right) (1 - \alpha) \right] I_{l0} + \sum_{n=0}^m a_n^{**} [H_{l_{n+1}}^{-1} \\ & + (1 - \alpha) G_{l_{n+1}}^{-1} - \sqrt{\pi} I_{l_{n+1}}] = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^m a_n^* I_{l_{n+1}} - 2\mathcal{A}_1 (3 \\ & - 2\alpha) I_{l1} - (2 - 5\alpha) I_{l2} + 2\mathcal{A}_1 (1 - \alpha) I_{l3} + 2(1 - \alpha) I_{l4} \\ & + 2(1 - \alpha) \sum_{n=0}^m a_n^* (2G_{l_{n+1}}^0 - G_{l_{n+1}}^{-3} - G_{l_{n+1}}^2), \quad 0 \leq l \leq m+1 \quad (60) \end{aligned}$$

对于不同的  $\alpha$  值, 在一定的  $m$  下利用解 (44) 时所得的  $\mathcal{A}_1$  和  $a_n^*$  的结果, 可以求解 (60), 以定出  $\mathcal{A}_2$  和  $a_n^{**}$  之值. 数值计算给出的  $\mathcal{A}_2$  值列于表 1.

为了求解  $u_r^{(2)}$ , 可以将积分方程 (52) 对  $\eta$  微商, 再利用 (54) 即可将  $\tau^{(2)}$ ,  $n^{(2)}$  从方程中消去而得

$$\sqrt{\pi} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \eta} = - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^\infty J_{-1} u_\theta^{(1)}(\zeta) d\zeta \quad (61)$$

利用方程 (36), 可以将 (61) 改写为

$$\sqrt{\pi} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \eta} = - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[ \sqrt{\pi} u_\theta^{(1)} - (1 - \alpha) \int_0^\infty J_{-1}^* u_\theta^{(1)}(\zeta) d\zeta \right] \quad (62)$$

在 (41)、(42) 中丢掉  $O(\text{Re})$  项, 代入 (62), 对  $\eta$  积分可得

$$\begin{aligned} u_r^{(2)}(\eta) &= (3/2) \left[ \eta^2 + 2\mathcal{A}_1 \eta + \mathcal{B}_2 - 2 \sum_{n=0}^m a_n^* J_{n+1}(\eta) \right] \beta \\ &+ [3\beta(1 - \alpha)/\sqrt{\pi}] \left[ J_2(\eta) + \mathcal{A}_1 J_1(\eta) + \sum_{n=0}^m a_n^* \int_0^\infty J_0^* J_n(\zeta) d\zeta \right] \quad (63) \end{aligned}$$

比较 (56) 与 (63) 可见

$$\begin{aligned} u_r^{**}(\eta) &= -2 \sum_{n=0}^m a_n^* J_{n+1}(\eta) + [2(1 - \alpha)/\sqrt{\pi}] \left[ J_2(\eta) + \mathcal{A}_1 J_1(\eta) \right. \\ &+ \left. \sum_{n=0}^m a_n^* \int_0^\infty J_0^* J_n(\zeta) d\zeta \right], \end{aligned}$$

积分常数  $\mathcal{B}_2$  可以从 (II-3) 条件定出

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 &= -u_r^{**}(0) = 2 \sum_{n=0}^m a_n^* J_{n+1}(0) - [2(1 - \alpha)/\sqrt{\pi}] \left[ J_2(0) + \mathcal{A}_1 J_1(0) \right. \\ &+ \left. \sum_{n=0}^m a_n^* J_{n+2}(0) E_{0n}^{-1} \right] \quad (64) \end{aligned}$$

对于不同的  $\alpha$  值, 在一定的  $m$  下  $\mathcal{B}_2$  的计算结果见表 1. 表 1 中的  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{B}_2$  之值对于  $m \geq 4$  准确到三位有效数.

表 1

$\alpha$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\mathcal{A}_1$	7.10	8.23	5.26	3.76	2.86	2.26	1.82	1.49	1.227	1.016
$\mathcal{A}_2$	-17.5	-8.03	-4.97	-3.43	-2.47	-1.85	-1.36	-0.95	-0.597	-0.266
$\mathcal{B}_2$	-10.2	-5.12	-3.37	-2.46	-1.89	-1.47	-1.15	-0.89	-0.666	-0.467

## 五、球的阻力

当温度沿球面为均匀且  $\tau_w \leq O(SK)$  时, 利用动量守恒定律, 取在较远处包围球的球面为控制面可以证明, 稀薄气流中圆球的阻力通过  $K$ ,  $Re$  以及系数  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2$  表示如下式(参看文献 [17]).

$$F = 6\pi\mu Ua [1 - \mathcal{A}_1 K - (\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2/2)K^2 + (3Re/16)(1 - 2\mathcal{A}_1 K/3) + (9Re^2/160)(\ln Re + 0.142)], \quad (65)$$

根据以上对于不同  $\alpha$  值下对  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2$  的计算结果我们将球阻写为

$$F = 6\pi\mu Ua [1 - C_1(\alpha)K + C_2(\alpha)K^2 + (3Re/15)(1 - C_3(\alpha)K) + (9Re^2/160)(\ln Re + 0.142)] \quad (66)$$

其中  $C_1(\alpha), C_2(\alpha), C_3(\alpha)$  在不同  $\alpha$  值时的计算值见表 2.

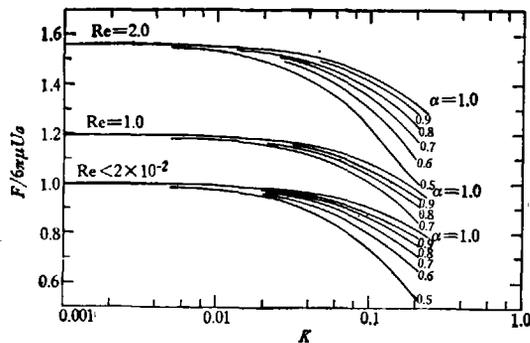
表 2

$\alpha$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$C_1$	17.1	8.23	5.26	3.76	2.86	2.26	1.82	1.49	1.23	1.016
$C_2$	22.6	10.6	6.66	4.67	3.41	2.58	1.93	1.39	0.93	0.500
$C_3$	11.4	5.48	3.50	2.51	1.91	1.50	1.21	0.992	0.818	0.677

有时将阻力表达为  $S, K$  的函数是方便的, 由于  $Re = 4S/K$ , 可以将球阻写为

$$F = 6\pi\mu Ua [1 - C_1(\alpha)K + C_2(\alpha)K^2 + 0.75(S/K)(1 - C_3(\alpha)K) + 0.9(S/K)^2(\ln(4S/K) + 0.142)] \quad (67)$$

图 1 中则给出了以  $\alpha$  和  $Re$  为参数时, 阻力  $F$  与 Stokes 阻力  $6\pi\mu Ua$  之比随  $K$  的变化。

图 1  $F/6\pi\mu Ua$  随  $K, Re, \alpha$  的变化

## 六、结果讨论

取表 2 中  $\alpha = 1$  时的  $C_1, C_2, C_3$  之值代入式 (66), 得到分子在壁面为完全漫反射时的球阻表达式

$$F = 6\pi\mu Ua[1 - 1.016K + 0.500K^2 + (3\text{Re}/16)(1 - 0.677K) + (9\text{Re}^2/160)(\ln \text{Re} + 0.142)] \quad (68)$$

如所预期,它与 [17] 所得结果完全相同。

曾根良夫等利用将解分离为 Hilbert 解和 Knudsen 解的渐近理论<sup>[3,4,5]</sup>得到完全漫反射时球阻表达式为<sup>[6]</sup>

$$F = 6\pi\mu Ua \left[ 1 - 1.016k + \left( 0.500 + 0.235 \frac{k_g/k_s}{2(k_g/k_s) + 1} \right) k^2 + O(k^3) \right] \quad (69)$$

其中  $k = (\sqrt{\pi}/2)\lambda_\infty/a$ ,  $k_g, k_s$  分别为气体和壁面的热传导系数, 当在式 (68) 中取  $\text{Re} = 0$  即忽略惯性效应时, 有

$$F = 6\pi\mu Ua[1 - 1.016K^2 + 0.500K^2] \quad (70)$$

而在 (69) 中取  $k_s \gg k_g$  的极限情况, 可得

$$F = 6\pi\mu Ua[1 - 1.016k^2 + 0.500k^2]. \quad (71)$$

比较 (70) 和 (71), 可见如果  $K$  值与  $k$  值相同, 则两种方法所得结果相符。表面看来,  $K$  与  $k$  定义不同, 因有  $K = (4/\sqrt{\pi})K_n = (4/\sqrt{\pi})(\lambda_\infty/2a)$ ,  $k = (\sqrt{\pi}/2)(\lambda_\infty/a) = \sqrt{\pi}K_n$ , 但两种方法中粘性系数  $\mu$  的表达式不同。本文中对 B-K-W 方程中的碰撞频率作了修正, 以使  $\mu = 0.499\rho\sqrt{(8/\pi)RT}\lambda_\infty$ , 而 [6] 中用未修正的 B-K-W 模型, 所得  $\mu$  的表达式为  $\mu = (1/2)\sqrt{\pi/2}\rho\sqrt{RT}\lambda_\infty$ 。这样当用  $\mu$  为基本的量来表达  $K$  与  $k$  时, 将发现  $K = k = \mu P^{-1}(2RT)^{1/2}a^{-1}$ 。

曾根良夫等<sup>[9]</sup>还得到了球在完全镜面反射条件下的阻力

$$F_{\text{镜面}} = 6\pi\mu Ua[2/3 + O(k^2)] \quad (72)$$

用本文的方法, 令  $\alpha = 0$  得不到 (72) 的结果, 因为这里假设  $\alpha$  为有限, 而  $K$  与  $\text{Re}$  为小量。青木一生等<sup>[11]</sup>不考虑惯性得到了小  $\alpha$  下球阻表达式, 且满足 (72) 渐近条件。分析  $\alpha, \text{Re}, K$  均为小量时解的渐近行为, 以得到满足 (72) 渐近条件的解将是有趣的。

## 参 考 文 献

- [1] Bhatnager, P. L., Gross, E. P., Krook, M., *Phys. Rev.*, **94**, 3(1954), 511.
- [2] Welander, P., *Arkiv fur Fysik*, **7**, 44(1954), 507.
- [3] Grad, H., *Transport Theory*, ed R. Bellman (1969), 269.
- [4] Sone, Y., *Rarefied Gas Dynamics*, ed. L. Trilling, **1**(1969), 243.
- [5] Sone, Y., *Rarefied Gas Dynamics*, ed. D. Dini, **2**(1971), 737.
- [6] Sone, Y., Aoki, K., *Rarefied Gas Dynamics*, ed. J. L. Potter, **1**(1977), 417.
- [7] 曾根良夫, 青木一生, 大西善元, 日本航空学会志, **23**, 261(1975), 568.
- [8] Sone, Y., Aoki, K., *Phys. Fluids*, **20**, 4(1977), 571.
- [9] Cercignani, C., Pagani, C. D., *Phys. Fluids*, **11**, 7(1968), 1395.
- [10] Cercignani, C., Pagani, C. D., Bassanini, P., *Phys. Fluids*, **11**, 7(1968), 1399.
- [11] Aoki, K., Inamuro, T., Onishi, Y., *J. Phys. Soc. Japan*, **47**, 2(1979), 663.

- [12] Stokes, G. G., *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 9(1851), 8.
- [13] Oseen, C. W., *Arkiv Mat. Astron. Fysik*, 6, 29(1910), 1.
- [14] Kaplun, S., Lagerstrom, P. A., *J. Math. & Mech.*, 6, 5(1957), 585.
- [15] Proudman, I., Pearson, J. R. A., *J. Fluid Mech.*, 2(1957), 237.
- [16] Chester, W., Breach, C. R., *J. Fluid Mech.*, 37, part 4(1969), 751.
- [17] Tomoeda, M., *UTIAS Report*, 216(1977).
- [18] Goldstein, S., *Modern Developments in Fluid Mechanics*, Oxford, 1(1938).

## SLIGHTLY RAREFIED GAS FLOW OVER A SPHERE UNDER MAXWELL-TYPE BOUNDARY CONDITIONS

Shen Ching

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

### Abstract

In this paper the problem of the drag acting on a sphere at low speed in slightly rarefied gas flow ( $K_n \ll 1$ ) is considered. In the Knudsen layer the linearized Boltzmann-Krook-Welander equation is solved under the Maxwell-type boundary condition on the wall, and the matched asymptotic expansion solution in Stokes region is used as the boundary condition at infinity. Solution of flow over sphere under small  $K_n$  is obtained by assuming small temperature difference between the surface and uniform flow. Besides the rarefaction effect, the inertia effect and reflection model of molecules on the surface are also taken into account, and the sphere drag is expressed as a function of  $K_n$ ,  $Re$  and  $\alpha$  (accommodation coefficient).