

# 过渡领域圆柱间 Couette 流动

沈青 赵国英

(中国科学院力学研究所)

圆柱间 Couette 流动问题是最简单的流动情况之一,当圆柱转速较大 ( $M \approx 1$ ) 而间隙与半径之比 [ $\delta = (R_2 - R_1)/R_1$ ] 不为小量时,却可用以检验求解过渡领域中非线性问题的各种方法. 不久前,文献[1, 2]在  $M \approx 1, \delta = 0.5$  条件下用电子束做了同心圆柱间氩气密度分布的测量,提供了一组比较流场结构的实验数据. 在较早的稀薄气体 Couette 流理论工作中,只有文献[3, 4]解了  $M$  与  $\delta$  不为小量的问题,但只适于  $Kn < 0.1$  的情况. 继文献[1, 2]的实验之后,文献[6]得到了十三矩方程<sup>[5]</sup>的解析解,文献[7]用间断纵坐标数值方法解了 B-G-K 模型方程<sup>[8]</sup>和 Holway 椭球模型方程<sup>[9]</sup>,在一定的  $Kn$  数范围内与密度分布的实验结果作了比较,但缺乏与阻力系数及热流值的全面比较.

本文用直接模拟统计试验方法<sup>[10, 11]</sup>求解,得到的密度分布结果与 [1] 的实验数据在  $1.065 \geq Kn \geq 0.1$  范围内相符较好,在  $16.0 > Kn > 1.0$  ( $M \approx 0.211$ ) 范围内得到与 [12]

的测量结果相符较好的阻力系数值;比较了其它解析方法和数值方法的密度分布、阻力系数和热流的结果,指出现有方法存在的问题.

**1. 数值模拟方法** 直接模拟蒙特卡洛方法是通过在计算机上追踪几千个模拟分子的运动、碰撞及与壁面的相互作用,来模拟真实气体的流动. 其基本假设与 Boltzmann 方程一致,但通过对于有限个分子的空间位置和速度的追踪来代替真实气体中分布函数的计算. 模拟的相似条件是流场的  $Kn$  数相等,即数密度与碰撞截面之积保持常数. 对每个分子分配以记录其位置和速度的单元. 在模拟过程中把分子的运动和碰撞分别考虑,在比平均碰撞时间为小的  $\Delta t_m$  内分别计算各分子无碰撞的运动和典型碰撞. 空间网格足够小,其中任意两个分子都可以互相碰撞. 碰撞分子对的选取

是随机地取一对分子,计算它们间的相对速度,根据此值与最大相对速度(初值置为二倍未扰动平均相对速度)之比用取舍法决定是否入选<sup>[12]</sup>. 先计算网格中各个分子间相对速度再选取碰撞分子对的方法<sup>[13]</sup>对机时和内存均会提出高得多的要求<sup>1)</sup>.

流动的几何和坐标见图 1. 在壁面考虑了部分扩散,部分镜面反射模型. 我们采用

本文于 1979 年 2 月 16 日收到.

1) 此意见我们曾在第一届宇航器计算气动力学会议(1978 年 5 月)上讨论时提出.

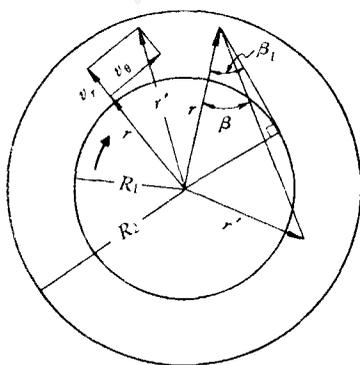


图 1 在  $\Delta t_m$  时刻有  $r' > R_1$  而发生与内圆柱碰撞的情况

情况发生的条件:  $\beta < \beta_1, \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} \Delta t_m >$

$$\frac{-rv_r}{\sqrt{v_\theta^2 + v_r^2}} + \sqrt{\frac{r^2 v_r^2}{v_\theta^2 + v_r^2} - (r' - R_1^2)}$$

Bird 的扩散反射模型<sup>[11]</sup>。顺便指出，Takagi 反射模型<sup>[14,15]</sup>不反映扩散反射情况<sup>1)</sup>。程序中还考虑了图 1 所示的分子与内壁发生碰撞的特殊情况和分子在内外壁面间多重反射的可能性。

在统计模拟算法中，得到具有良好统计特性的伪随机数是模拟成功的基础。在试用 ICT-1905 机所附的乘同余法产生伪随机数的方法时，发现用它解 Buffon 投针试验求  $\pi$  问题得不到理想的结果。后来我们采用了[15]中建议的利用黄金分割数  $\xi = (\sqrt{5} - 1)/2$  来定乘同余法中  $a$  因子的方法，并针对 ICT-1905 机字长较大的特点，把双精度运算程序改为单精度运算程序，得到了好的结果，并节约了机时。

**2. 数值结果与讨论** 用上述方法对  $M \approx 1.0$ ,  $\delta = 0.5$  而  $Kn = 1.065, 0.406, 0.251$  和  $0.109$  四种情况进行了计算。计算中考虑了 1260 个分子，圆柱间隙划分为 21 个网格。内圆柱速度为 32327cm/s，外圆柱固定，内外圆柱壁温分别为 303K 和 311K，壁面反射系数为 0.972。这些条件均与 [1] 的实验条件相同，同时为模拟氩气分子采用了刚球模型。计算结果及与其它结果的比较见图 2—5。可以看出本文结果与实验点相符较好。文献 [2, 3, 5] 均从连续介质方程出发考虑滑流条件，在  $Kn > 0.1$  时所得结果不好是可以想见的。文献[7]用 Holway 椭球模型和 B-G-K 模型用间断纵坐标法计算的结果，则与实验相符较好，尤其是用前一模型时，与实验相符情况与本文的结果类似。但该模型在更小  $Kn$  数下结果欠佳([7]中未列出  $Kn = 0.109$  及更小  $Kn$  数下的结果)。同时，我们认为更重要的是，该模型给出的阻力系数和热流值是有问题的。

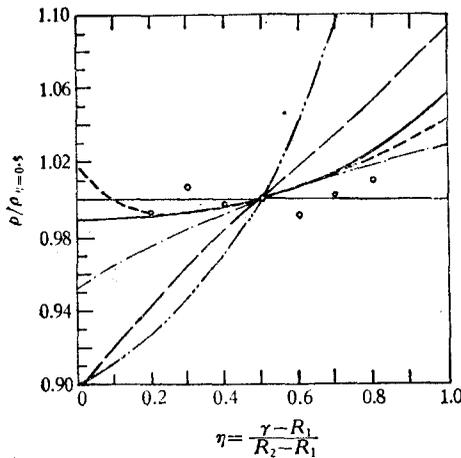


图 2  $Kn = 1.065$  时相对密度分布比较

- Alofs, Springer<sup>[1]</sup> 实验数据
- 本文计算结果
- Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> 用 Holway 模型计算结果
- · - Alofs, Springer<sup>[2]</sup> 滑流计算结果
- Navier-Stokes 无滑流计算结果
- · - Schamberg<sup>[3]</sup> 计算结果

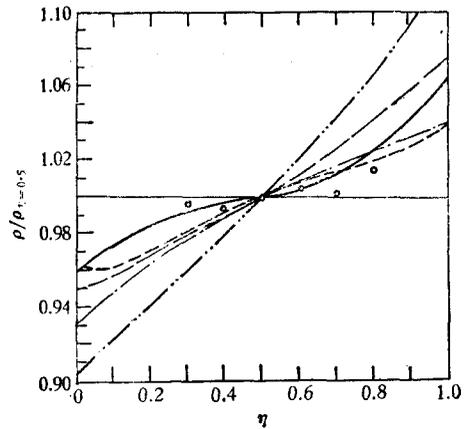


图 3  $Kn = 0.406$  时相对密度分布比较

- Alofs, Springer<sup>[1]</sup> 实验数据
- 本文计算结果
- Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> 用 Holway 模型计算结果
- · - Alofs, Springer<sup>[2]</sup> 滑流计算结果
- Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> 用 B-G-K 模型计算结果
- · - Schamberg<sup>[3]</sup> 计算结果

1) 此意见我们曾在第一届宇航器计算气动力学会议(1978年5月)上讨论时提出。

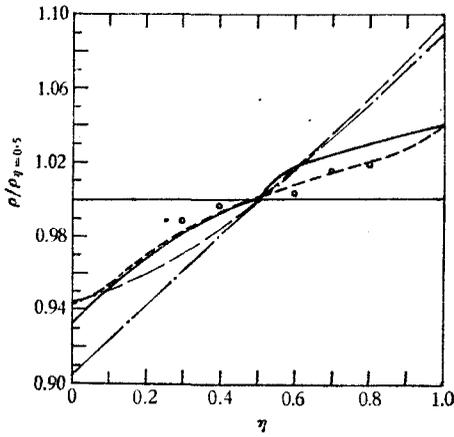


图4  $Kn = 0.251$  时相对密度分布比较  
 ○ Alofs, Springer<sup>[11]</sup> 实验数据  
 — 本文计算结果  
 - - - Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> 用 Holway 模型计算结果  
 - · - Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> 用 B-G-K 模型计算结果  
 - · - Alofs, Springer<sup>[11]</sup> 滑流计算结果

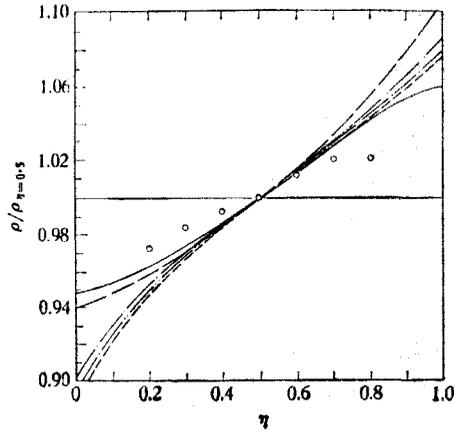


图5  $Kn = 0.109$  时相对密度分布比较  
 ○ Alofs, Springer<sup>[11]</sup> 实验数据  
 — 本文计算结果  
 - - - Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> 用 B-G-K 模型计算结果  
 - · - Alofs, Springer<sup>[11]</sup> 滑流计算结果  
 - · - Schambert<sup>[23]</sup> 计算结果  
 - - - Kubota, Yoshizawa<sup>[25]</sup> Grad 方程结果

比较阻力和热流这样的总体积分量也很有意义。可惜，在上述  $Kn$  数、 $M$  数和  $\delta$  值范围内没有阻力系数的实验点，但可比较本文、[7]及[16]的结果。图6纵坐标给出阻力系数  $C_D$  与自由分子流中阻力系数  $C_{Df}$  的比值，横坐标是稀薄参数  $A = \sqrt{\pi}/(2Kn)$ 。可以看出，本文结果、[7]的 B-G-K 模型结果和[16]的线化 B-G-K 模型结果是基本相符的，而

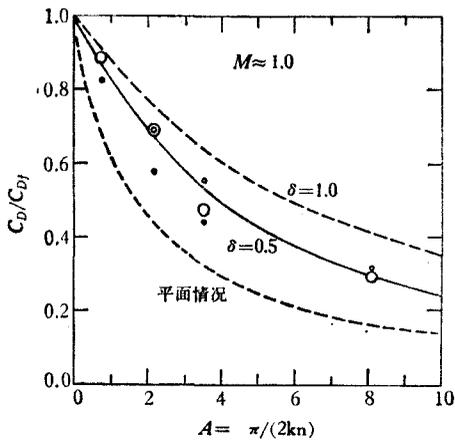


图6 本文及其它方法计算所得阻力系数的比较  
 ○ 本文计算结果  
 ○ Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> 用 B-G-K 模型计算结果  
 · Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> 用 Holway 模型计算结果  
 —  $\delta = 0.5$   
 - - -  $\delta = 1.0$ , 平面情况 } Cercignani 等<sup>[16]</sup> 计算结果

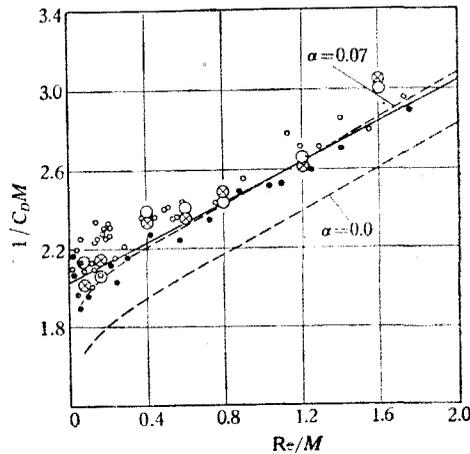


图7 本文及其它方法计算所得阻力系数的比较  
 ○  $M = 0.211$  } Bowyer, Talbot<sup>[12]</sup> 阻力测量值  
 ·  $M = 0.235$  }  
 —  $M \rightarrow 0, \alpha = 0$  Cercignani 等<sup>[16]</sup> 计算结果  
 - - -  $M = 0.211, \alpha = 0.0$  及  $\alpha = 0.07$  Kubota 等<sup>[25]</sup> 计算结果 ( $\alpha = 0$  相应于完全扩散反射)  
 ⊗  $M = 0.211, \alpha = 0.0$  } 本文计算结果  
 ○  $M = 0.211, \alpha = 0.01$  }

用 Holway 椭球模型的结果则偏低一些。

文献 [12] 在  $M = 0.211, \delta = 0.118$  情况下做了 Couette 流动中外圆柱的阻力系数 (氩气) 测量。图 7 给出本文、[16] 及 [5] 的结果与实验数据的比较。可见本文与 [16] 的阻力系数计算是可信的, 而且互相一致。从而从图 6 Holway 模型计算结果<sup>[7]</sup>同本文及 [16] 结果的偏离, 看出它的结果可能是有问题的。

图 7 还给出了文献 [5] 用 Grad 模型计算的结果, 其中只有  $\alpha = 0.07$  (即 7% 的分子在表面镜面反射) 时才与实验相符, 而  $\alpha = 0$  时计算结果不好。本文与 [16] 的计算均表明应有  $\alpha \approx 0.0$ 。可以根据自由分子流极限下阻力系数之值来判断 [12] 的实验条件下反射系数之值。自由分子流领域圆柱阻力系数与 M 数有如下关系<sup>[17]</sup>:

$$\frac{1}{C_D M} = 1 / \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \frac{\sigma}{2 - \sigma} \right]$$

式中  $\sigma$  为切向反射系数。利用上式分析 [12] 中  $Kn > 14$  的阻力数据点, 可知  $\sigma \approx 0.99$ 。所以 [5] 取  $\alpha = 0.07$  并不是实验条件的真值。此外, [5] 的理论曲线至少在  $Re/M \rightarrow 0$  时要给出  $\sigma = 0.93$  时的  $1/(C_D M)$  的极限值 2.32, 但事实并非如此, 而是给出比  $\sigma = 1.0$  时的  $1/(C_D M)$  的极限值 2.62 还要低的数值。

我们还比较了  $M \approx 1.0, \delta = 0.5$  时内外圆柱的热流计算值与 [7] 中两种模型的计算结果。三种计算给出的热流率在外圆柱壁面相符较好 (图 8), 在内表面则相差甚远 (图 9)。

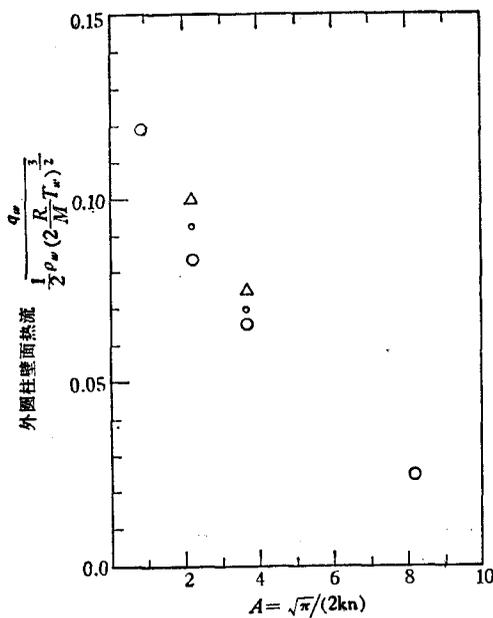


图 8  $M \approx 1.0, \delta = 0.5$  时外圆柱壁面热流的比较

- 本文计算结果
- Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> B-G-K 模型计算结果
- △ Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> Holway 模型计算结果

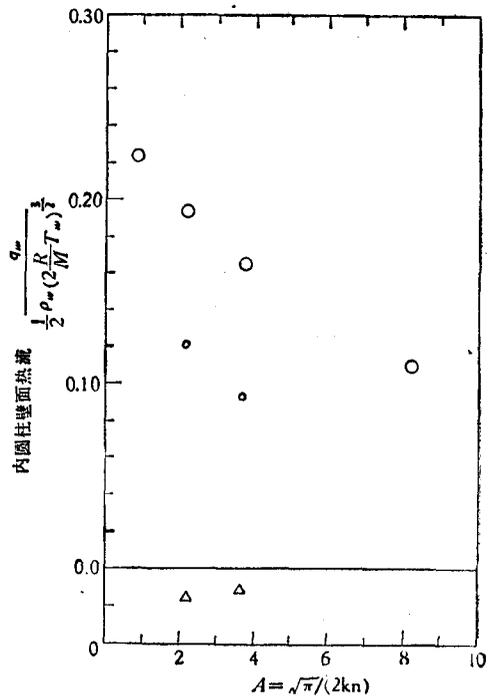


图 9  $M \approx 1.0, \delta = 0.5$  时内圆柱壁面热流的比较

- 本文计算结果
- Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> B-G-K 模型计算结果
- △ Soga, Oguchi<sup>[7]</sup> Holway 模型计算结果

在内表面,[7]的 B-G-K 模型给出的热流比本文结果略低(壁面温度不同略有影响),而 Holway 模型的计算则给出内壁面热流为负的结果。我们认为这是 Holway 模型不能给出过渡领域的正确积分结果的证据之一。

**3. 结论** 1. 在  $M$  与  $\delta$  不为小量时, 圆柱间 Couette 流用来检验过渡领域中各种模型和方法是合适的, 直接模拟法与实验相符较好, 可以做为比较参考; 2. N-S 方程、Grad 方程和 B-G-K 模型不能给出过渡领域中流场结构的正确值, Holway 模型虽给出与实验相符较好的密度分布, 但给出的阻力和热流值与实际相差较远; 3. 希望在  $M$  与  $\delta$  均较大的条件下发展实验方法, 得到更多的流场分布、阻力、热流的实验结果, 作为检验过渡领域中各种方法的依据。

### 参 考 文 献

- [1] Alofs, D. J., Springer, G. S., *Phys. Fluids*, 14(1971), 298.
- [2] Alofs, D. J., Springer, G. S., *Rarefied Gas Dynamics*, 7th, Vol. 2(1971), 1031.
- [3] Schamberg, R., Ph. D. Thesis, California Inst. of Techn. (1947).
- [4] Lin, T. C. (林同骥), Street, R. E., NACA Report, 1175(1954).
- [5] Kubota, S., Yoshizawa, Y., *Rarefied Gas Dynamics*, 9th, Vol. 1(1974), A16-1.
- [6] Grad, H., *Commun. on Pure & Appl. Math.*, 2(1949), 331.
- [7] Soga, T., Oguchi, H., *Rarefied Gas Dynamics*, 9th, Vol. 1(1974), A17-1.
- [8] Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., Krook, M., *Phys. Rev.*, (1954), 511.
- [9] Holway, L. H., Jr., *Phys. Fluids*, 9(1966), 1658.
- [10] Bird, G. A., *Phys. Fluids*, 13(1970), 2676.
- [11] Bird, G. A., *Molecular Gas Dynamics*, Oxford (1976).
- [12] Bowyer, J. M., Talbot, L., UC, Inst. of Engin., Research Report, HE 150-139 (1956).
- [13] 李凤林等, 计算数学, 3 (1978).
- [14] Takagi, M., University of Tokyo Report, No. 473 (1971).
- [15] Ahrens, J. H., Dieter, U., Grube, A., *Computing*, 6(1970), 121.
- [16] Cercignani, C., Sernagiotto, F., *Phys. Fluids*, 10(1967), 1200.
- [17] Alofs, D. J., Springer, G. S., *Rev. Sci. Instr.*, 41(1970), 1161.

## COUETTE FLOW BETWEEN CYLINDERS IN TRANSITION REGIME

Shen Ching      Chao Guo-ying

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)