

# 非正交座标系统在环形等离子体平衡 通用计算程序中的应用

薛明伦 汪诗金

(中国科学院力学研究所)

(中国科学院物理研究所)

本文建议采用一个随边界形状变化而作自动调整的非正交座标(及网格)系统来计算环形等离子体固定边界情况下的平衡问题。程序可以做到通用化,对不同位形的计算只要改变一下边界座标的输入数据就可以了。

环形等离子体的平衡计算是磁约束受控热核反应研究中最常进行的计算课题。除去在最简单的位形和电流分布规律下可以得到一些分析解外,一般情况下只能用数值解法。近年来,考虑到非圆截面等离子体位形在一定条件下有一定优点,正在深入比较各种非圆截面等离子体位形的约束能力和稳定性能<sup>[1,2,3]</sup>。用圆柱正交座标系统计算环形等离子体平衡有一定缺陷,边界点经常落在网格节点之间,这样就要用不等距差分公式。边界点附近的面积积分也很难准确。个别位形个别处理,对程序通用化造成障碍。本文建议应用一个新的座标系统,其特点是随边界形状不同而作自动调整,完全避免了上述缺点,使计算程序做到通用化。

这一座标系统如图1所示,把中间分界面上边界二个交点 $R_1$ 、 $R_2$ 之间的区间作 $M$ 等分,其垂线在边界上有二个交点 $Z_1$ 、 $Z_2$ ,其垂直长度在一般情况下是变化的,沿每一根垂线作 $N$ 等分。然后把相应点按图1所示连接起来就组成一个非正交座标系统。这一座标系统有下列特点:沿 $R$ 向和 $Z$ 向的网格数都是相等的,沿 $Z$ 向的差分间隔是等距的,这一间距仅是边界高度 $Z_0$ 的函数;沿 $R$ 的差分间隔也是等距的,并在整个区域为常数;沿 $Z$ 向每一微元的面积是相等的。

任一物理量 $q$ 沿曲线座标的偏导数以 $\frac{\partial q}{\partial r}$ 表示,则有

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial z} \operatorname{tg} \beta, \quad (1)$$

$$\text{即 } \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial z} \operatorname{tg} \beta. \quad (1a)$$

从(1a)也可以写出

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial q}{\partial r} \right)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial q}{\partial r} \right) - \frac{\partial \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)}{\partial z} \operatorname{tg} \beta.$$

其中 $\frac{\partial q}{\partial r}$ 以(1a)代入后,可得

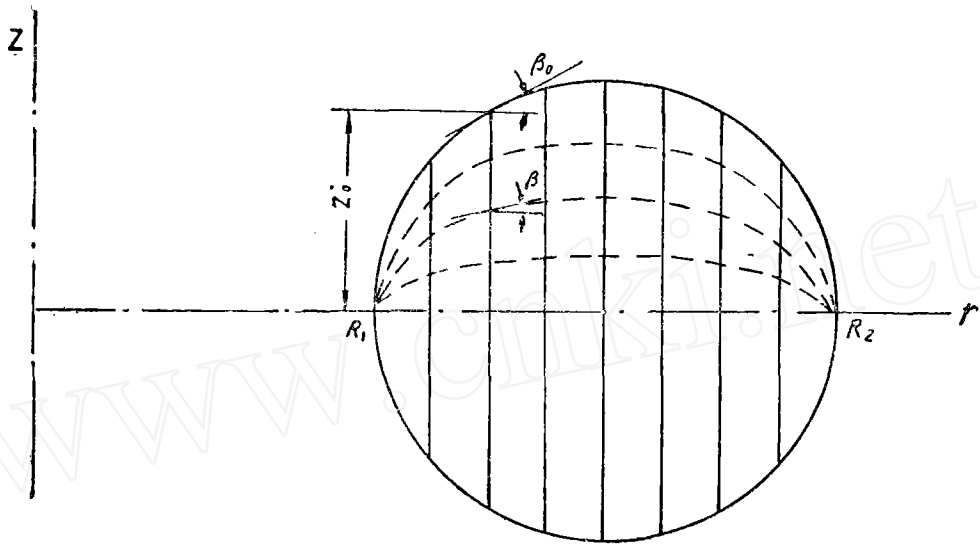


图 1

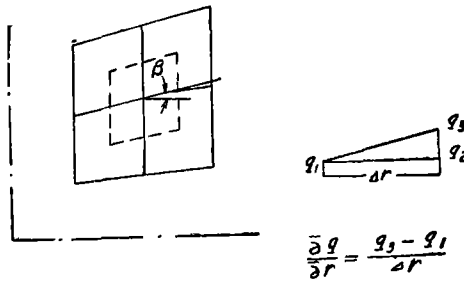


图 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} &= \frac{\bar{\partial}}{\partial r} \left( \frac{\bar{\partial} q}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial z} \operatorname{tg} \beta \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{\partial} q}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial z} \operatorname{tg} \beta \right) \operatorname{tg} \beta \\ &= \frac{\bar{\partial}^2 q}{\partial r^2} - 2 \operatorname{tg} \beta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{\partial} q}{\partial r} \right) + \frac{\partial q}{\partial z} \left( - \frac{\bar{\partial} \operatorname{tg} \beta}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{tg} \beta \frac{\partial \operatorname{tg} \beta}{\partial z} \right) + \operatorname{tg}^2 \beta \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

我们知道环形等离子体在正交圆柱座标下的平衡方程是

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -4\pi^2 \left( r^2 \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{8\pi^2} \frac{dI^2}{d\psi} \right). \quad (3)$$

其中  $\psi$  为角向磁通量函数,  $p$  为等离子体压力,  $I$  为角向总电流,  $p$  和  $I$  都仅是  $\psi$  的函数。

以(1 a), (2)代入(3)得: (把  $q$  看作  $\psi$ )

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial}^2 \psi}{\partial r^2} - 2 \operatorname{tg} \beta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \right) + \left( \operatorname{tg} \beta \frac{\partial \operatorname{tg} \beta}{\partial z} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{r} - \frac{\bar{\partial} \operatorname{tg} \beta}{\partial r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ - \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} + (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -4\pi^2 \left( r^2 A(\psi) + \frac{1}{8\pi^2} B(\psi) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

这是一个变系数的二阶偏微分方程，其系数可由下列各式确定

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \operatorname{tg} \beta_0 - \frac{z}{Z_0}, \\ \frac{\partial \operatorname{tg} \beta}{\partial z} &= -\frac{\operatorname{tg} \beta_0}{Z_0}, \\ \frac{\bar{\partial} \operatorname{tg} \beta}{\bar{\partial} r} &= z \left[ -\frac{\bar{\partial} \left( \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{Z_0} \right)}{\bar{\partial} r} + \left( \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{Z_0} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

(或直接用差分式)

可以看到，方程(4)的系数都是由边界的形状和计算点所处的位置坐标唯一地确定。方程(4)可用松弛法求解<sup>[4]</sup>，即

$$\psi^{(n+1)} = \psi^{(n)} + \frac{\omega}{4} R^{(n)}. \quad (5)$$

其中  $R^{(n)}$  为残值， $\omega$  为松弛因子。

在平衡计算时，为了在叠代过程中避免走向平凡解，一种方法是在每一次循环中间调整一下  $A(\psi)$  和  $B(\psi)$  的系数，使

$$I_p = \int_A j_\psi dA = \text{常数}, \quad (6)$$

$$\beta_p = \frac{\int_V p \cdot dV}{V \frac{B_{p0}^2}{2}} = \frac{\int p \cdot 2\pi r dA}{\frac{B_{p0}^2}{2} \int 2\pi r dA} = \text{常数}.$$

其中微元面积， $\Delta A = \Delta r \cdot \Delta z$ ， $\Delta z$  仅是  $r$  的函数，而  $\Delta r$  为常数，微元体积是  $2\pi r \Delta A$ ， $B_{p0}$  为沿横截面周长平均的角向场强。

在开始计算时，有时为了避免发散，用  $\omega < 1$ ，计算进行 2—3 分钟后再用  $\omega > 1$ ，大约 6—7 分钟就能计算一个网格数为  $20 \times 20$  的环形等离子体的有关平衡参数，直到

$$\frac{\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}}{\psi^{(n)}} \leq 10^{-5}.$$

作为算例，我们用同一程序，只改变一下边界座标的输入数据，计算了圆形截面、长椭圆截面 ( $\frac{b}{a} = 1.5$ )，扁椭圆截面 ( $\frac{a}{b} = 1.5$ )，得到很满意的结果。圆形截面的情况和用正交座标的计算结果<sup>[6]</sup>比较，十分吻合。部分计算结果见图 3，4。

为了检查非正交座标系统下的数值结果的准确性，我们用索罗维耶夫 (Solov'ev) 的分析解的位形来进行计算并比较<sup>[6]</sup>：

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -4 \pi^2 r^2 \frac{dp}{d\psi}. \quad (7)$$

如果，

$$p(\psi) = -\frac{(1 + E^2) B_0}{2 \pi E R^2 q(0)} \psi,$$

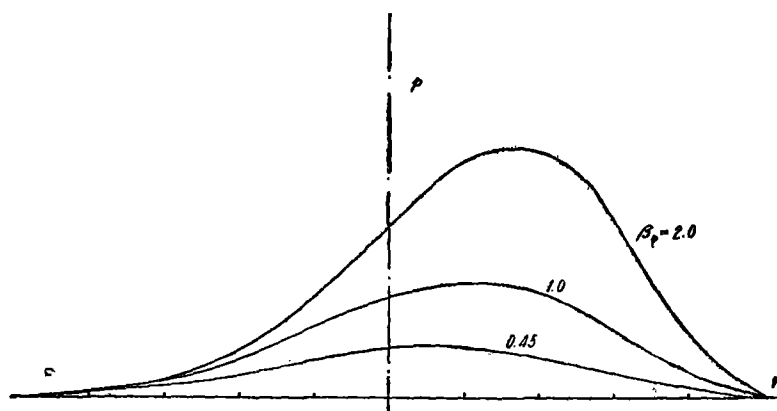
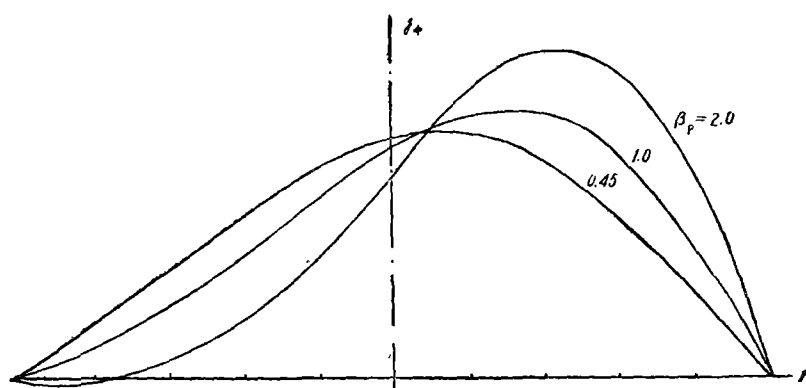
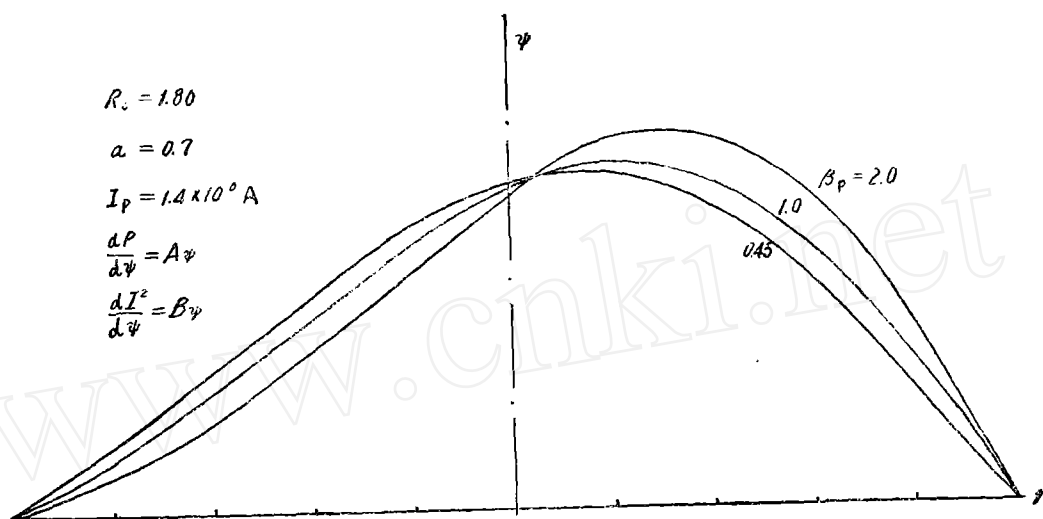


图 3

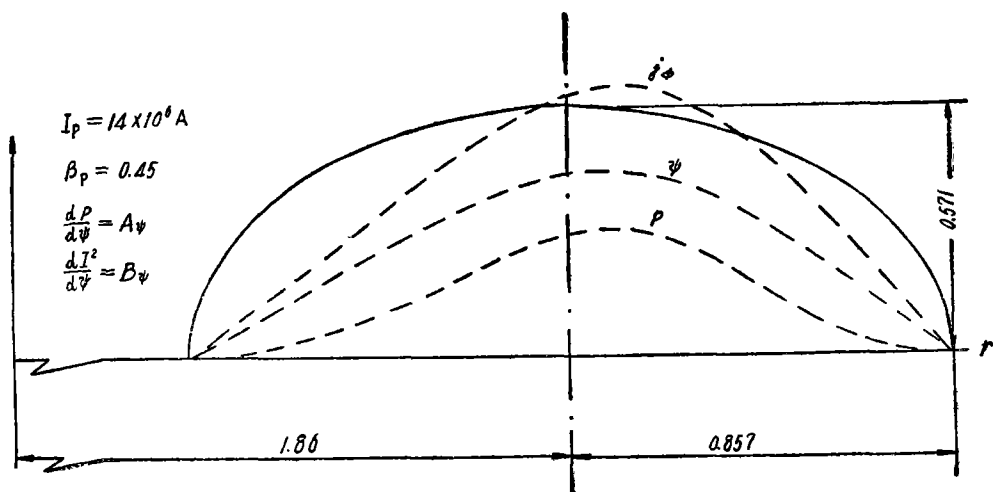
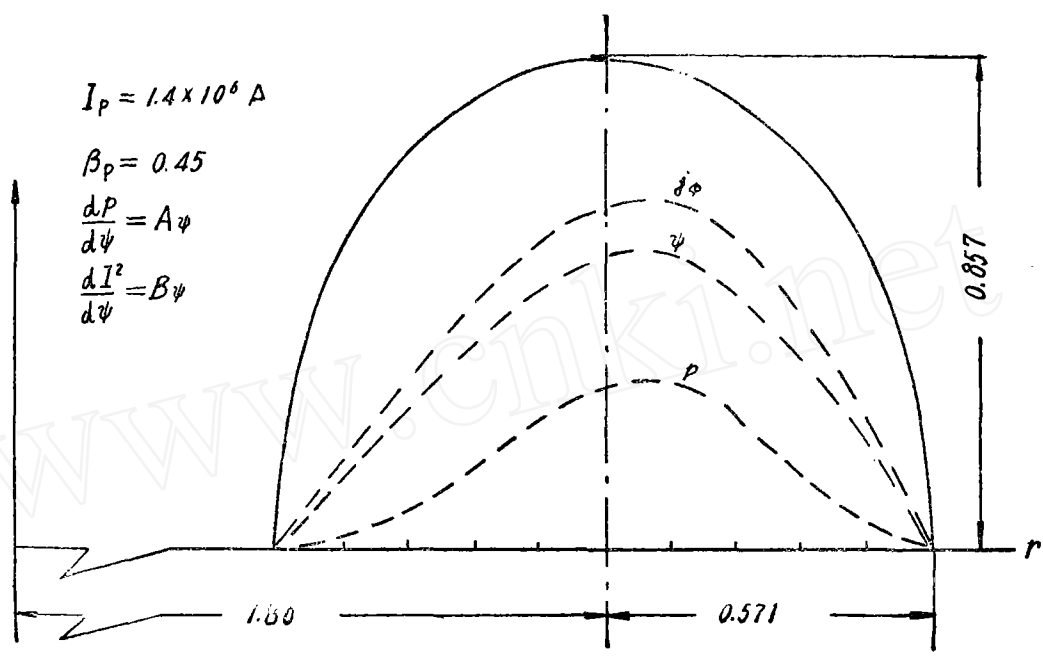


图 4

则方程(7)的分析解为

$$\psi = \psi_0 - \frac{\pi B_0}{ER^2 q(0)} \left[ r^2 z^2 + \frac{E^2}{4} (r^2 - R^2)^2 \right].$$

其中,  $\psi_0$  为磁轴上的磁通量函数;  $E$ ——磁轴上磁面的椭圆度;  $q(0)$ ——磁轴上的安全因子;  $B_0$ ——磁轴上的环向磁场强度;  $R$ ——磁轴处的半径。等离子体边界上  $\psi = 0$ 。

取  $\psi_0 = 4$  韦伯,  $E = 1.0$ ,  $q(0) = 1$ ,  $R = 2$  米,  $B_0 = 3$  韦伯/米<sup>2</sup>。

用网格数  $20 \times 20$ ,  $30 \times 30$ ,  $40 \times 40$  进行了计算, 在保证  $(\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}) / \psi^{(n)} \leq 10^{-6}$  的计算准确度下, 整个区域内  $(\psi - \psi_{\text{分析解}}) / \psi_0 < 3\%$ , 计算表明, 网格数  $20 \times 20$  已有足够的准

确度，有时增长网格数到 $40 \times 40$ 并不显著提高准确度。

对于截面形状比较长的位形，例如双流器 (Doublet) 或带状收缩 (Belt pinch) 采用另一类非正交坐标更合适，其形式如图 5 所示，这时相当于把图 1 所示的坐标转过 $90^\circ$ 。

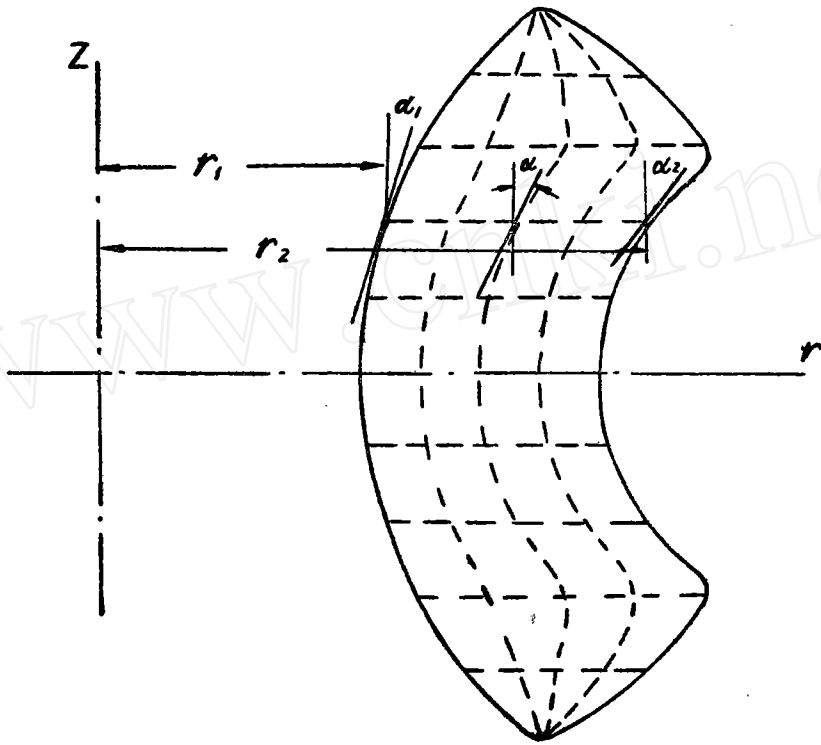


图 5

这时 
$$\frac{\bar{\partial} q}{\bar{\partial} z} = \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial r} \operatorname{tg} \alpha,$$

即 
$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\bar{\partial} q}{\bar{\partial} z} - \frac{\partial q}{\partial r} \operatorname{tg} \alpha.$$

而 
$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)}{\partial z} &= \frac{\bar{\partial} \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)}{\bar{\partial} z} - \frac{\partial \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)}{\partial r} \operatorname{tg} \alpha \\ &= \frac{\bar{\partial} \left( \frac{\bar{\partial} q}{\bar{\partial} z} - \frac{\partial q}{\partial r} \operatorname{tg} \alpha \right)}{\bar{\partial} z} - \frac{\partial \left( \frac{\bar{\partial} q}{\bar{\partial} z} - \frac{\partial q}{\partial r} \operatorname{tg} \alpha \right)}{\partial r} \operatorname{tg} \alpha \\ &= \frac{\bar{\partial}^2 q}{\bar{\partial} z^2} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} z} \left( \frac{\partial q}{\partial r} \right) - \frac{\partial q}{\partial r} \frac{\bar{\partial} \operatorname{tg} \alpha}{\bar{\partial} z} \\ &\quad - \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} z} \left( \frac{\partial q}{\partial r} \right) \operatorname{tg} \alpha + \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial \operatorname{tg} \alpha}{\partial r} \frac{\partial q}{\partial r}, \end{aligned}$$

这时方程(3)化为

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \left( \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial \operatorname{tg} \alpha}{\partial r} - \frac{\bar{\partial} \operatorname{tg} \alpha}{\bar{\partial} z} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

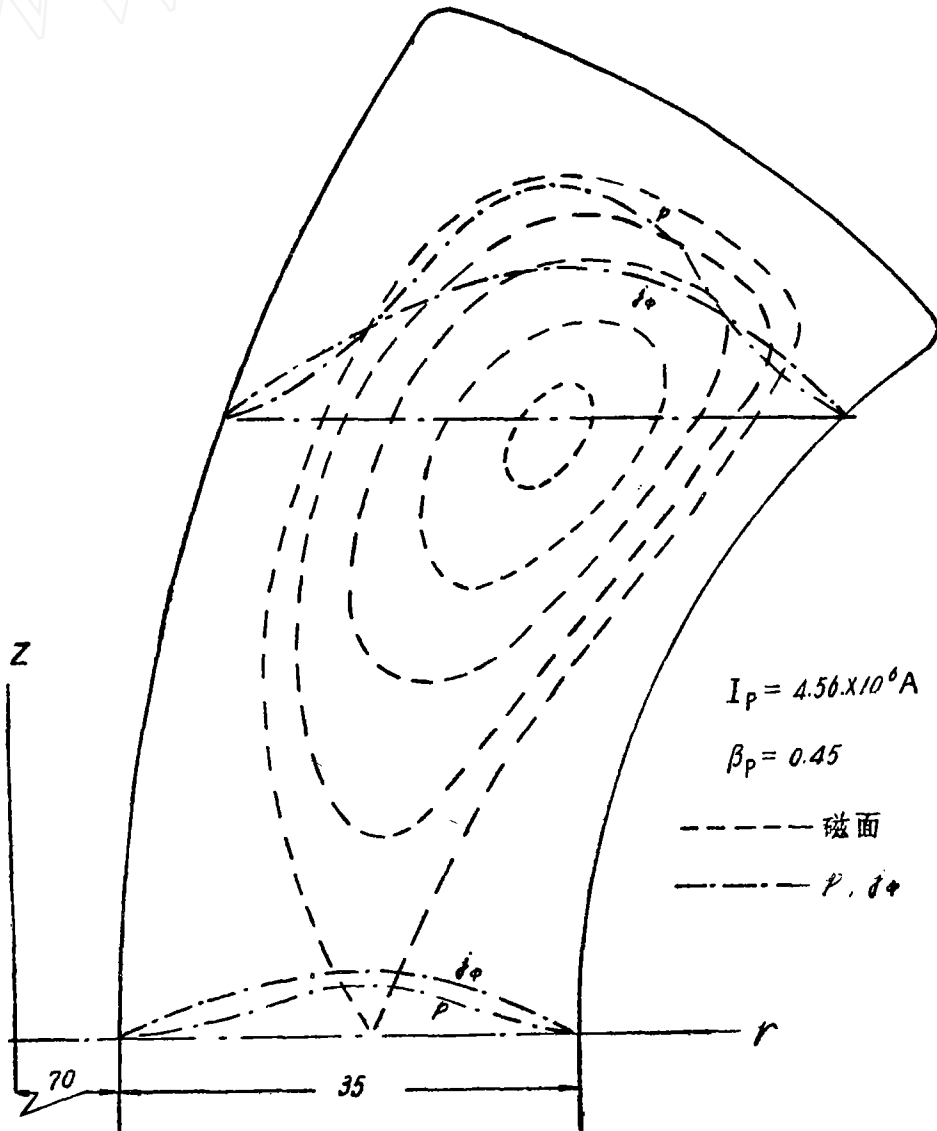
$$-2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -4 \pi^2 \left[ r^2 A(\psi) + \frac{1}{8 \pi^2} B(\psi) \right].$$

其中  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{r-r_1}{r_2-r_1} (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1)$ ,

$$\frac{\partial \operatorname{tg} \alpha}{\partial r} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{r_2 - r_1},$$

$$\frac{\partial \operatorname{tg} \alpha}{\partial z} = \frac{(\operatorname{tg} \alpha)_{i+1} - (\operatorname{tg} \alpha)_{i-1}}{2 \Delta z}.$$

用上述方程所排的通用程序，先用圆截面情况作了核对，然后对双流器位形进行了计算也得到满意的结果，部分计算结果见图6。同前述程序一样，不同位形的固定边界环形等离子体平衡计算，只要改变一下边界座标输入数据就行了。



(下转第65页)

图 6

量16微法,真空度 $1 \times 10^{-3}$ 托,示波器扫描时间 $T=1.1$ 毫秒。

图17是从图16计算得出的在模拟等离子体源中电子密度随时间变化的实验曲线。

## 六、讨 论

实验证明,所研制的过模波导元件的性能满足我们目前工作的需要。这方面的工作国外亦有一些报道<sup>[7,8,9,10]</sup>。

全过模波导微波“条纹”干涉仪,不但可工作在四毫米波段,亦可以工作在八毫米波段,原则上还可工作在二毫米波段,具有宽频带性质。

中国科学院电子学研究所和上海无线电二十六厂、北京七六八厂分别为本工作提供了四毫米波段反射调速管和若干波导元件。孙湘教授对本工作给予了热情支持并参加了有益的讨论,在此一并表示谢意。

## 参 考 文 献

- [1] 叶幼璋、焦长河、张文模、冉利波、海淑媛,四毫米波段基模过模波导混合型微波条纹干涉仪,未发表。
- [2] 微波组,准光学微波波导元件的设计——四毫米波段过模波导双棱镜耦合器,未发表。
- [3] J. J. Taub., *IEEE Tran. MATT*, 338 (1963).
- [4] 叶幼璋,张文模、海淑媛,准光学微波波导元件的设计——可调式隔膜型功率分配器的试制,未发表。
- [5] 叶幼璋、海淑媛、张文模,准光学微波波导元件的设计——四毫米波段过模变电长度式相移器,未发表。
- [6] F. A. Benson., London ILIFFE Books LTD, (1969)
- [7] 出国参观考察报告,意大利CNEN电气气体研究所FT装置的物理问题及诊断技术,编号(77)006 (1977).
- [8] J. P. Crenn, EUR-CEA-EC-608 (1971).
- [9] T. F. R. Group, Review Article at the Request of Nuclear Fusion, March (1977).
- [10] J. Bled et al., *Extrait de l'onde El'ectrique*, №422, Janvier (1964).

(上接第43页)

本文计算工作得到高能物理研究所320计算机房同志的热情支持,谨致谢意。

## 参 考 文 献

- [1] W. Feneberg, K. Lachner, *Nuclear Fusion*, 13, 549(1973).
- [2] M. S. Chu, *Physics of Fluids*, 17, 1183(1974).
- [3] L. E. Zakharov, *Nuclear Fusion*, 13, 595(1973).
- [4] D. Potter, *Computational Physics*, John Wiley and Sons, 1973.
- [5] M. S. Chance, *Journal of Computational Physics*, 28, 1(1978).
- [6] 金尚宪、孙国政,中国科学技术大学学报, 8, 75(1978).