

热电模拟在表面热流测量中的应用

俞鸿儒 李仲发

(中国科学院力学研究所)

如果不同物理领域的问题可以用相同的方程来描述,则这些问题互为“模拟”。某一领域问题的求解可化为解另一领域的问题。由于电量最易于测量及处理,因此流体力学及热传导的许多问题常常化为电学问题来进行实验。本文叙述热电模拟获得表面热流的原理和方法。

我们注意到,一元热扩散方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho s} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \quad (1)$$

而一元电荷扩散方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{rc} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \quad (2)$$

由(1)及(2)式可以得出:只要初始及边界条件相似,则电系统中的 V 、 $1/r$ 及 c 分别模拟热系统中的 T 、 K 及 ρs 。

此外,热系统中有

$$q = -K \frac{\partial T}{\partial X} \quad (3)$$

在电系统中有

$$i = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial X} \quad (4)$$

由(3)及(4)式又可得到热流率与电流率为对应模拟量。因此,热流可化为电流测量。

一、薄膜电阻温度计工作原理

薄膜电阻温度计已经广泛应用于激波管及其他瞬时工作设备的表面热流测量。它由亚微米厚的金属膜与膜所依附的基座(为了提高温度计的灵敏度,一般均采用石英、玻璃等绝缘体)组成。由于膜极薄,热容很小,且导热率甚高,因此薄膜电阻温度计能够精确反映所在表面的真实温度。

若已测出随时间变化的薄膜电阻值,则由电阻温度系数 α 可求出薄膜电阻的温度历史,亦即基座表面温度历史。

获得基座表面温度后,可用不同的途径来求出表面热流率。通常根据热传导理论计算表面热流率。假定基座为半无限体(规定 $t \leq 0$ 时 $T(t) = 0$)则表面热流率

$$q(t) = \frac{\sqrt{K\rho s}}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{2T(t)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{T(t) - T(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau \right] \quad (5)$$

若测量过程中薄膜电阻通以恒定电流,则薄膜电阻两端的电势差

$$E(t) = \alpha i_0 R_0 T(t) = \alpha E_0 T(t) \quad (6)$$

代入(5)式中,得

$$q(t) = \frac{\sqrt{K\rho s}}{2\sqrt{\pi\alpha E_0}} \left[\frac{2E(t)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{E(t) - E(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau \right] \quad (7)$$

上式只有当 $E(t)$ 为少数简单函数时,才能直接积分。一般求 $q(t)$ 均需进行数值计算。除非具备计算机实时采集并处理数据,否则,数据处理工作极为繁重,且不能立刻获得结果。

由基座表面温度求表面热流率的另一种途径为热电模拟方法。这一方法较前法简便得多,只要将薄膜电阻两端的电势差输入热电模拟网络,即可直接获得表面热流率。

二、模拟网络及计算公式

设想用具有分布参数的电缆来模拟薄膜电阻温度计的基座。该基座为半无限体,只要电缆半无限长,再在电缆端面加上与基座表面温度成比例的电势,则电缆端面电流即模拟基座表面热流。所幸薄膜电阻测量中,温度已转变为电势,给模拟测量带来很大的便利。

由于端面电流难以测量以及模拟要求的分布参数不易实现,用电缆来模拟实际上行不通。为此采用集中参数的“T”形网络代替之。(图1)

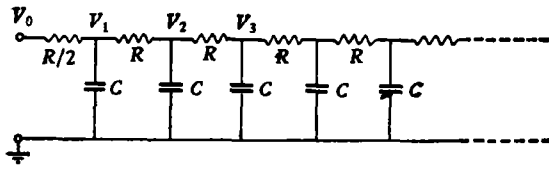


图1 “T”形网络

则流过第一电阻($R/2$)的电流模拟表面热流。

以集中参数网络代替分布参数电缆,相当于将分布参数电缆切成许多小段,以串接电阻 R 及接地电容 C 代替每小段的分布电阻及电容。若小段长为 δ ,则

$$R = \delta r \quad (8a)$$

$$C = \delta c \quad (8b)$$

为方便计,令电系统及热系统时间及距离座标刻度相同。由(6)式温度与电势刻度比为

$$\frac{T}{V} = \frac{1}{\alpha E_0} \quad (9a)$$

其他模拟量刻度比选为

$$\frac{q}{i} = k_i \quad (9b)$$

$$\frac{1}{rK} = k_r \quad (9c)$$

$$\frac{\rho s}{c} = k_c \quad (9d)$$

将(9a)至(9d)代入(1)及(3)式得

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{rc k_r k_c} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \quad (10)$$

$$i = -\frac{1}{rk_i k_r \alpha E_0} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (11)$$

比较(2)及(10)式,得

$$\frac{1}{k_r k_c rc} = \frac{1}{rc} \quad (12)$$

k_r 及 k_c 均由我们任选,应令 $k_r k_c = 1$,则

$$\frac{1}{rc} = \frac{K}{\rho s} \quad (13)$$

由(8a)(8b)及(13)式,得

$$\delta = \sqrt{\frac{K}{\rho s} RC} \quad (14)$$

比较(4)及(11)得

$$k_i = \frac{1}{\alpha E_0} \cdot \frac{1}{k_r} \quad (15)$$

由(8a)(9c)及(14)式,得

$$k_r = \frac{1}{rK} = \frac{\delta}{RK} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{RC}{K\rho s}} \quad (16)$$

通过“T”形网络第一电阻($R/2$)的电流

$$i_0(t) = \frac{V_0(t) - V_1(t)}{R/2} \quad (17)$$

由(9b)(15)(16)及(17)式

$$\begin{aligned} q(t) &= k_i i_0(t) = \frac{1}{\alpha E_0} \cdot \frac{1}{k_r} \cdot \frac{V_0(t) - V_1(t)}{R/2} \\ &= \frac{2}{\alpha E_0} \frac{\sqrt{K\rho s}}{\sqrt{RC}} [V_0(t) - V_1(t)] \quad (18) \end{aligned}$$

上式就是计算表面热流率的公式。测出“T”形网络第一电阻($R/2$)两端的电势差 $[V_0(t) - V_1(t)]$,经简单算术运算,即可求得表面热流率。

三、实际网络的误差

实际网络包括两方面的近似:一为以集中参数的网络代替分布参数电缆;另一为以有限节数网络代替无限节数网络。这两种近似引起的误差采用两种有代表性的输入讯号来讨论。一种为反映非正常传热的阶跃讯号 $V_0 = 1$;另一为定常传热讯号 $V_0 = k t^{1/2}$ 。

以集中参数网络代替分布参数网络主要影响系统的响应特性。当 $V_0 = 1$ 作用于无限节数网络及半无限长电缆时,二者产生的端部电流比

$$\frac{i_{0网络}}{i_{0电缆}} = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2t}{RC}} I_0\left(\frac{2t}{RC}\right) \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} \quad (19)$$

而当输入讯号为 $V_0 = k t^{1/2}$ 时则

$$\frac{i_{0网络}}{i_{0电缆}} = \operatorname{erf}\left(2 \sqrt{\frac{t}{RC}}\right) \quad (20)$$

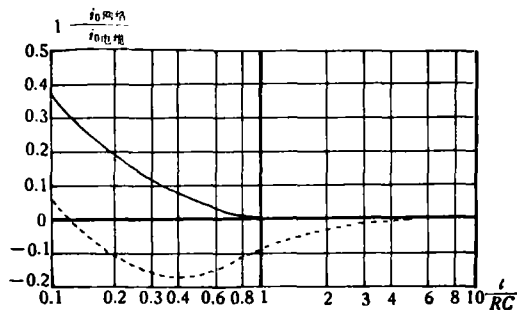


图2 网络响应特性

实线 $V_0 = k t^{1/2}$ 虚线 $V_0 = 1$

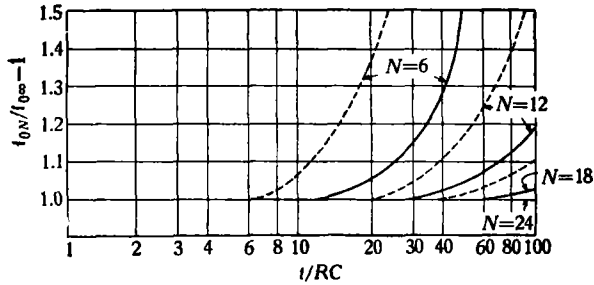


图3 有限节数网络误差
实线 $V_0 = kt^{1/2}$ 虚线 $V_0 = 1$

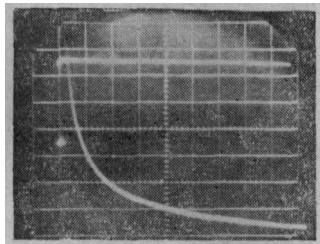
上述二式绘于图2。从图中曲线可以看出，对于实验最关心的定常热流，网络反应较快。

网络的有限节数，只对工作的后期起影响，当 $V_0 = 1$ 作用于尾端短接的 N 节网络与无限节数网络时，两者产生的端部电流比

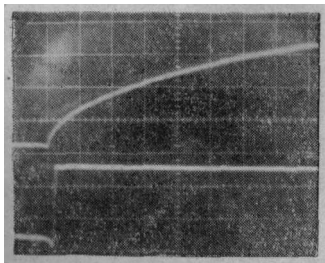
$$\frac{i_{0N}}{i_{0\infty}} = \frac{1 + e^{-\frac{4t}{RC}} + 2 \sum_{s=1}^{N-1} e^{-2(1-\cos\frac{s\pi}{N})\frac{t}{RC}}}{2Ne^{-\frac{2t}{RC}} I_0\left(\frac{2t}{RC}\right)} \quad (21)$$

当输入讯号为 $V_0 = kt^{1/2}$ 时，则

$$\frac{i_{0N}}{i_{0\infty}} = \frac{2\sqrt{\frac{t}{RC}} + 4 \sum_{s=1}^N \frac{\Delta_{sN}}{\sqrt{a_{sN}}} W\left(\sqrt{\frac{a_{sN}t}{RC}}\right)}{N\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(2\sqrt{\frac{t}{RC}}\right)} \quad (22)$$



(a) 输入讯号 $V_0 = 1$



(b) 输入讯号 $V_0 = kt^{1/2}$

图4 电讯号检验示波图

上线 输入讯号 下线 输出讯号

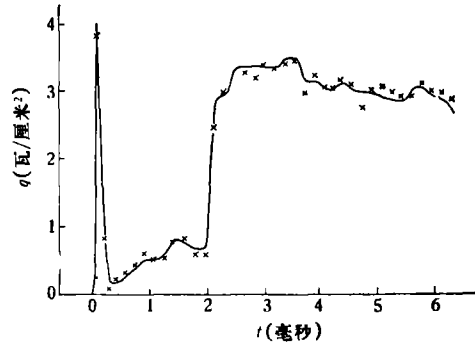


图5 模拟网络测量值与计算值比较
× 计算值

式中

$$a_{sN} = 2 \left(1 - \cos \frac{s\pi}{N} \right)$$

$$\Delta_{sN} = \begin{cases} 1/2 & \text{当 } s = N \\ 1 & \text{当 } s \neq N \end{cases}$$

$$W(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

上二式对于 $N = 6, 12, 18$ 及 24 的数值结果绘于图3，可供选择网络节数用。公式(19)至(22)的推导可参看文献1。

四、实验结果与结语

对已制成的24节T形网络 ($R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 0.01 \mu\text{f}$) 进行二类实验检验。一类为将电讯号 $V_0 = 1$ 及 $V_0 = kt^{1/2}$ 先后输入模拟网络，由网络测出的端部电流值再与无限网络理论计算求出的端部电流值 $\frac{2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} I_0\left(\frac{2t}{RC}\right)$ 及 $\frac{k\sqrt{\pi}}{2\sqrt{RC}}$ 相对比。实验结果表明：二者的差别在示波器误差以内。网络输入(上线)与输出(下线)示波曲线见图4。下线灵敏度较上线低十倍。另一类为激波管风洞传热测量实地检验，将薄膜温度计输出讯号除输入模拟网络外，并同时加以记录。将记录得到的讯号按(7)式数值求解热流并与模拟网络测出的热流相比较。比较结果见图5。由于薄膜计输出曲线读数误差对当地热流影响甚大，个别点偏离较大恐系由此引起。

用热电模拟网络获得瞬时表面热流的方法首先由 Meyer^[2] 提出。我们对该方法作了一些改进，例如直接导出计算热流的公式(18)，免去

(下接第57页)

类似可得,

$$\lim_{z \rightarrow h^{\pm}} \beta_1 J(1, z-h, 1) = \pm \left(\frac{1-2\mu}{2} \right) \pi,$$

$$\lim_{z \rightarrow h^{\pm}} \beta_2 J(1, z-h, 2) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{z \rightarrow h^{\pm}} \alpha_1 J(1, z-h, 0) = 2(3-4\mu),$$

$$\lim_{z \rightarrow h^{\pm}} \alpha_2 J(1, z-h, 1) = 0$$

结论与前相同. 特殊, 当 $h=0$,

$$K_o^b = 0.5, \quad K_w^b = \frac{4}{\pi} (1-\mu^2)$$

对于 $0 < l < 1$ 的一般情况. 当 $s \neq 0$ 时, (11) 式是普通二重积分, 被积函数及其对 l 的偏导数在闭域 $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq l \leq 1$ 上连续, 故对参数 l 求导可与积分交换次序^[8], 即

$$\frac{\partial J(l, s, n)}{\partial l} = \int_0^1 \int_0^\pi \left[-\left(\frac{1}{2} + n \right) \frac{2l(1-\rho \cos \theta)\rho}{(s^2 + l^2 + \rho^2 - 2l\rho \cos \theta)^{\frac{3}{2} + n}} \right] d\rho d\theta.$$

上式被积函数 ≤ 0 , 故 $\frac{\partial J}{\partial l} < 0$, $J(l, s, n)$ 对 l 严格单调减. 当 $0 < l < 1$ 时, $J(0, s, n) > J(l, s, n) > J(1, s, n)$. 由上面两种特例的讨论, 知当 $z \rightarrow h^{\pm}$ 时, $J(l, s, n)$ 也有类似性质.

在用计算机计算 $z=h$ 的数值时, 我们用构造 Cauchy 序列的办法, 用 $z=h+\varepsilon$ (或

$z=h-\varepsilon$) 的数值作为 $z=h$ 的数值. ε 是某一符合精度要求的充分小正数.

上面已经指出, 当 $z \rightarrow h^+$ 和 $z \rightarrow h^-$ 时, K_w 值连续而 K_o 值间断. 计算机打印出的数据, 清楚反映出这一现象, 并且当 $z < h$ 时, K_o 为负值(拉应力), $z > h$ 时, K_o 为正值(压应力).

关于 Mindlin 课题的计算已完全解决, 计算结果是否符合实际, 特别是在拉应力区域中对土体性质的假设是否合理, 有待进一步研究和实验及真值观测的验证, 特别是牵涉到土体抗剪强度的研究. 这方面可见王耀杰同志的工作. 本文的工作自始至终与王耀杰同志合作, 特此致谢.

参 考 文 献

- [1] Mindlin, R., Force at point in the interior of a semi infinite solid, *Physics*, (1936).
- [2] 徐志英, 以明特林(Mindlin)公式为根据的地基中垂直应力的计算公式, *土木工程学报*, 4, 4(1957).
- [3] 徐志英, 俞仲良, 深置圆形基础的沉降计算, *土木工程学报*, 3, 4(1958).
- [4] 工程地质与地基基础教材选编小组, 工程地质与地基基础, 中国工业出版社(1961).
- [5] Егоров, К. Е., О деформаций основания под круглым и кольцевым фундаментом, *Научно-Технический бюллетень основания и фундамента*, (1957).
- [6] 徐桂芳, 积分表, 科学技术出版社(1953).
- [7] 王耀杰, 关于地基应力计算方法的探讨, 陕西省冶金勘察设计院设计队(1978).
- [8] 陈传璋等, 数学分析, 上海科学技术出版社(1963).

(上接第 51 页)

不必要的求刻度系数的标定实验. 从 72 年开始, 应用于激波管与激波管风洞的传热测量工作. 数年应用经验表明: 模拟网络构造简单, 造价便宜, 使用方便, 并且稳定可靠. 采用模拟网络后, 节省了大量的处理数据的人力与计算费用.

参加这项工作的还有唐贵明、颜坤志、李静美及单泽珍等同志.

符 号 表

- C 电容; c 分布电容;
 E 电势差;
 E₀ 薄膜电阻初始电势差;
 i 电流; i_0 : 表面或端部电流;

- i_{f0} 薄膜电阻初始电流
 k_i, k_r, k_c 刻度系数
 K, ρ, s 分别为基座热导率, 密度及比热;
 q 热流率
 R 电阻; r : 分布电阻;
 R_{f0} 薄膜电阻初始电阻;
 T 温度; t : 时间
 V 电压; $\operatorname{erf} \left(2\sqrt{\frac{t}{RC}} \right)$: 误差函数;
 X 距离; $I_0 \left(\frac{2r}{RC} \right)$: 虚变数贝塞尔函数;
 α 薄膜电阻温度系数.

参 考 文 献

- [1] 俞鸿儒, 李仲发等, 转换表面温度为表面热流率的热电模拟网络, 中国科学院力学研究所八室报告, 1973.
- [2] Meyer, R. F., A heat-flux-meter for use with thin film Surface thermometers, N. R. C. of Canada, Aero. Rep., LR-279, (1960).