

盘状星系松卷旋密度波引力不稳定性的恒星动力学研究

徐建军

(中国科学院力学研究所)

一、引言

在 Lin & Shu 等人^[1-3] 采用恒星动力学模型研究星系密度波时,曾作了两个基本假定:(1)假定恒星系统的基态满足小周转圆条件;(2)假定扰动态满足“短波长”“振幅缓变”条件,从而 Shu 的泊松方程渐近解式可用。

我们曾求得更一般的关于“准单色波”的泊松方程近似解式^[5]。因此可以抛弃上述第二个假定进一步处理松卷螺旋密度波,在文献[5]中,我们用流体力学模型发现松卷效应对波的特性有相当的影响。本文将从恒星动力学模型出发建立“准单色波”的传播方程。在短波范围内,我们重新得到 Lin & Shu 的各个结果;在长波范围内,我们讨论了松卷螺旋波的引力不稳定性。其定性结果与文献[5]一致。

二、引力势对扰动面密度的响应

和文献[5]相同,假定扰动面密度 σ_1 取如下形式:

$$\sigma_1 = H_m[\zeta(\tilde{\omega})]e^{i(\omega t - m\theta)}, \quad (1)$$

其中 $H_m(\zeta)$ 为 Hankel 函数, $\zeta = \zeta_* + \int_0^{\tilde{\omega}} k(\tilde{\omega}) d\tilde{\omega}$ 。其它变量,符号含义与文献[2],[3],[5]均一致。当假定函数 $k(\tilde{\omega})$ 满足“准单色波”近似条件时,作为星盘厚度的零级近似,可得对称面上的相应扰动引力势为:

$$\Psi_1 = -\frac{\sigma_1}{2k} = -\frac{1}{2k} H_m(\zeta) e^{i(\omega t - m\theta)}, \quad (2)$$

(详见文献[5]),如果将波的振幅与位相明显表示出来,则上式又可改写为:

$$\Psi_1 = A(\tilde{\omega}) e^{i\epsilon\Phi(\tilde{\omega}) + i(\omega t - m\theta)}, \quad (3)$$

其中:

$$\begin{cases} \frac{d \ln A(\tilde{\omega})}{d \ln \tilde{\omega}} = G(\zeta) k \tilde{\omega} - i\epsilon k_1 \tilde{\omega}, \\ G(\zeta) = \frac{H'_m}{H_m}, \quad \epsilon = \begin{cases} +1 & \text{对应 } H_m^{(1)}(\zeta) \\ -1 & \text{对应 } H_m^{(2)}(\zeta) \end{cases}, \\ k_1 = \frac{d\Phi}{d\tilde{\omega}} \text{ 为径向波数} \end{cases} \quad (4)$$

本文 1979 年 1 月 23 日收到。

一般地,宗量 $\zeta = \zeta(\tilde{\omega})$ 可取复值,但 $A(\tilde{\omega})$ 、 $\Phi(\tilde{\omega})$ 、 $k_1(\tilde{\omega})$ 恒为实函数. 当 ζ 为正实数时,根据 Hankel 函数的渐近展开式^[6],我们有:

$$\Phi = \zeta - \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{4m^2 - 1}{8\zeta} + \frac{(4m^2 - 1)(4m^2 - 25)}{6(4\zeta)^3} + \dots, \quad (5)$$

$$k_1 = k \left(1 - \frac{4m^2 - 1}{8\zeta^2} - \frac{2(4m^2 - 1)(4m^2 - 25)}{(4\zeta)^4} + \dots\right), \quad (\zeta > 1), \quad (6)$$

三、扰动面密度对扰动引力势的响应及“准单色波”传播的基本方程

恒星分布函数 f 满足 Власов 方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0 \quad (7)$$

这里 H 为哈密顿函数, $[H, f]$ 为泊松括号. 将诸物理量分成定常轴对称基态及非定常扰动态之后,可得基态方程及线性化小扰动方程如下:

$$\begin{cases} [H_0, f_0] = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + [H_0, f_1] = -[H_1, f_0], \end{cases} \quad (8)$$

关于方程组(8)的处理,可以照搬 Shu 的结果^[2,3]. 在小周转圆近似下,周转圆参数

$$\varepsilon(r) = \frac{c_0(r)}{r\kappa(r)} \ll 1,$$

(其中 $c_0(r) = (c_{\theta})^{1/2}$, r ——引导中心半径; $\kappa(r)$ ——周转圆频率)若忽略 $\varepsilon^2(r)$ 以上小量, Shu 曾得基态分布函数为所谓 Schwartzschild 分布^[2]:

$$\begin{cases} \Psi_0 = F(r \cdot E_c) = P(r)\exp[-E_c/c^2(r)], \\ P(r) = \frac{Q(r)}{\kappa(r)} \frac{\sigma_0(r)}{\pi c_0^2(r)} + 0(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (9)$$

再假定扰动量具有如下形式:

$$\begin{cases} f_1 = F_1(\tilde{\omega}, P_\theta, P_\psi) e^{i(\omega t - m\theta)}, \\ \Psi_1 = \mathcal{Y}(\tilde{\omega}) e^{i(\omega t - m\theta)}, \\ \sigma_1 = S(\tilde{\omega}) e^{i(\omega t - m\theta)}, \end{cases} \quad (10)$$

Shu 又得出扰密度对扰动引力势的响应(文献[3]中的公式(40)):

$$\begin{aligned} S(\tilde{\omega}) = & \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi d\eta}{2\pi\varepsilon^2(r)} \frac{\sigma_0(r)}{\tilde{\omega}^2\varepsilon^2(r)\kappa(r)} \exp[(\xi^2 + \eta^2)/2\varepsilon^2(r)] \left\{ -\mathcal{Y}(\tilde{\omega}) + \frac{\nu(r)\pi}{\sin \nu(r)\pi} \frac{1}{2\pi} \right. \\ & \left. \times \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{Y}(\tilde{\omega}_*) e^{i\nu(r)\xi} \exp\left[i \cdot m \frac{2Q(r)}{\kappa(r)} \left(\frac{\partial R_1}{\partial S} + \xi\right)\right] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

值得强调的是,公式(11)式推导中,除了对基态作了小周转圆运动假设外,对扰动态未加任何限制. 再往下, Lin & Shu 等人由于利用了 Shu 的泊松方程渐近解,所以不得不对扰动运动作了进一步的限制. 他们取 $|k_1\tilde{\omega}| = 0(\varepsilon^{-1})$. 我们仍然假设基态满足小周转圆条件,而扰动运动则允许其为一般的“准单色波”运动,从而允许:

$$0 < |k_1\tilde{\omega}| \leq \varepsilon^{-1}, \quad (12)$$

由于沿未扰动恒星轨道,仍然有:

$$A(\tilde{\omega}_*) = A(\tilde{\omega}) - \frac{dA(\tilde{\omega})}{d\tilde{\omega}} \tilde{\omega}(R_1 + R_2) + \dots \quad (13)$$

$$\Phi = (\tilde{\omega}_*) = \Phi(\tilde{\omega}) - k_1 \tilde{\omega} (R_1 + R_2) + \frac{1}{2!} \frac{dk_1}{d\tilde{\omega}} \tilde{\omega}^2 (R_1 + R_2)^2 + \dots \quad (14)$$

因此,可得出完全类似文献[3]中的(53)式的结果:

$$S(\tilde{\omega}) = \frac{k_1^2 \mathcal{V}(\tilde{\omega})}{\kappa^2 (1-\nu)^2} \sigma_0 F_\nu(x_1) \left\{ 1 - \frac{i\varepsilon}{k_1 \tilde{\omega}} D_\nu(x_1) \frac{d \ln}{d \ln \tilde{\omega}} \left(\frac{\sigma_0}{\kappa^2} k_1 \tilde{\omega} \frac{F_\nu D_\nu}{1-\nu^2} A \right) \right\}, \quad (15)$$

其中:

$$\begin{cases} x_1 = \varepsilon^2(\tilde{\omega}) k_1^2 \tilde{\omega}^2, \nu = \frac{\omega - m\Omega}{\kappa}, D_\nu(x_1) = \frac{\partial \ln}{\partial \ln x_1} [x_1 F_\nu(x_1)], \\ F_\nu(x_1) = \frac{1-\nu^2}{x_1} \left[1 - \frac{\nu\pi}{\sin \nu\pi} G_\nu(x_1) \right] = \frac{1-\nu^2}{x_1} \left[1 - I_0(x_1) e^{-x_1} + 2\nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(x_1) e^{-x_1}}{n^2 - \nu^2} \right], \\ G_\nu(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\nu s - x_1(1-\cos s)} ds, \end{cases} \quad (16)$$

为满足自洽性要求,由(3),(4)和(5)式便可推出:

$$\frac{d \ln A}{d \ln \tilde{\omega}} + i\varepsilon k_1 \tilde{\omega} = \frac{F_\nu(x_1)}{1-\nu^2} \frac{k_1^2}{k_r} G(\zeta) \tilde{\omega} \left\{ 1 - \frac{i\varepsilon}{k_1 \tilde{\omega}} D_\nu(x_1) \frac{d \ln}{d \ln \tilde{\omega}} \left[\frac{k_1 \tilde{\omega}}{k_r} \frac{F_\nu D_\nu}{1-\nu^2} A^2 \right] \right\}, \quad (17)$$

其中:

$$k_r = \frac{2k^2}{\sigma_0}$$

上式也可改写成:

$$\nu^2 = 1 - \frac{F_\nu(x_1)}{A} \frac{k_1}{k_r}, \quad (18)$$

$$i\varepsilon \frac{D_\nu(x_1)}{k} \frac{dA}{d\tilde{\omega}} + \left[\frac{i\varepsilon}{k} \frac{dD_\nu(x_1)}{d\tilde{\omega}} - \frac{k_1}{k} + D_\nu(x_1) \left(\frac{i\varepsilon}{k_1 \tilde{\omega}} + 2i\varepsilon G(\zeta) + \frac{2k_1}{k} \right) \right] A + 1 = 0, \quad (19)$$

其中 $\Lambda(\zeta, \tilde{\omega})$ 可称为松卷修正因子。方程(17)式或(18)–(19)式均是以 ω 为参数关于 $\zeta(\tilde{\omega})$ 的非线性常微分方程,一旦 $\zeta(\tilde{\omega})$ 解出,则 σ_1, Ψ_1 的分布完全确定。因此,它们可称为波的基本传播方程。

四、短波极限、色散关系与振幅分布

由 Hankel 函数渐近公式推知,当 $|\zeta| > 1$ 时,

$$\begin{cases} G(\zeta) = G_R + i\varepsilon G_I, \\ G_R = -\frac{1}{2\zeta} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{2\zeta^3} + \dots, \\ G_I = 1 - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{2\zeta^2} + \dots, \end{cases} \quad (20)$$

若仅考虑中性波,则 $\nu, F_\nu(x_1), D_\nu(x_1)$ 均取实值。由(17)式分开实部,虚部可得

$$A = \frac{G_I}{|G|^2} \left[1 + \frac{1}{k_1 \tilde{\omega}} \left(\frac{G_R}{G_I} \right) \left(\frac{d \ln A}{d \ln \tilde{\omega}} \right) \right], \quad (21)$$

$$(1 - 2AG_I D_\nu) \frac{d \ln(\tilde{\omega} A)}{d \ln \tilde{\omega}} = (1 + 2AG_R k_1 \tilde{\omega}) + 2G_I \frac{d(\Lambda D_\nu)}{d\tilde{\omega}}, \quad (22)$$

因此,一般地波幅变化 $\left(\frac{d \ln A}{d \ln \bar{\omega}}\right)$ 将通过 Λ 因子而影响波数与频率的关系 (18) 式. 仅仅当 $|\zeta| \gg 1$, 忽略 $\left(\frac{m}{\zeta}\right)^2$ 以上高阶小量, 取 $\Lambda \approx 1$, $k_i \approx k$, $G_I \approx 1$, $G_R \approx -\frac{1}{2\zeta}$, 才能得出:

$$\begin{cases} \nu^2 = 1 - F_\nu(x_1) \frac{k_i}{k_T}, \\ [1 - 2D_\nu(x_1)] \frac{d \ln(\bar{\omega} A^2)}{d \ln \bar{\omega}} = \frac{D_\nu(x_1)}{d \bar{\omega}} \text{ 或 } [1 - 2D_\nu(x_1)] \bar{\omega} A^2 = \text{常数}, \end{cases} \quad (23)$$

这正是 Lin & Shu 得出的色散关系及 Shu (1970) 得出的波作量密度守恒关系.

五、松卷螺旋波的引力不稳定性

当 $\left(\frac{m}{\zeta}\right) = O(1)$ 时, (23) 式失效, 为研究这种范围内波的特征, 我们假定 $\zeta(\bar{\omega})$ 为实数, 因

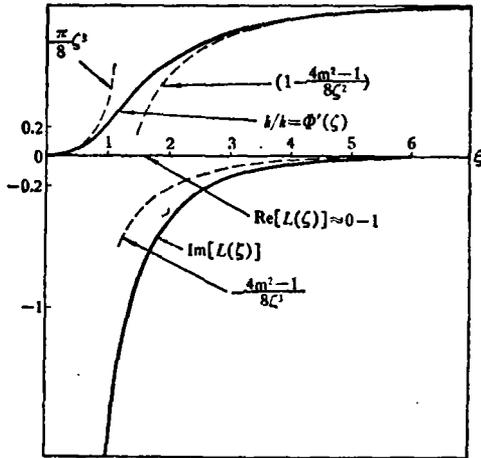


图 1 函数 k_i/k , $L(\zeta)$ 随 ζ 的变化曲线 ($m=2$)

此, $\nu = \nu_R + i\nu_I$ 为复数, 由 Bessel 函数理论, 有公式^[6]:

$$\begin{aligned} A^2 &= J_m^2 + Y_m^2, \\ A^2 \Phi'(\zeta) &= \frac{2}{\pi \zeta^2}, \\ \frac{k_i}{k} &= \Phi'(\zeta), \end{aligned} \quad (24)$$

近似地取: $\zeta \approx k\bar{\omega}$. 并且由于当 $\zeta = O(1)$ 时,

$$x_1 = O(\varepsilon^2), \quad F_\nu(x_1) \approx 1, \quad D_\nu(x_1) \approx 1,$$

因此 (19) 式可化为:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{d\Lambda}{d\zeta} + [L(\zeta) - \Phi'(\zeta)]\Lambda + 1 = 0, \\ \zeta \rightarrow \infty, \Lambda \rightarrow 1 \end{cases} \quad (25)$$

这里:

$$L(\zeta) = \frac{i\varepsilon}{k\bar{\omega}} + 2i\varepsilon G(\zeta) + \frac{2k_i}{k} \approx \frac{i\varepsilon}{\zeta} + 2i\varepsilon G(\zeta) + 2\Phi'(\zeta), \quad (26)$$

$L(\zeta)$, $\frac{k_i}{k}$ 均可利用 Bessel 函数表作图 (见图 1). 由于 (25) 式, 我们得出渐近形式解:

$$\Lambda = \Lambda_R + i\Lambda_I = \left(1 + \frac{4m^2 - 1}{8\zeta^2}\right) - i\varepsilon \frac{3(4m^2 - 1)}{8\zeta^3} + \dots, \quad (27)$$

对于小虚部情形, $\nu_I \ll \nu_R$ (18) 式简化为:

$$\nu_R^2 = 1 - \frac{\Lambda_R}{|\Lambda|^2 Q} \left(\frac{k_i}{k}\right), \quad \nu_I = -i\varepsilon \frac{(1 - \nu_R^2) 3(4m^2 - 1)}{16\nu_R \zeta^3 + \frac{4m^2 - 1}{8}\zeta}, \quad (28)$$

其中 $Q = \frac{2\kappa c_0}{\sigma_0}$, $k_0 = \frac{k_T}{Q} = \frac{1}{\varepsilon(\bar{\omega})\bar{\omega}}$,

由 (28) 式可推知在波的主要范围内 ($|\nu_R| < 1$), ν_I 的符号如表所示:

可见,与文献[5]结果一致地,对于曳波($\epsilon = +1$),波幅将在共转圈内增长,在共转圈外衰减;对于导波($\epsilon = -1$),则恰好相反。

特别,对冷盘模型; $\epsilon(\tilde{\omega}) \equiv 0$, $x_1 \equiv 0$, $F_\nu(x_1) = D_\nu(x_1) \equiv 1$. 则公式(18)变为:

$$\nu^2 = 1 - \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{k}{k_1} \right), \quad (29)$$

因此,(27)和(29)式或(28)式是 Toomre (1964) 所得结果在长波范围内的推广. 它说明: 在“冷盘”中对于波长大于 $\lambda_T = \frac{2\pi}{k_T}$ 的具有实 $\zeta(\tilde{\omega})$ 值的波而言,引力不稳定性依然存在,这种波在共转圈内、外的增长、衰减特性将视其为曳型或导型而定。

参 考 文 献

- [1] 林家翘著,胡文瑞、韩念国译,星系螺旋结构理论,科学出版社,1977.
- [2] 徐遐生, *Ap. J.*, **158**(1969), 505.
- [3] 徐遐生, *Ap. J.*, **160**(1970), 99.
- [4] Bertin, G. & Mark, J. W. K., *Astron. Astrophys. J.*, **64**(1978), 389.
- [5] 徐建军, *Scientia Sinica*, **22**(1979), 806.
- [6] Abramowitz, M. & Stegun I. A. (Eds), *Handbook of Mathematical Functions. With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, N. Y., Dover Publications Inc., 1956.
- [7] Toomre, A., *Ap. J.*, **139**(1964), 1217.