

星系密度波的维持问题以及 Waser 机制 的进一步数值研究

徐 建 军

(中国科学院力学研究所)

摘 要

本文着眼于星系螺旋结构的维持问题,采用一种简化的星系模型,以数值解方法研究了密度波的各种有关的动力学特性。结果还进一步证实了作者用渐近分析方法所得到的 Waser 开关特性和共转圈势垒上的隧道效应。

一、引 言

六十年代末,当星系密度波的局部理论获得很大成功时, Toomre (1969)对密度波的维持问题提出了疑难。因为由局部色散关系得出: 密度波的曳型短波分支的群速度是背离共转圈,分别指向内、外 Lindblad 共振圈的。而对 Lindblad 共振作用的分析又表明,由于这种共振作用,密度波的波能将转化为粒子运动能量。因此断定: 如果密度波得不到某种能量补充的话,这种波动运动经过一定时间之后将会逐渐消失,螺旋结构图象亦无法维持。这段时间间隔大致是 10^8 — 10^9 年的数量级。Toomre 的这一著名疑难,极大地促进了密度波理论进一步发展。

有的人会想,由于星系核不断向外抛射物质,星盘内经常出现各种局部的、随机的密度涨落,在一个旋转的物质系统中,它们总会被曳成一种局部的、螺旋形的密度波图象的。有这么多的扰动运动不断产生,怎么还存在什么密度波的维持问题呢?

关键在于,我们所着眼的螺旋结构,是指星系范围内的,大尺度的整体图象;上述的随机发生、不断更新的扰动只会产生局部的、片断的物质臂。这并不能解释为什么那种整体、一致的图象可能保持为一种准稳状态。

问题便回到了如何在一定初值、边值条件下,求解一种不定常的波动问题。对于这种整体运动,多年来有不少人采用数值计算方法或模拟方法,在大型计算机上试图求解。但是这种途径往往需要作十分繁浩且收敛性难以证明的数值计算。即便是得出一定计算结果也常常只能给出一种密度波演化过程的描述,很难说出贯穿其中,而又相互交叉的各种动力学机制。一种比较简单而有效的研究途径是,暂不考虑初始条件,只在一定边界条件下求所谓模式解。这种方法有利于找到分析解,而且可以期望,任一完全的初、边值问题的解可由这些模式解线性迭加而成,或至少含有这些模式解成份。所谓整体模式解理论大致就是沿着这种思路进行的。

在 C. C. Lin 和 Y. Y. Lau 的早期工作中,业已发现在共转圈附近存在着一种有趣的放

本文 1980 年 11 月 17 日收到,1981 年 4 月 27 日收到修改稿。

大机制——Waser。由于这种机制，密度波可以在共转圈附近由基态运动中不断获得能量，从而使振幅不断增加，以致足以抵消各种消耗，使螺旋结构得以维持。

在前段工作中，我们研究处理了有限厚三维星系的螺旋结构问题，并进而发现了密度波在共转圈势垒附近的“隧道效应”以及 Waser 机制的某种开关特性。在这些工作中，由于着眼于螺旋图象的维持问题，只是侧重于利用一般情况下的量子化条件与一个复型的共转圈参数 a 的关系，得出星盘厚度以及其它基态特性对于维持螺旋图象的意义。我们当时并未从具体的星系模型出发，定量地给出在各种情况下，波的振幅分布和图象速度以及增长率的数值大小。为了对问题取得更完整而定量的了解，本文拟继续采用文献[5,6]中曾讨论过的那种最简单的星系模型，在各种不同的共转圈参数 a 下，求出相应的模式解及特征频率的数值结果。这些计算很好地验证了我们用渐近方法、量子化条件所导出的各项结论。

二、问题的提法与求解步骤

文献[7]曾指出：一般情况下星系密度波在盘对称面上的传播，可归为如下复域内的二阶常微分方程的特征值问题。

方程：

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + k_3^2(r, \omega) u = 0 \quad (2.1)$$

$$(k_3^2 = \lambda^2 [f_0^2(r)(\omega - \Omega_0(r))^2 + f_1(r)]),$$

边条件：

$$\text{当 } r \rightarrow \infty \text{ 时, } u e^{i\omega t} \text{ 满足辐射条件,} \quad (2.2)$$

$$\text{当 } r \rightarrow 0 \text{ 时, } u e^{i\omega t} \text{ 迅速衰减.} \quad (2.3)$$

这里的波数函数 $k_3^2(r, \omega)$ 可由星系的基态确定。其基本特征是：在共转圈 r_{co} 附近，有两个紧邻的复单零转向点；而在共转圈内某点 r_{ce} 处，有另一孤立的单零转向点，这种具有三个单零转向点的波数函数，最简单形式是：

$$k_3^2(r, \omega) = \lambda^2 r [(r - \hat{\omega})^2 - d], \quad (2.4)$$

$$\hat{\omega} = c - \omega, \quad \Omega_0(r) = c - r, \quad (2.5)$$

其中 $c, d, \lambda \gg 1$ 均为常数。假如我们认为 r_{ce} 值为实数（实际上，它可能有个很小的虚部）；而又假设在密度波存在的主要范围内，星系的迴转曲线 $\Omega_0(r)$ 可近似地用一条直线代替，那么在对自变量 r 作平移与相似变换以及其它一些简化后，我们便可得到波数函数的简化形式(2.4)。这时由于坐标原点已平移到转向点 r_{ce} ，边界条件(2.3)式相应地也应改写为如下渐近形式：

$$\text{当 } r \rightarrow -\infty \text{ 时, } u \text{ 迅速衰减.} \quad (2.6)$$

为求解方便起见，先作变换

$$\begin{cases} X = u, \\ Y = \frac{1}{X} \frac{dX}{dr}. \end{cases} \quad (2.7)$$

这时方程(2.1)可化为如下—阶方程组：

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dr} &= -Y^2 - k_3^2, \\ \frac{dX}{dr} &= XY \text{ 或 } X = Ae^{\int_0^r Y dr},\end{aligned}\quad (2.8)$$

注意, 由于 $\lambda \gg 1$, 当 $r \rightarrow \pm\infty$ 时, 我们可从(2.8)式得到如下渐近解:

$$Y \sim \pm ik_3 - \frac{1}{2} \frac{d \ln k_3}{dr}, \quad (2.9)$$

$$X \sim \frac{A}{k_3^{1/2}} e^{\pm i \int_0^r k_3 dr}, \quad (2.10)$$

其中取:

$$k_3 = -\lambda r^{1/2} [(r - \hat{\omega})^2 - d]^{1/2} \quad (2.11)$$

(当 $r \gg 1$ 时, $\text{Re}(k_3) < 0$).

因此, 为满足边界条件(2.2), (2.6), 我们要求方程(2.8)的解满足:

当 $r \rightarrow -\infty$ 时, $\text{Re}(Y) > 0$, 且

$$Y \sim Y^{(-)} = -ik_3 - \frac{1}{2} \frac{d \ln k_3}{dr}, \quad (2.12)$$

当 $r \rightarrow +\infty$ 时, $\text{Im}(Y) < 0$, 且

$$Y \sim Y^{(+)} = ik_3 - \frac{1}{2} \frac{d \ln k_3}{dr}. \quad (2.13)$$

从数值计算角度考虑, 可把自变量 r 变化范围限制在充分大的有限区间 $(R^{(-)}, R^{(+)})$ 内. 再把以上渐近条件(2.12), (2.13)式改写为固定边界条件, 我们有:

当 $r = R^{(-)}$ 时,

$$Y = Y^{(-)}, X = X_0 \quad (|X_0| \ll 1), \quad (2.14)$$

当 $r = R^{(+)}$ 时,

$$\left| \frac{Y - Y^{(+)}}{Y} \right| = e \ll 1, \quad |x| = 1, \quad (2.15)$$

$|X| = 1$ 是特征函数 $X(r)$ 的一种归一化条件, 由此便可唯一地确定积分常数 A 及初值 X_0 . 利用龙格-库塔法以及在复 (ω) 平面的迭代解法, 我们便可求出特征函数 $X(r)$ 以及特征值 $\{\omega\}$ 的数值结果.

三、量子化条件的结果

应用渐近方法, 可以在不必给出特征函数的数值结果的情况下, 直接给出问题的特征值 $\{\omega\}$. 这就是量子化条件. 在文献[6]中, 我们得到的量子化条件的一般形式是:

$$\phi = \int_{r_{cc}}^{r_{*2}} k_3 dr = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + \frac{a}{2} (\ln a - 1) - \frac{ia\pi}{4} - \frac{i}{2} \ln \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right)}{\sqrt{2\pi}} \right]. \quad (3.1)$$

当(2.4)式成立时, 我们有:

$$\phi = \lambda r_{*1}^{1/2} r_{*2}^2 \frac{\Gamma(\hat{b})\Gamma(\hat{c} - \hat{b})}{\Gamma(\hat{c})} F(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, Z), \quad (3.2)$$

其中

$$\begin{cases} Z = r_{*2}/r_{*1}, r_{*2} = \hat{\omega} - d^{\frac{1}{2}}, r_{*1} = \hat{\omega} + d^{\frac{1}{2}} \\ (0 \leq \arg(d) \leq 2\pi, \text{Im}(r_{*1} - r_{*2}) > 0), \\ a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = 3. \end{cases} \quad (3.3)$$

在这种星系模型中,共转圈参数 a 由下式确定:

$$a = \frac{1}{2} \lambda \hat{\omega}^{\frac{1}{2}} d. \quad (3.4)$$

特别是:

(1) 当 $a = d = 0$ 时,由 (3.1), (3.2) 式解出:

$$\hat{\omega}^{5/2} = \frac{15}{4\lambda} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{i}{4} \ln 2 \right]. \quad (3.5)$$

由此,对不同的量子数 n ,可很容易算出特征值 $\{\omega\}$. 图 1 中给出了相应结果. 其中共转圈半径 r_{co} 可表征 ω 的实部 ω_R 的大小. 因为:

$$r_{co} = C - \text{Re}(\omega) = C - \omega_R. \quad (3.6)$$

(2) 当 a 为实数时,考虑到 $|\omega_i| \ll |\omega_R|$. 我们曾推出(见文献[6,7]):

$$\begin{cases} \phi_R = \int_{r_{ce}}^{r_{*2}} (k_3)_{\omega_R} dr = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{\phi_0 - \phi_2}{2}, \\ \omega_i \tau_* = \frac{1}{2} \ln \Lambda, \end{cases} \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{cases} \phi_0 = \frac{a}{2} (\ln |a| - 1), \quad \phi_2 = \arg \Gamma \left(\frac{1}{2} + ia \right), \\ \Lambda = \sqrt{1 + e^{-2\pi a}}, \tau_* = \int_{r_{ce}}^{r_{*2}} \left(\frac{\partial k_3}{\partial \omega} \right)_{\omega_R} dr. \end{cases} \quad (3.8)$$

不过,当 $a < 0$ 时, (3.7), (3.8) 式中的积分限 r_{*2} 要用 r'_{*L} 代替(其意义见文献[6]的图 2),并

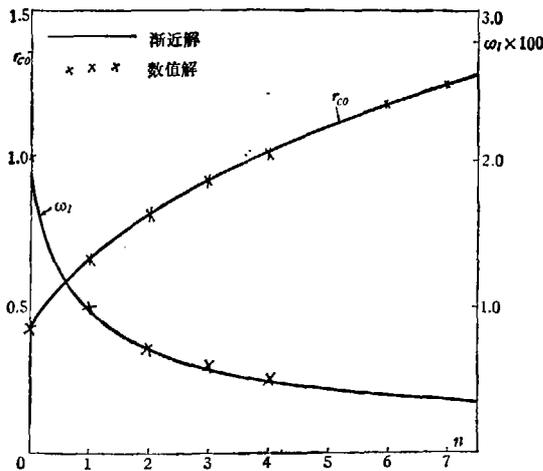


图 1 $a = d = 0$ 情况的量子化条件计算结果与验证

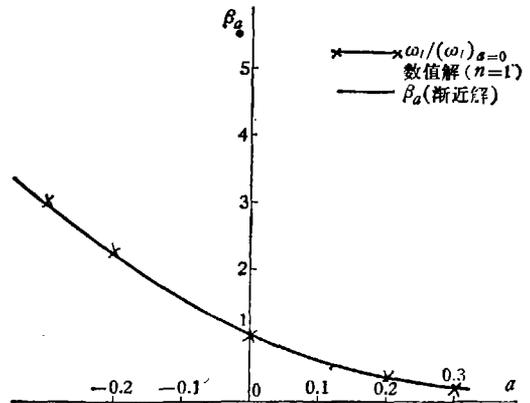


图 2 β_a 因子随参数 a 的变化曲线及验证

且作为近似,忽略高阶小量后, r'_{co} , r_* 或 r'_{*L} 均取在 r 的实轴上. 由以上可推出:

$$\beta_a = \frac{\omega_l r_*}{(\omega_l r_*)_{a=0}} = 2 \frac{\ln \Lambda}{\ln 2} = \frac{\ln \sqrt{1 + e^{-2\alpha a}}}{\ln 2}. \quad (3.9)$$

更进一步,由于 ω_l 对参数 a 的变化不敏感,从而参数 α_* 对 a 的变化亦不会很敏感,因此我们还可以取, $\alpha_* \approx (\alpha_*)_{a=0}$ 以及

$$\beta_a \approx \frac{\omega}{(\omega_l)_{a=0}}. \quad (3.10)$$

图 2 给出了这种 β_a 因子对实参数 a 的变化曲线.

四、数值解的结果及讨论

今取

$$\lambda = 50, C = 2.0, R^{(-)} = -0.5, R^{(+)} = 1.5; \quad (4.1)$$

精度要求

$$e < 0.0001. \quad (4.2)$$

在不同的共转圈参数 a 或 d 下,我们作出了问题的数值解,计算很好地印证了上述渐近分析的结果,现分述如下:

1. Waser 机制与量子数 n 的关系 我们取 $a = d = 0$, 对不同的量子数 n 求解,表 1 中列举了相应的特征值结果. 情况表明: 星系密度波传播方程(2.1), 的确存在具有离散谱的增长型模式解. 当量子数 n 不断增加时,增长率 ω_l 不断减小,而且共转圈位置 r_{co} 随之外移. 在图 3 中画出了相应特征函数曲线. 值得注意的是: 量子数 $n = 0$ 的模式增长最快,而且共转圈最靠近中心.

表 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7
r_{co} (分析)	0.4257	0.6598	0.8095	0.9258	1.024	1.109	1.186	1.256
r_{co} (数值)	0.4243	0.6594	0.8092	0.9258	1.024			
ω_l (分析)	-0.1872 (-1)	-0.9701 (-2)	-0.7141 (-2)	-0.5836 (-2)	-0.5019 (-2)	-0.4450 (-2)	-0.4025 (-2)	-0.3694 (-2)
ω_l (数值)	-0.2032 (-1)	-0.9984 (-2)	-0.7231 (-2)	-0.6092 (-2)	-0.5390 (-2)			

2. 增长模式个数的考核 对于确定的参数 a 及量子数 n , 能找出几个满足辐射边条件的模式? 这是个有重要意义的问题, 因为由量子化条件, 我们可以解出一个以上的特征频率值. 比如当 $a = 0$ 时, 由公式(3.5)可得出 5 个彼此不同的解. 在表 2 中, 我们列出了 ($a = 0, n = 1$) 时的数值结果. 当然, 由于要 $r_{co} > r_{co} = 0$, 我们可以排除 No. 3, 4, 两个解. 但是 No. 1, 2, 5 三个解是否都能成立呢? 数值解的结果表明: No. 5 的大增长率模式不能满足外行波条件; No. 2 的大衰减率模式虽能满足外行波条件, 但是当 $r \rightarrow \infty$ 时, 波的振幅不断增加, 因此还是不能满足 Sommerfield 意义下的辐射条件. 因此唯有 No. 1 解有物理意义. 这就是我们

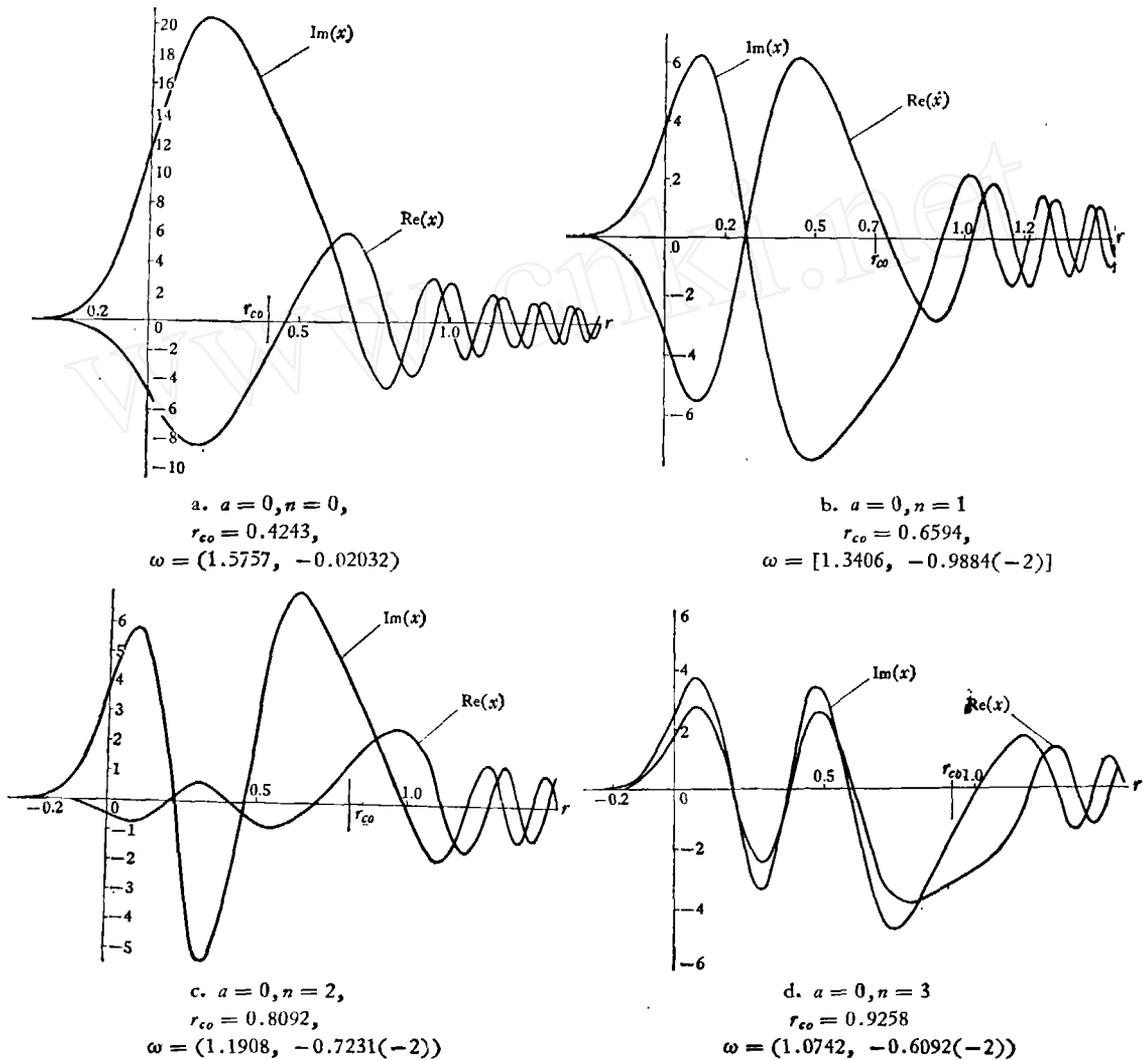


图3 特征函数随 r 的变化

上面列举的那种小增长率的模式解。不过直接从方程 (2.1), 我们也可断定: 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时,

$$\omega_I = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

因此那种大虚部的解也是应当排除的。

3. 内边界条件的影响研究 外辐射边条件的作用十分显著, 这在前面已见一斑了。内边界条件影响大小如何呢? 我们上面用的是衰减型内边界条件, 它描述着波不能渗入星系的中心区域。有的作者采用了另一种边条件:

$$\text{当 } r \rightarrow 0 \text{ 时, } Y \rightarrow 0. \tag{4.3}$$

同样也得到增长型模式。那末会问: 这两种边条件所得出的解差别有多大? 我们以 $a = -0.2,$ $n = 1$ 为例, 分别采用这两种条件进行计算, 结果发现: 两种内边界条件得出的特征值十分接近, 而特征函数的波形也只略有差别(参看图 4a)。具体数值如下: 在边条件(4.3)式下:

$$r_{co} = 0.6361, \omega_R = 1.3639, \omega_I = -0.02226; \quad (4.4)$$

在边条件(2.14)式下:

$$r_{co} = 0.6361, \omega_R = 1.3639, \omega_I = -0.02227. \quad (4.5)$$

甚至我们以内边界条件: $r = R^{(-)}$, $Y = Y^{(+)}$ 进行计算, 结果也没有多大差别.

表 2

No.	1	2	3	4	5
r_{co}	0.6569	0.2131	-0.5281	-0.5395	0.1947
ω_R	1.3402	1.7869	2.5281	2.5395	1.8054
ω_I	-0.9701(-2)	0.6245	0.3957	-0.37995	-0.6305

4. 共转圈势垒与势谷特性的考察 我们取参数 a 为实数验证渐近分析曾导出的结果. 取 $n = 1$, $a = -0.3, -0.2, 0, 0.2, 0.3$, 得出的特征值已列于表 3 和图 2 中标出. 由此看出:

表 3 $n = 1$

a	ω_R	ω_I	ω_I/ω_I	β_a	r_{co}	d
-0.3	1.3742	-0.3024 (-1)	3.029	2.924	0.6257	(-0.1516(-1), 0.3660(-3))
-0.2	1.3639	-0.2226 (-1)	2.229	2.174	0.6361	(-0.1003(-1), 0.1754(-3))
-0.1				1.523		
0	1.3406	-0.9984 (-2)	1.0	1.0	0.6594	(0.0, 0.0)
0.1				0.6170		
0.2	1.3175	-0.3475 (-2)	0.3481	0.3613	0.6825	(0.9683(-2), -0.2465(-4))
0.3	1.3067	-0.1915 (-2)	0.1918	0.2040	0.6933	(0.1441(-1), -0.1990(-4))

数值解得出的增长率比值 $\omega_I/(\omega_I)_{a=0}$ 与量子化条件算出的 β_a 因子的近似值十分符合. 在图 4b 中我们画出了对应于 $a = \pm 0.2$ 的特征函数曲线, 图中的波形证实了我们在文献[6]中所作的关于共转圈“势垒”, “势谷”特性的描述. 的确, 当 $a > 0$ 时, 在共转圈附近存在一“势垒”, 波在势垒中有着隧道效应, 因而可以由共转圈内向外渗透. a 值越大, 势垒越高, 这种渗透越难, 模式增长率亦越小; 当 $a < 0$ 时, 情况则完全不同. 共转圈区域表现为一种“势谷”, 密度波很容易越过这一区域, 由内向外发射.

5. Waser 机制的开关特性 我们考察当参数 d (或 a) 取一般复数时解的特性. 将参数 d 表为 $d = |d|e^{i\theta}$. 在文献[6]中, 我们曾固定 $|d|$, 而将相角 θ 从 $0 \rightarrow \infty$, 从量子化条件的研究推出: 模式增长率将出现以 (2π) 为周期的起伏变化. 我们当时把这种现象称为 Waser 机制的开关特性. 这个结论定性上是对的. 不过, 那时我们对量子化条件的计算过于粗略. 所得 ω_I 对 θ 的变化曲线形状不够精确. 这里我们重新对一般情况下的量子化条件作了更精确的计算, 并且与数值解的结果进行了对照.

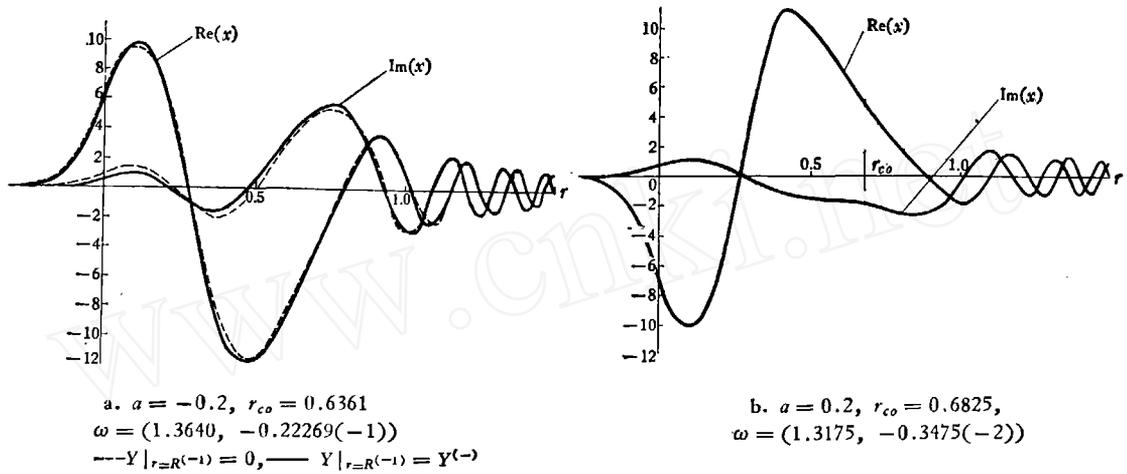


图 4 参数 a 取实数时,特征函数的波型

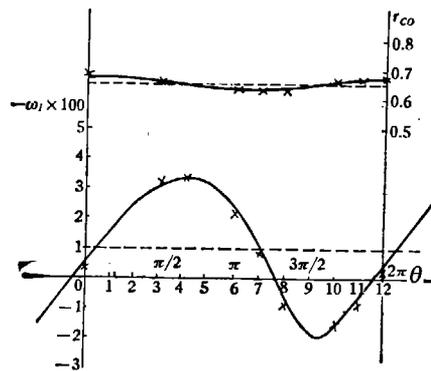


图 5 Waser 机制的开关特性的验证

×——×数值解 ($n=1, |d|=0.01$)
 ---渐近解 ($d=0, n=1$)
 ——渐近解 ($|d|=0.01, n=1$)

设 $|d| = 0.01, \theta = 0 \rightarrow 2\pi$. 相应数值结果表示如图 5. 其中实曲线是量子化条件给出的,而叉点是数值解的结果. 由图 5 看出:

(1) 当参数 d 的位相 θ 增加时,模式增长率的确出现了以 (2π) 为周期的巨大起伏变化. 当 θ 取 (π) 附近(区间(I))的值时,解的增长率很大 ($\omega_l/(\omega_l)_{a=0} > 1$); 当 θ 取 $(\frac{3}{2}\pi)$ 附近(区域(II))的值时,则不存在增长型模式. 有 $\omega_l > 0$, 解变为衰减型.

(2) 相对地说,共转圈半径 r_{co} 对 θ 的变化不大敏感.

(3) 渐近方法得出的结果与数值解结果十分一致. 特别应注意: 量子化条件(3.1)式只是渐近近似的最低阶项. 在这种情况下,能达到如此相符程度是令人满意的.

(4) 当位相 θ 取不同象限值时,特征函数的波形有很大变化. 在图 6 中,我们给出了 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ 时相应的波形曲线.

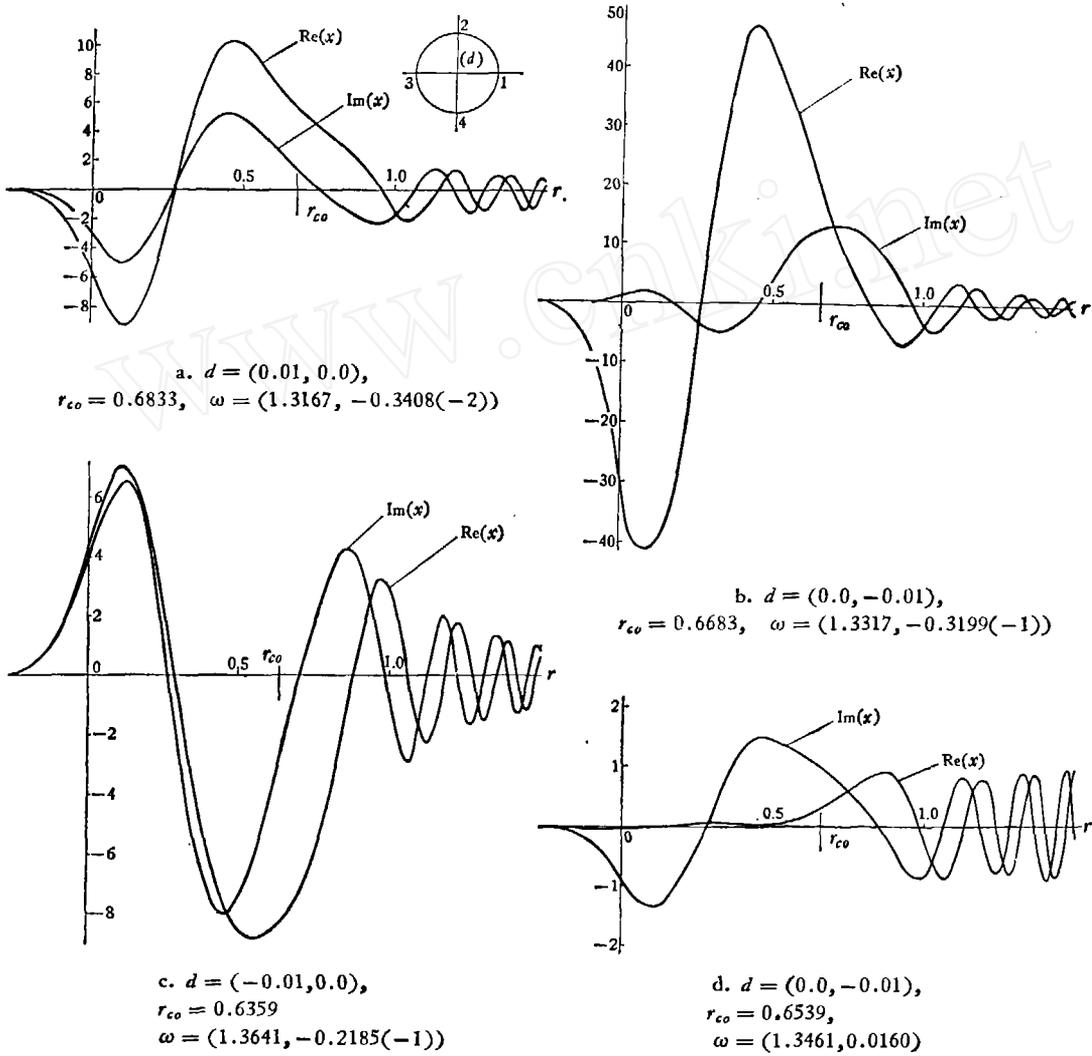


图 6 参数 d 取一般复值时特征函数图形

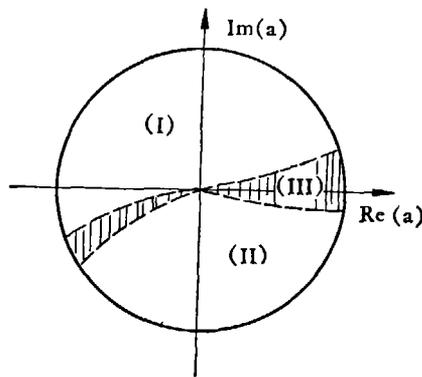


图 7 星系分类区域示意

五、结 束 语

前面虽然只是对一种十分简化的星系模型作出计算,但是所得结果却能给我们勾画出一一般星系模型下密度波的定性特性.着眼于螺旋图象的维持问题,由前面计算结果我们可将共转圈参数 a 的复平面,划分出区域(I),(II),(III).不同的星系基态给出不同的参数 a ,从而分属于不同的区域(如图7).其中:(I)存在大增长率模式,螺旋结构容易维持,图象清晰;(II)螺旋图象的“禁区”,不存在增长型模式, $\beta < 0$,螺旋结构不能维持;(III)存在小增长率的模式($0 \leq \beta \leq 1$),螺旋图象将相对模糊.

在通常情况下,中心凸起的,薄盘星系属于区域(I);盘厚增大后将属于区域(III).同时应当指出:共转圈奇异性可以为参数 a 提供一个较大的虚部,因此,共转圈共振的作用有可能使星系属于区域(II),也可能使星系属于区域(I).关于这个问题我们拟另文讨论.

参 考 文 献

- [1] C. C. Lin & Y. Y. Lau, *SIMA, J. Appl. Math.*, **29**(1975), 352.
- [2] Mark, J. W-K., et al., *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **73**(1976), 1379.
- [3] Y. Y. Lau, et al., *Adv. in Math.*, **22**(1976), 120.
- [4] Panatoni, R. F., *Thesis of Ph. D.*, 1979.
- [5] Nishimoto, T., *Studies in Appl. Math.*, **10**(1979), 11—26.
- [6] 徐建军, *中国科学*, 1980, 6:550.
- [7] ———, 同上, 1980, 8:738.