

形成人工血栓的 Chandler 圆环内的流动分析

吴望一 钱民全

(北京大学力学系) (中国科学院力学研究所)

摘 要

本文应用流体力学方法对 Chandler 圆环内人工血栓形成的流动情况进行了细致分析。结果表明,形成血栓的下弯月面附近是一个既有迴流,又有二次流的区域,而且迴流的中心主流冲击着弯月面,为颗粒的聚集提供了有利的条件。本文对分析与血液流动有关的人工脏器和体内血栓形成的机理有一定的价值。

一、引 言

血栓的形成机理是医学界十分关注的一个问题。这是因为它的解决涉及到许多不同学科,例如病理生理学、生物化学以及流体动力学等等。

人们在医学实践中,提出了不同的血栓形成学说,但这仅限于病理生理学和生物化学方面的探讨。然而,由于血栓是在体内血液流动的状态下形成的,所以血栓的形成也必然地和血液动力学的特性有着直接的关系。因此,研究血栓形成区的流场,显然有助于了解血栓形成的过程。

1958年,Chandler^[1]发明了一种人工产生血栓的装置,它是由一个直径为几毫米的塑料管首尾相接围成一个直径为几厘米的圆环,在塑料管内注入稍少于半环的血液,然后以一定的角速度在铅垂平面中旋转,在起动后几分钟就可在下弯月面附近形成一个血栓。这种体外的人工形成的血栓经详细的组织学分析已经证明:它同在活体中的血栓有相同的结构^[1,2]。Chandler 圆环研制成功为研究血栓形成的机理提供了一个有用的装置。

以后国内外的人们利用 Chandler 圆环从不同的角度研究有关血栓问题。有的利用它来检验药物对全血形成血栓的影响,有的利用它来检查病人血液形成血栓的情况等等,以便判断药物的作用和病人治疗的情况等等。

Gardner^[3]曾介绍过 Chandler 圆环内主流的情况,但未能将 Chandler 圆环的整个流动作详细的分析。

本文利用了流体力学方法,对 Chandler 圆环内人工血栓形成区附近的复杂的三维流动进行了较为细致的分析。分析表明,形成血栓的下弯月面是一个既有迴流又有二次流的区域,而且其迴流的中心主流冲击着下弯月面,为颗粒的聚集提供了有利条件。

我们的工作对研究与血液流动有关的人工脏器和体内血栓形成的机理有一定意义,而且

本文于1980年8月5日收到。

对研究潜水减压病,微循环障碍方面也有一定的意义.

二、流动分析、方程及边界条件

当圆环以 ω 的角速度在铅直平面上顺时针方面旋转时,左边的上弯月面上升,右边的下弯月面下降,从而造成液面差 h . 由此产生的重力压差是推动环内流体运动的动力. 当圆环旋转时,由于血液和玻璃管壁的附着作用,将有很薄的一层血液膜继续留在壁面上被带向圆环上半部. Chandler 圆环的主要参数见图 1. 当下弯月面处产生血栓后,由于血栓对流动的进一步滞止作用,和血栓本身的重量使下弯月面进一步下降,上弯月面进一步上升. 下面来研究这样的流场,这种流场为形成血栓提供了有利条件.

Chandler 圆环内的流动是一个具有自由面的复杂的三维流动. 一方面,被壁面带着跑的流体在上弯月面处受阻,被迫折回形成迴流. 此流动沿轴向流至下弯月面时,又被下弯月面阻挡,反向沿壁面折回形成和上弯月面相反方向的迴流(见图 3). 另一方面,由于圆环的曲率将产生二次流,这主要来源于两种效应. 第一种是由于惯性力引起的,第二种是自由面端缘效应引起的. 由此可见,上下弯月面是一个既有迴流又有二次流的复杂流动区.

根据问题的特点,我们作如下简化和假设:

1. 流体是粘性不可压缩的.
2. 流体假设是牛顿的,这是因为本问题中圆管半径较粗,非牛顿效应不显著.
3. 假设血液是均质单相流体.
4. 因为圆环上半部血液膜很薄,所以假设此膜的厚度为零.
5. 估计自由面的形状对迴流和二次流影响不大,因而可近似地用平面代替自由面,但保留表面张力效应.
6. 认为 $R' \gg a$, 故 a/R' 是小参数.

选择如图 3 所示的坐标系 (r, ϕ, θ) , 取 $a, U = \omega R', \frac{\mu U}{a}, \mu U$ 为长度、速度、压力和表面张力的特征量,将所有的几何量和物理量无量纲化后得:

$$v_r = v'_r U, v_\theta = v'_\theta U, v_\phi = v'_\phi U, p_1 = \frac{\mu U}{a} p'_1,$$

$$r = r' a, R = R' a, T = T' \mu U, G = \frac{g a^2}{\mu U}, Re = \frac{a U}{\nu}, \quad (2.1)$$

其中带撇的是有量纲量,不带撇的是无量纲量. v_r, v_ϕ, v_θ 分别是 r, ϕ, θ 方向的速度分量, p_1 是压力, T 是表面张力, μ 是运动学粘性系数, g 是重力加速度, Re 是雷诺数.

在 (r, θ, ϕ) 坐标系中写出 Chandler 圆环内粘性不可压缩流体定常运动满足的无量纲形式的方程组及边界条件:

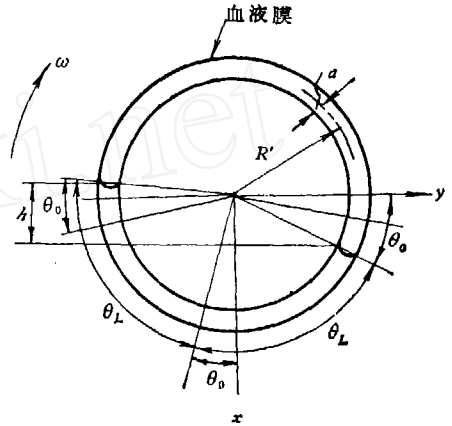


图 1

$$\begin{aligned} (R' = 4.05 \text{ 厘米}, \rho = 1.056 \text{ 克/厘米}^3, \\ \nu = 0.04 \text{ 泊}, g = 980 \text{ 厘米/秒}^2, T = 54 \\ \text{达因/厘米}, L_0 = \theta_0 \frac{R'}{a} = 2.4, \lambda = \theta_L \frac{R'}{a} \\ = 44, \omega = 15 \text{ 转/分}, \frac{a}{R'} = 0.0358) \end{aligned}$$

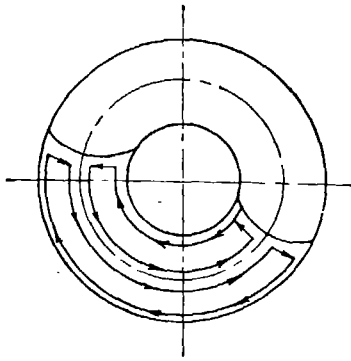


图 2

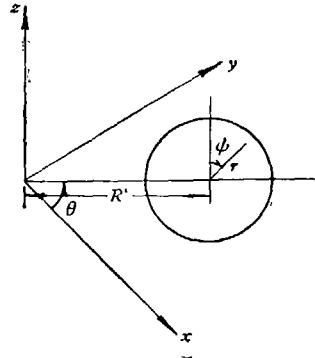


图 3

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + \frac{v_\theta}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\psi^2}{r} - \frac{v_\theta^2}{R+r \sin \psi} \sin \psi \right) &= -\frac{\partial p_1}{\partial r} \\
 + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \psi^2} + \frac{\sin \psi}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\cos \psi}{r(R+r \sin \psi)} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} \\
 + \frac{1}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{v_r \sin^2 \psi}{(R+r \sin \psi)^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} \\
 - \frac{v_\psi \sin \psi \cos \psi}{(R+r \sin \psi)^2} - \frac{v_\psi \cos \psi}{r(R+r \sin \psi)} - \frac{2 \sin \psi}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\
 + G \cos(\theta - \theta_0) \sin \psi, \\
 \operatorname{Re} \left(v_r \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{v_\theta}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_\psi}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\psi}{r} - \frac{v_\theta^2}{r(R+r \sin \psi)} r \cos \psi \right) \\
 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \psi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} - \frac{v_r \sin \psi \cos \psi}{(R+r \sin \psi)^2} + \frac{v_r \cos \psi}{r(R+r \sin \psi)} + \frac{\partial^2 v_\psi}{\partial r^2} \\
 + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\psi}{\partial \psi^2} + \frac{\sin \psi}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{1}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial^2 v_\psi}{\partial \theta^2} \\
 + \frac{\cos \psi}{r(R+r \sin \psi)} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} - \frac{v_\psi}{r^2} - \frac{v_\psi \cos^2 \psi}{(R+r \sin \psi)^2} - \frac{2 \cos \psi}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\
 + G \cos(\theta - \theta_0) \cos \psi. \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \psi} + \frac{v_\theta}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{R+r \sin \psi} \sin \psi + \frac{v_\theta v_\psi}{R+r \sin \psi} \cos \psi \right) \\
 = -\frac{1}{R+r \sin \psi} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \psi}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \psi}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial v_\psi}{\partial \theta} \\
 + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \psi^2} + \frac{\sin \psi}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{(R+r \sin \psi)^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \\
 + \frac{\cos \psi}{r(R+r \sin \psi)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \psi} - \frac{v_\theta}{(R+r \sin \psi)^2} + G \sin(\theta_0 - \theta) \\
 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{v_r \sin \psi}{R+r \sin \psi} + \frac{v_\psi \cos \psi}{R+r \sin \psi} + \frac{1}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\text{在 } r=1 \text{ 时, } \quad v_r = v_\psi = 0, \quad v_\theta = -\left(1 + \frac{1}{R} \sin \psi\right). \tag{2.3}$$

在自由面 $\theta = \pm\theta_L + F_{\pm}(r, \psi)$ 上,

$$\begin{cases} v_r n_r + v_{\theta} n_{\theta} + v_{\psi} n_{\psi} = 0, \\ p_1 = F_{\pm} - T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + p_{rr} n_r^2 + p_{\psi\psi} n_{\psi}^2 + p_{\theta\theta} n_{\theta}^2 + 2p_{r\psi} n_r n_{\psi} \\ \quad + 2p_{\theta\psi} n_{\theta} n_{\psi} + 2p_{r\theta} n_r n_{\theta}, \\ p_{rr} n_r \tau_r + p_{r\psi} n_{\psi} \tau_r + p_{\theta\theta} n_{\theta} \tau_r + p_{\theta\psi} n_{\psi} \tau_{\theta} + p_{\psi\theta} n_{\theta} \tau_{\psi} + p_{\theta\theta} n_{\theta} \tau_{\theta} = 0, \\ F_{\pm} n_r \gamma_{\psi} + p_{\psi\psi} n_{\psi} \gamma_{\psi} + p_{\theta\psi} n_{\theta} \gamma_{\psi} + p_{r\theta} n_r \gamma_{\theta} + p_{\psi\theta} n_{\psi} \gamma_{\theta} + p_{\theta\theta} n_{\theta} \gamma_{\theta} = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 $F_{\pm}(r, \psi)$ 是上下弯月面满足的方程, $(n_r, n_{\psi}, n_{\theta}), (\tau_r, \tau_{\psi}, \tau_{\theta}), (\gamma_r, \gamma_{\psi}, \gamma_{\theta})$ 分别是自由面法线单位向量和两个切线单位向量的三个方向余弦, R_1, R_2 是自由面的两个主曲率半径, 它们都可以通过 F_{\pm} 表示出来, p_0 是大气压, $p_{rr}, p_{\psi\psi}, p_{\theta\theta}, p_{r\psi}, p_{\psi\theta}, p_{r\theta}$ 是粘性应力张量各分量, 它们和变形速度张量各分量的关系为:

$$\begin{cases} p_{rr} = 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, p_{\psi\psi} = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_{\psi}}{\partial \psi} + \frac{v_r}{r} \right), p_{\theta\theta} = 2 \left(\frac{1}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cos \psi}{R+r \sin \psi} v_{\psi} \right. \\ \quad \left. + \frac{\sin \psi}{R+r \sin \psi} v_r \right) \\ p_{r\psi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + \frac{\partial v_{\psi}}{\partial r} - \frac{v_{\psi}}{r}, p_{r\theta} = \frac{1}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_{\psi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \psi} - \frac{\cos \psi}{R+r \sin \psi} v_{\theta}, \\ p_{\theta r} = \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{R+r \sin \psi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{\sin \psi}{R+r \sin \psi} v_{\theta}, \end{cases} \quad (2.5)$$

θ_L 和 θ_0 的意义如图 1 所示.

将重力项吸收进压力项中去, 为此引进:

$$p = p_1 + G(R+r \sin \psi) \cos(\theta_0 - \theta). \quad (2.6)$$

于是方程 (2.2) 中重力项不出现, 其次方程 (2.4) 中第二式应改写为:

$$\begin{aligned} p = p_0 - G(R+r \sin \psi) \cos(\theta_0 - \theta) - T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + p_{rr} n_r^2 + p_{\psi\psi} n_{\psi}^2 + p_{\theta\theta} n_{\theta}^2 \\ + 2p_{r\psi} n_r n_{\psi} + 2p_{\psi\theta} n_{\psi} n_{\theta} + 2p_{r\theta} n_r n_{\theta}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

由于 $1/R$ 是小参数, 因此 Chandler 圆环内流动可以看成是直管内相应的流动加上一个小的曲率修正. 考虑到 $r = 1$ 处边界条件的形式, 我们将 $v_r, v_{\psi}, v_{\theta}, p, F_{\pm}$ 对小参数 $1/R$ 展开, 并将一级近似项中的 ψ 按下列形式分离出来, 于是有:

$$\begin{cases} v_r(r, \psi, \theta) = \bar{v}_r(r, \theta) + \frac{1}{R} \tilde{v}_r(r, \theta) \sin \psi + \dots, \\ v_{\theta}(r, \psi, \theta) = \bar{v}_{\theta}(r, \theta) + \frac{1}{R} \tilde{v}_{\theta}(r, \theta) \sin \psi + \dots, \\ v_{\psi}(r, \psi, \theta) = \frac{1}{R} \tilde{v}_{\psi}(r, \theta) \cos \psi + \dots, \\ p(r, \psi, \theta) = \bar{p}(r, \theta) + \frac{1}{R} \tilde{p}(r, \theta) \sin \psi + \dots, \\ F_{\pm}(r, \psi) = \bar{F}_{\pm}(r) + \frac{1}{R} \tilde{F}_{\pm}(r) \sin \psi + \dots. \end{cases} \quad (2.8)$$

相应地将 $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$; n_r, n_ϕ, n_θ ; $\tau_r, \tau_\phi, \tau_\theta$; $\gamma_r, \gamma_\phi, \gamma_\theta$; $p_{rr}, p_{\phi\phi}, p_{\theta\theta}, p_{r\theta}, p_{\phi\theta}, p_{r\phi}$ 分别按小参数 $1/R$ 展开得:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R_{av}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\bar{R}_{av}} + \frac{1}{\tilde{R}_{av}} \frac{\sin \phi}{R} = [r^3 \bar{F}'' + r^2(1 + \bar{F}'^2) \bar{F}'] [r^2(1 + \bar{F}'^2)]^{-3/2} \\
 &+ \frac{\sin \phi}{R} \left\{ [r^2(1 + \bar{F}'^2)]^{-3/2} [(1 + \bar{F}'^2)(3r^2 \bar{F}' + r^2 \tilde{F}' - r \tilde{F}) + r^4 \bar{F}'' \right. \\
 &+ r^3 \tilde{F}'' + r^3 \bar{F}'^3 + 2r^2 \bar{F}'^2 \tilde{F}'] - \frac{3}{2} [r^2(1 + \bar{F}'^2)]^{-5/2} (2r^2 \bar{F}' \tilde{F}' \\
 &\left. + 2r^3 \bar{F}'^2) [r^3 \bar{F}'' + r^2(1 + \bar{F}'^2) \bar{F}'] \right\}, \\
 n_r &= \bar{n}_r + \frac{\sin \phi}{R} \tilde{n}_r = -\bar{F}'(1 + \bar{F}'^2)^{-1/2} \left\{ 1 + \frac{\sin \phi}{R} [r(1 + \bar{F}'^2)^{-1} \right. \\
 &\left. - \bar{F}' \tilde{F}'(1 + \bar{F}'^2)^{-1} + \tilde{F}' \bar{F}'^{-1}] \right\} \\
 n_\phi &= \frac{\cos \phi}{R} \tilde{n}_\phi = -\frac{\cos \phi}{R} \tilde{F}(1 + \bar{F}'^2)^{-1/2} r^{-1}, \\
 n_\theta &= \bar{n}_\theta + \frac{\sin \phi}{R} \tilde{n}_\theta = (1 + \bar{F}'^2)^{-1/2} \left\{ 1 + \frac{\sin \phi}{R} [r(1 + \bar{F}'^2)^{-1} - \bar{F}' \tilde{F}'(1 + \bar{F}'^2)^{-1} - r] \right\}, \\
 \tau_r &= \bar{\tau}_r + \frac{\sin \phi}{R} \tilde{\tau}_r = (1 + \bar{F}'^2)^{-1/2} \left\{ 1 - \frac{\sin \phi}{R} [\bar{F}' \tilde{F}'(1 + \bar{F}'^2)^{-1} + r \bar{F}'^2(1 + \bar{F}'^2)^{-1}] \right\}, \\
 \tau_\phi &= 0, \\
 \tau_\theta &= \bar{\tau}_\theta + \frac{\sin \phi}{R} \tilde{\tau}_\theta = \bar{F}'(1 + \bar{F}'^2)^{-1/2} \left\{ 1 - \frac{\sin \phi}{R} [\bar{F}' \tilde{F}'(1 + \bar{F}'^2)^{-1} \right. \\
 &\left. + r \bar{F}'^2(1 + \bar{F}'^2)^{-1} - r - \tilde{F}' \bar{F}'^{-1}] \right\}, \\
 \gamma_r &= 0, \\
 \gamma_\phi &= \tilde{\gamma}_\phi = 1, \\
 \gamma_\theta &= \tilde{\gamma}_\theta \frac{\cos \phi}{R} = \frac{\cos \phi}{R} \tilde{F} r^{-1}, \\
 p_{rr} &= \bar{p}_{rr} + \frac{\sin \phi}{R} \tilde{p}_{rr} = 2 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\sin \phi}{R} \left(2 \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} \right), \\
 p_{\phi\phi} &= \bar{p}_{\phi\phi} + \frac{\sin \phi}{R} \tilde{p}_{\phi\phi} = 2 \frac{\bar{v}_r}{r} + \frac{\sin \phi}{R} \left[2 \left(-\frac{\tilde{v}_\phi}{r} + \frac{\tilde{v}_r}{r} \right) \right], \\
 p_{\theta\theta} &= \bar{p}_{\theta\theta} + \frac{\sin \phi}{R} \tilde{p}_{\theta\theta} = 2 \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\sin \phi}{R} \left[2 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{r}{R} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \bar{v}_r \right) \right], \\
 p_{r\phi} &= \frac{\cos \phi}{R} \tilde{p}_{r\phi} = \frac{\cos \phi}{R} \left(\frac{\tilde{v}_r}{r} + \frac{\partial \tilde{v}_\phi}{\partial r} - \frac{\tilde{v}_\phi}{r} \right), \\
 p_{\phi\theta} &= \frac{\cos \phi}{R} \tilde{p}_{\phi\theta} = \frac{\cos \phi}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{v}_\phi}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}_\theta}{r} - \bar{v}_\theta \right), \\
 p_{r\theta} &= \bar{p}_{r\theta} + \frac{\sin \phi}{R} \tilde{p}_{r\theta} = \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_r}{R \partial \theta} + \frac{\sin \phi}{R} \left[\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - \frac{r}{R} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} - \bar{v}_\theta \right],
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中带“-”的量是零级近似,带“~”的量是一级近似。在推导 $\frac{1}{R_{av}}$ 的表达式时,我们取 r, ψ 为高斯坐标,于是自由面的参数方程为:

$$\begin{aligned} x &= (R + r \sin \psi) \cos \theta, & y &= (R + r \sin \psi) \sin \theta \\ z &= r \cos \psi, & \theta &= \frac{1}{R} \bar{F}(r) + \frac{1}{R^2} \tilde{F}(r) \sin \psi. \end{aligned}$$

利用公式

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{(EG - F^2)^{3/2}} \times \begin{vmatrix} E \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - 2F \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + G \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & E \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - 2F \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + G \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & E \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2F \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + G \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, & G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}$$

经过冗长繁复但完全是初等的运算,我们得到 (2.9) 式中的第一式。

将 (2.8), (2.9) 式代入方程 (2.2) 和边界条件 (2.3)(2.4) 式中去,并将自由面上边界条件转移到直管自由面 $\theta = \pm \theta_L + \frac{1}{R} \bar{F}_{\pm}(r)$ 上得下列零级近似和一级近似方程组及边界条件。

零级近似(直管情形)

$$\begin{cases} \text{Re} \left(\bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{R} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial \theta^2} - \frac{\bar{v}_r}{r^2}, \\ \text{Re} \left(\bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{R} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_r}{r} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

在 $r = 1$ 处, $\bar{v}_r = 0, \bar{v}_\theta = -1.$ (2.11)

在 $\theta = \pm \theta_L + \frac{1}{R} \bar{F}_{\pm}(r)$ 处,

$$\begin{cases} \bar{v}_r \bar{n}_r + \bar{v}_\theta \bar{n}_\theta = 0, \\ \left(\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} \right) (\bar{n}_r^2 - \bar{n}_\theta^2) + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}_\theta}{R \partial \theta} - \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \right) \bar{n}_\theta \bar{n}_r = 0, \\ \bar{p} = p_a - GR \cos(\theta_0 - \theta) - \frac{T}{R_{av}} + 2 \left[\frac{\partial \bar{v}_\theta}{R \partial \theta} \bar{n}_\theta^2 + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \bar{n}_r^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{R \partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} \right) \bar{n}_r \bar{n}_\theta \right], \end{cases} \quad (2.12)$$

其中

$$n_{r\mp} = \mp \bar{F}(1 + \bar{F}'^2)^{-1/2}, \quad n_{\theta\mp} = \pm(1 + \bar{F}'^2)^{-1/2}, \quad \frac{1}{R_{av}} = \bar{F}''(1 + \bar{F}'^2)^{-3/4} + \bar{F}'(1 + \bar{F}'^2)^{-1/2}r^{-1}. \quad (2.13)$$

一级近似(曲率效应)

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{Re} \left(\bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \bar{v}_\theta \frac{\partial \tilde{v}_r}{R \partial \theta} + \tilde{v}_\theta \frac{\partial \bar{v}_r}{R \partial \theta} - r \bar{v}_\theta \frac{\partial \bar{v}_r}{R \partial \theta} \right) - \text{Re} \bar{v}_\theta^2 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial r^2} \\ & \quad + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \theta^2} - \frac{2\tilde{v}_r}{r^2} + \frac{2\tilde{v}_\psi}{r^2} - 2r \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{R^2 \partial \theta^2} - 2 \frac{\partial \bar{v}_\theta}{R \partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r}, \\ & \text{Re} \left(\bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_\psi}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{R} \frac{\partial \tilde{v}_\psi}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r \tilde{v}_\psi}{r} \right) - \text{Re} \bar{v}_\theta^2 = -\frac{\tilde{p}}{r} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\psi}{\partial r} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\psi}{\partial \theta^2} \\ & \quad - \frac{2\tilde{v}_\psi}{r^2} + \frac{2\tilde{v}_r}{r^2} + \frac{\bar{v}_r}{r} - \frac{2}{R} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta}, \\ & \text{Re} \left(\bar{v}_r \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \bar{v}_\theta \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{R \partial \theta} + \tilde{v}_\theta \frac{\partial \bar{v}_\theta}{R \partial \theta} - r \bar{v}_\theta \frac{\partial \bar{v}_\theta}{R \partial \theta} + \bar{v}_r \bar{v}_\theta \right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \\ & \quad + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} - 2r \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{R^2 \partial \theta^2} + r \frac{\partial \tilde{p}}{R \partial \theta}, \\ & \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r} + \frac{1}{R} + \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}_\psi}{r} + \bar{v} - r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{R \partial \theta} = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.14)$$

$$\text{在 } r = 1 \text{ 处,} \quad \tilde{v}_r = 0, \quad \bar{v}_\psi = 0, \quad \tilde{v}_\theta = -1. \quad (2.15)$$

在 $\theta = \pm \theta_L + \frac{1}{R} \bar{F}_\pm(r)$ 处,

$$\left\{ \begin{aligned} & \bar{v}_r \bar{n}_r + \tilde{v}_r \bar{n}_r + \bar{v}_\theta \bar{n}_\theta + \tilde{v}_\theta \bar{n}_\theta + \frac{\partial \bar{v}_r}{R \partial \theta} \bar{n}_r \bar{F}(r) + \frac{\partial \bar{v}_\theta}{R \partial \theta} \bar{n}_\theta \bar{F}(r) = 0, \\ & \tilde{p} = -\frac{T}{\bar{R}_{av}} - Gr \cos(\theta_0 - \theta) + 2\tilde{p}_{rr} \bar{n}_r \bar{n}_r + \tilde{p}_{rr} \bar{n}_r^2 + 2\tilde{p}_{\theta\theta} \bar{n}_\theta \bar{n}_\theta + \tilde{p}_{\theta\theta} \bar{n}_\theta^2 \\ & \quad + 2\tilde{p}_{r\theta} \bar{n}_\theta \bar{n}_r + 2\tilde{p}_{\theta r} \bar{n}_\theta \bar{n}_r + 2\tilde{p}_{\theta\theta} \bar{n}_\theta \bar{n}_r - \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \bar{F}(r), \\ & \tilde{p}_{rr} \bar{n}_r \bar{r}_r + \tilde{p}_{rr} \bar{n}_r \bar{r}_r + \tilde{p}_{r\theta} \bar{n}_r \bar{r}_\theta + \tilde{p}_{\theta\theta} \bar{n}_\theta \bar{r}_\theta + \tilde{p}_{\theta\theta} \bar{n}_\theta \bar{r}_\theta + \tilde{p}_{\theta\theta} \bar{n}_\theta \bar{r}_\theta + \tilde{p}_{\theta r} \bar{n}_\theta \bar{r}_r \\ & \quad + \tilde{p}_{\theta r} \bar{n}_\theta \bar{r}_r + \tilde{p}_{\theta r} \bar{n}_r \bar{r}_\theta + \tilde{p}_{\theta r} \bar{n}_r \bar{r}_\theta + \tilde{p}_{\theta r} \bar{n}_r \bar{r}_\theta + \tilde{p}_{\theta r} \bar{n}_r \bar{r}_\theta = 0, \\ & \tilde{p}_{r\psi} \bar{r}_\psi \bar{n}_r + \tilde{p}_{\psi r} \bar{r}_\psi \bar{n}_r + \tilde{p}_{\psi\theta} \bar{r}_\psi \bar{n}_\theta + \tilde{p}_{\theta\psi} \bar{r}_\psi \bar{n}_\theta + \tilde{p}_{\theta\psi} \bar{r}_\psi \bar{n}_\theta = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.16)$$

其中带“—”和“~”的量(除去速度和压力)分别由(2.9)式确定。

为了进一步简化数学处理,我们假设 \bar{F}, \bar{F}' ; \tilde{F}, \tilde{F}' 是小量,但认为 \bar{F}'' , \tilde{F}'' 是一阶量,从而保留了表面张力效应。做了上述假设后,我们可以将自由面上边界条件线性化。为此将零级近似和一级近似中的自由面上边界条件,转移到 $\theta = \pm \theta_L$ 上满足,经过仔细分析后我们得自由面上线性化边界条件为:

$$\text{零级近似: 在 } \theta = \pm \theta_L \text{ 上,} \quad \bar{v}_\theta = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} = 0; \quad (2.17)$$

$$\bar{p} = p_0 - 2T\bar{F}'' + 2 \frac{\partial \bar{v}_\theta}{R \partial \theta} - GR \cos(\theta_0 - \theta). \quad (2.18)$$

$$\text{一级近似: 在 } \theta = \pm \theta_L \text{ 上,} \quad \tilde{v}_\theta = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{v}_\psi}{\partial \theta} = 0 \quad (2.19)$$

$$\tilde{p} = T(-r^3 \tilde{F}'' - r^4 \tilde{F}''') + 2 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} - r \frac{\partial \tilde{v}_r}{R \partial \theta} + \tilde{v}_r \right) - GrR \cos(\theta_0 - \theta). \quad (2.20)$$

应该指出, 现在求速度、压力和求自由面形状 \bar{F} , \tilde{F} 已经分开了. 也就是说, 我们可先求满足 (2.10), (2.11), (2.17) 和 (2.14), (2.15), (2.19) 式的零级近似和一级近似的速度、压力. 然后由 (2.18), (2.20) 式确定 \bar{F} 及 \tilde{F} .

令 $x = R\theta$, 则零级近似的解就是我们在文献 [4] 中已经研究的直管解. $\tilde{v}_\theta, \tilde{v}_r, \tilde{p}$ 完全可以用文献 [4] 中的 U, V, p . 但自由面形状 F , 则不能用那里的结果, 而必须根据 (2.18) 式重新求出, 因两者在重力项上有差异.

本来反映曲率效应的一级近似解是一个三维问题. 根据其特点, ψ 幸运地可以分离出来, 使得自变量由三个减为二个, 三维问题归结为二维问题, 从而大大地简化了数学处理.

三、数值解及结论

采用差分方法在边界条件 (2.15), (2.19) 式下数值地解线性方程组 (2.14). $-\lambda \leq x \leq \lambda$ 分成 31 点. 变化显著的弯月面附近分得密些, 其它地方分得稀些. $0 \leq r \leq 1$ 分成 9 个点. 这样共有 144 节点, 576 未知函数. 方程中的导数项采用二阶精度的差分格式. 在粗细网格交接点上采用变步长差分格式. 离散化后得到的线性代数方程组用带状消去法求解.

取图 1 中标明的数据. 对应的雷诺数为 $Re = 24.5$, 零级近似采用文献 [4] 中非线性数值解. 计算所得的结果见图 4. 为了揭示雷诺数的效应, 我们同时在图 5, 图 6 中画出了 $Re = 0$ 和 $Re = 10$ 的数值计算结果(应该记得, 真正的一级近似解应该是 $v_\psi \cos \psi, v_r \sin \psi, v_\theta \sin \psi$).

分析图中曲线, 我们发现:

1. $Re = 0$ 时, v_ψ, v_r 是 x 的奇函数, v_θ 是偶函数. 此时产生的二次流是曲率和端缘效应

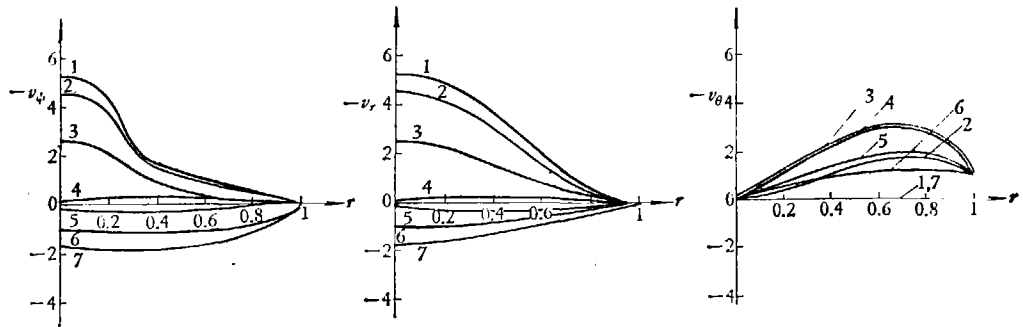


图 4

($\lambda = 44, Re = 24.5$)

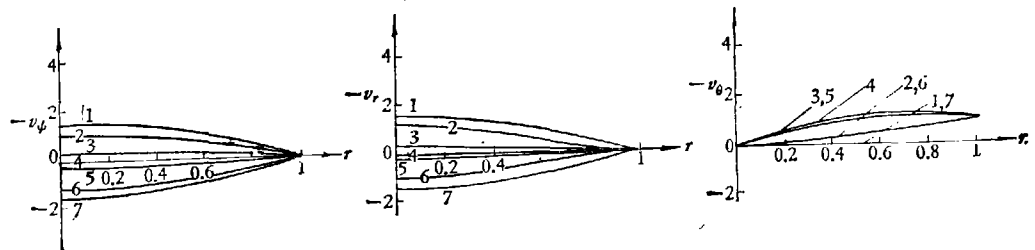


图 5

($\lambda = 44, Re = 0$)

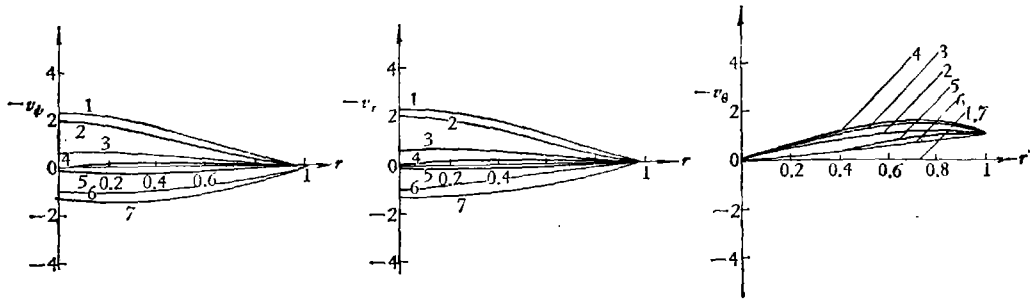


图 6

(1. $x = -22$, 2. $x = -21.6$, 3. $x = -21.2$, 4. $x = 0$, 5. $x = 21.2$, 6. $x = 21.6$, 7. $x = 22$)

综合作用的结果。它在弯月面附近最强。最大的 v_ψ 可达 $0.036 \times 1.5 = 0.054$ ，约为最大迴流速度的 $1/10$ 。这类二次流主要集中在弯月面附近一倍管径处。此外，端缘效应迅速减弱， v_ψ ， v_r 取很小值，在 $x=0$ 处趋于零。同时，二次流还使 v_θ 略有减少。减少量是 $1/R$ 的数量阶。

2. 当 $Re \approx 0$ 时，惯性力开始起作用。此时，速度分量对 x 不再具有对称性或反对称性，产生了惯性力引起的二次流。在上弯月面处，随着 Re 数的增加， v_ψ ， v_r 显著增大。例如 $Re = 10$ 时，最大的 $v_\psi = 0.036 \times 2.3 = 0.083$ ，为最大迴流速度的 15% 左右，而在 $Re = 24.5$ 时， $v_\psi = 0.036 \times 5.2 = 0.187$ ，则几乎达到最大速度的 32% 左右。在下弯月面处，随着 Re 数的增大， v_ψ ， v_r 虽有增加，但增加得不多，例如 $Re = 24.5$ 时，下弯月面处最大的 $v_\psi \approx 1.95$ 左右，比 $Re = 0$ 的 1.5 略有增加，而比上弯月面处最大的 $v_\psi = 5.2$ 就要小得多。

在 $x = 0$ 的对称截面上，端缘效应最小。此时的二次流主要是由惯性离心效应引起的，它的最大的 v_ψ 不超过 0.4 ，强度比弯月面处小得多。从图 3, 4 中可以看出，在下弯月面，自由面的影响和 $Re = 0$ 一样，主要集中在离自由面管径一倍左右的地方。而在上弯月面则不一样，随着 Re 的增加，自由面的影响区域显著地逐步扩大。

3. 上弯月面处二次流的强度将随 Re 增加不断增加。我们计算了 $Re = 50$ 的情形。发现上弯月面处最大的 $v_\psi = 10$ 左右，几乎是主流平均速度的 0.36 倍。此时，虽然还能用小参数的做法，但精度已不那么好了。可见将解展成 $1/R$ 的级数，并满足于求一级近似的做法，只是在一定雷诺数以下（例如 $Re = 100$ ）才是可行的。超过一定雷诺数就不合适了。这和 Dean^[5] 在处理圆环内全部充满粘性流体时 ($R \gg a$) 所得的结论是一致的。

4. 不言而喻，Chandler 圆环内的流动应该是零级近似的迴流或泊肃叶流动加上一级近似的二次流。由此可见，在上下弯月面区域内有着明显的迴流和二次流。当 $Re = 24.5$ 时，在下弯月面处，最大迴流速度约为 $0.57 + 0.07 = 0.64$ 左右。而最大二次流的 v_ψ 约为最大迴流速度的 $1/10$ 。而在上弯月面，迴流因二次流而加强，最大可达 $0.57 + 0.19 = 0.76$ ，而二次流的最大 v_ψ 可达最大迴流速度的 $1/3$ 左右。在其它区域中，基本上是泊肃叶流动加上惯性离心力引起的强度小的二次流。

5. 血栓在下弯月面附近形成，这里是一个既有迴流又有二次流的区域，而且其迴流的中心主流冲击着弯月面，为颗粒的聚集提供了有利的条件。而上弯月面附近，尽管这里显然也有迴流和二次流，但其迴流的中心主流是离开弯月面的，使颗粒不易停留，血栓也就不易在此形成了。

作者对谈稿生教授的亲切关怀和热情指导,对陈耀松、徐建军、吕恩武、彭荣蕤等同志的帮助,表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Chandler, A. B., *Lab. Invest.*, 7(1958), 110—114.
- [2] Poole, J. C. F., *Q. J. Exp. Physiol.*, 44(1957), 377—384.
- [3] Gardner, R. A., *J. Lab. Clin. Med.*, 84(1974), 404—508.
- [4] 吴望一、钱民全、温功碧, *应用数学和力学*, 1981, 407—418.
- [5] Dean, W. R., *Phil. Mag.*, S75(1928), 673—693.

www.cnki.net