

平面应力的弹塑性断裂 模型及其有限元分析*

徐纪林 王自强

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文根据文献^[6]对薄钢板试样的实验分析,提出一个平面应力的弹塑性断裂模型——带状颈缩区模型.将Dugdale模型推广到弹塑性变形场情形.用弹塑性全量理论和增量理论的有限元法,分别计算了具有中心裂纹的薄宽板受均匀拉伸情形的裂纹张开位移、应力应变场.结果表明Burdekin设计曲线在一定条件下才是安全的,本文计算的裂纹张开位移与一些实验测量结果符合良好.

一、引言

在工程中,经常遇到带裂纹的薄壁结构,对于韧性较好的材料,裂纹在起始扩展以前就有很大的塑性区,尤其短裂纹薄板,裂纹扩展往往在全面屈服情况下发生,这时平面应变的线弹性断裂理论已不再适用;因此必须研究解决这类问题的平面应力弹塑性断裂理论.

Dugdale^[1]通过试验观察,发现具有较长穿透裂纹的薄板,塑性变形集中在裂纹顶端延伸面方向的一对与板面成 45° 角的切变带中,形成一个高度大致等于板厚的长条状的塑性应变集中区,即条状屈服区.D-M模型就是Dugdale应用Muskhelishvili解法来讨论的模型:将条状屈服区的高度近似取为零,在条状屈服区作用屈服应力,以代替塑性区对弹性区的作用力,求解这样的弹性问题,利用消除奇性条件得出计算条状屈服区长度和裂纹顶端张开位移(CTOD)的公式.用这个模型计算CTOD时,就是计算真实裂纹顶端的张开位移.在低应力破坏时,应用D-M模型和COD准则所推得的起裂载荷与大量实验符合很好.但是对于短裂纹的情况,裂纹起始扩展通常发生在大范围屈服甚至全面屈服的情况下,塑性区并不限于裂纹延伸面,而向着与裂纹线大约成 50° 方向发展成两条剪切带^[2],D-M模型显然不再适用.

对于大范围屈服甚至全面屈服情况下高应变区的断裂分析,目前主要依靠实验,由实验得出裂纹顶端张开位移 δ ,标称应变 e 和裂纹长度 a 之间的经验公式.图1给出英国焊接研究所早期大量宽板实验的结果,以及根据实验归纳得出的Burdekin设计曲线^[2],^[3]和Wells经验公式.但是Egan^[4]的实验结果认为Burdekin设计曲线不是对任何裂纹板都能适用,并非完全是安全的.文献^[5]认为,只有对于不存在任何韧带屈服干扰的均匀塑性应变区中的小裂纹情况下Burdekin关系式才成立.

* 1979年9月10日收到.

本文根据 Schaeffer 等^[6]对薄钢板试样进行裂纹张开位移 (COD) 测量的实验分析, 提出平面应力的一个弹塑性断裂模型, 也就是带状颈缩区模型, 结合弹塑性全量理论和增量理论有限元分析, 计算了薄宽板中心裂纹的张开位移, 并与 Burdekin 设计曲线以及一些实验结果进行比较, 计算表明: 对低应变区进行断裂分析, Burdekin 设计曲线是安全的, 而在高应变区标称应变随所选择的标称点位置的不同变化很大, 只是在一定的

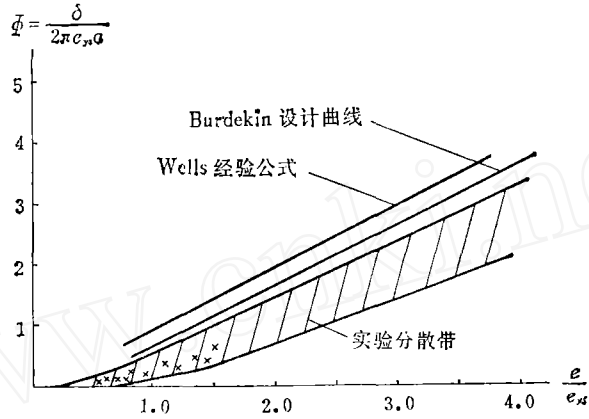


图 1 裂纹顶端张开位移 δ 与标称应变 e 的无量纲参数关系^{[2]、[3]}

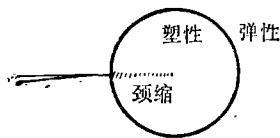


图 2 裂纹周围变形区^{[6]、[8]}

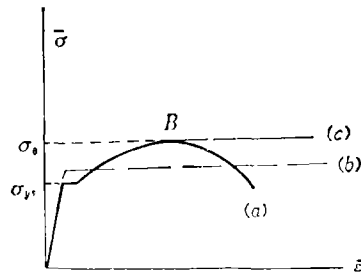


图 3

标称点位置范围内 Burdekin 设计曲线才是安全的。本文计算的裂纹张开位移与已发表的一些实验测量结果^{[5] [7]}符合良好。

二、平面应力的一个弹塑性断裂模型

对于平面应力问题, Schaeffer 等^[6]对薄钢板试样进行了 COD 测量, 并从试验观察到对于应变硬化材料, 裂纹顶端局部应力量达到强度极限后处于颈缩流动状态, 在裂纹延伸面上形成一带状颈缩区, 颈缩区埋在塑性区内, 塑性区外面是弹性区, 如图 2 所示^{[6]、[8]}。

一般中低强度材料光滑试样的单轴拉伸曲线如图 3 曲线 (a) 所示, B 点是最大载荷点, 对应于极限强度 σ_0 , 从 B 点开始出现颈缩。由于平面应力有 $\sigma_z = 0$, 可以认为一般

硬化材料满足 Tresca 加载准则，因此上述裂纹延伸面上的带状颈缩区内 $\sigma_y = \sigma_0$ 。为简化起见，对颈缩后材料曲线作一近似描述，认为颈缩点后应力不变，本文以图 3 曲线 (c) 来代替曲线 (a)。

由此，我们提出一个平面应力的弹塑性断裂模型——带状颈缩区模型。设想在裂纹顶端的延伸面上，有一狭窄的带状颈缩区，作用着极限应力 σ_0 。在带状颈缩区之外是塑性区，而塑性区又被弹性区所包围。假定带状颈缩区很窄，其高度可近似取为零。这样，带状颈缩区可以看作是真实裂纹的延伸，真实裂纹与带状颈缩区一起看作是有效裂纹，如图 4 所示。在有效裂纹顶端，应力、应变都是连续的，有限的；位移在裂纹延伸方向是连续的，而颈缩区上、下两侧法向位移是间断的。

带状颈缩区模型可以看作是 Dugdale 模型的推广。对于理想塑性材料，具有较长的中心裂纹宽板受均匀拉伸的情形下，本文的带状颈缩区模型与 Dugdale 模型是等价的。对于加工硬化材料，Dugdale 模型是把带状塑性区之外的区域看作弹性体，认为塑性区只集中在裂纹延伸面的窄带上，并以图 3 曲线 (b) 代替实际的材料曲线 (a)；而本文的带状颈缩区模型，允许塑性区是任意的形状，也就是说在带状颈缩区之外是真实的弹塑性体，需要用弹塑性理论进行分析。这里采用实际的材料曲线，仅对颈缩后作近似描述，以图 3 曲线 (c) 取代曲线 (a)。

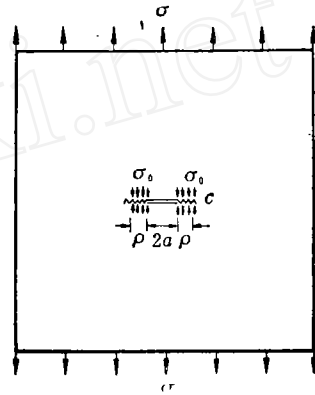


图 4 裂纹前端带状颈缩区

三、平面应力弹塑性断裂模型的全量理论有限元分析

文献^{[9] [10] [11]}等对于应力应变关系 $\sigma_i = a\epsilon_i^N$ 的幂次硬化材料，应用塑性全量理论，结合平面极坐标下的尖裂纹附近二维弹塑性变形场，认为裂纹顶端有下式所示的应变奇性

$$\epsilon_{ij} \propto K_\epsilon r^{-\frac{1}{N+1}} \tilde{\epsilon}_{ij}(\theta) \tag{1}$$

同时，裂纹顶端的位移具有以下形式

$$u_i \propto K_\epsilon r^{\frac{N}{N+1}} \tilde{u}_i(\theta) \tag{2}$$

式中 N 是应变硬化指数， K_ϵ 称塑性应变强度因子。

根据本文提出的平面应力断裂模型，在外加拉伸应力 σ 和颈缩区上极限应力 σ_0 作用下，应要求有效裂纹顶端 C 处消除奇性，即 $K_\epsilon = 0$ 。由此，本文进行如下全量理论的有限元分析。

塑性变形的全量理论假定：

1) 平均应变 ϵ_m 与平均应力 σ_m 成正比，即

$$\sigma_m = \frac{E}{1 - 2\nu} \epsilon_m \tag{3}$$

2) 应变偏量正比于应力偏量, 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_m &= \frac{2E_s}{3} (\varepsilon_x - \varepsilon_m), \\ \sigma_y - \sigma_m &= \frac{2E_s}{3} (\varepsilon_y - \varepsilon_m), \\ \tau_{xy} &= \frac{E_s}{3} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中

$$E_s = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} \quad (5)$$

等效应力强度

$$\bar{\sigma} \equiv \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (6)$$

等效应变强度

$$\bar{\varepsilon} \equiv \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_x \varepsilon_z - \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{3}{4} \gamma_{xy}^2} \quad (7)$$

设应力列阵

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \quad (8)$$

设应变列阵

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \quad (9)$$

由式(3)、(4)可得到弹塑性全量理论应力应变关系式

$$\{\sigma\} = [D]_{ep} \{\varepsilon\} \quad (10)$$

弹塑性系数矩阵 $[D]_{ep}$ 取决于当时的应力状态.

$$[D]_{ep} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} D_{11} = D_{22} &= \frac{1 + \frac{1-2\nu}{3E} E_s}{\frac{3}{4} + \frac{1-2\nu}{E} E_s} E_s \\ D_{12} = D_{21} &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\nu}{3E} E_s}{\frac{3}{4} + \frac{1-2\nu}{E} E_s} E_s \\ D_{33} &= \frac{E_s}{3} \\ D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

令 $\{u\}$ 为结点的位移列阵, $\{F\}$ 为结点的载荷列阵, 有限元法非线性平衡方程为

$$[K(\{u\})] \{u\} = \{F\} \quad (12)$$

$[K(\{u\})]$ 是刚度矩阵.

本文采用三角形单元进行计算, 由于均匀拉伸的中心裂纹板的对称性, 仅考虑图形的四分之一, 单元网格自动划分, 有效裂纹顶端单元尺寸与裂纹长度之比为 $\frac{1}{128}$, 共分 360 个单元 216 个节点, 用初应力法求解方程(12), 计算的具体步骤如下:

1. 在裂纹延线上, 假定一个带状颈缩区长度 ρ , 在 ρ 上作用极限应力 σ_0 , 如图 4 所示, 真实裂纹 a 与颈缩区 ρ 一起看作有效裂纹.

2. 在某一外加拉伸应力 $\sigma = \sigma_1$ 作用下, 用初应力法解方程(12).

3. 以有效裂纹顶端 C 点作为平面极坐标原点, 取裂纹线上顶端 C 附近的若干点, 计算这些点在裂纹垂直方向上位移 u_2 , 是否满足: 当 $r \rightarrow 0$ 时 $u_2/r^{\frac{N}{N+1}}$ 趋向于零, 即由式 (2) 可知 K_e 趋于零, 如果这个条件不满足, 则改变拉伸应力 σ 的值, 重覆计算步骤 2—3 直到 K_e 趋于零为止.

4. 求出真实裂纹顶端的张开位移 δ , 中心裂纹中点张开位移 δ_0 , 不同标距 y 下的标称应变和整个应力应变场.

5. 改变带状颈缩区长度, 重覆计算步骤 1—4.

四、平面应力弹塑性断裂模型的增量理论有限元分析

塑性变形的增量理论假定: 材料在塑性状态是不可压缩的; 塑性应变增量 $\{d\varepsilon_p\}$ 的方向总与应力偏量 $\{\sigma_D\}$ 空间中屈服曲面的法线方向相同, 即

$$\{d\varepsilon_p\} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \{\sigma_D\}} \tag{13}$$

这里

$$f = \frac{3}{2} \{\sigma_D\}^T \{\sigma_D\} - \bar{\sigma}^2 \tag{14}$$

引进等效塑性应变增量

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \{d\varepsilon_p\}^T \{d\varepsilon_p\}} \tag{15}$$

应变硬化率

$$\xi = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} \tag{16}$$

于是可以得到弹塑性增量理论应力应变关系

$$\{d\sigma\} = [D']_{ep} \{d\varepsilon\} \tag{17}$$

$[D']_{ep}$ 是增量弹塑性矩阵

$$[D']_{ep} = [D_e] - \frac{[D_e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e]}{\xi + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \tag{18}$$

$[D_e]$ 是弹性系数矩阵.

对平面应力情况

$$[D']_{ep} = [D_e] - \frac{1}{SS} \begin{pmatrix} S_1^2 & S_1 S_2 & S_1 S_3 \\ S_1 S_2 & S_2^2 & S_2 S_3 \\ S_1 S_3 & S_2 S_3 & S_3^2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

式中

$$SS = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 \xi + S_1 \sigma'_x + S_2 \sigma'_y + 2S_3 \tau_{xy}$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma'_x + \nu \sigma'_y) \\ S_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma'_y + \nu \sigma'_x) \\ S_3 &= \frac{E}{1+\nu} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

σ'_x 、 σ'_y 是应力偏量。

这样, 就可以根据单元应力状态, 求出单元刚度矩阵, 最后求解平衡方程

$$[K(\{u\})]\{du\} = \{dF\} \quad (21)$$

采用弹塑性增量理论有限元法来分析本文所提出的平面应力断裂模型, 主要步骤如下: 如图 5 所示, 在裂纹延线上, 如果有一带状颈缩区, 不妨假设为 A_0A_3 , 令颈缩区上单元的边长为 l_1 、 l_2 、 l_3 , 板厚为 t , 那么在颈缩区 A_0A_3 上作用极限应力 σ_0 , 即相当于节点 A_0 、 A_1 、 A_2 上的等效节点力, 由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} R_{A_0} &= \frac{1}{2}\sigma_0 l_1 t \\ R_{A_1} &= \frac{1}{2}\sigma_0 (l_1 + l_2) t \\ R_{A_2} &= \frac{1}{2}\sigma_0 (l_2 + l_3) t \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

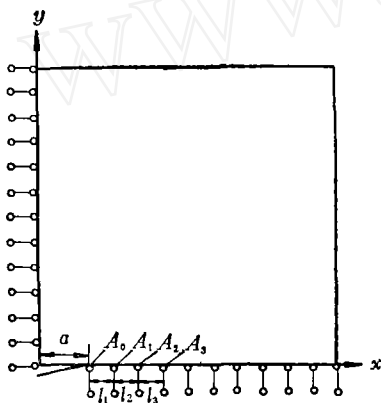


图 5

每给一载荷增量 $\{dF\}$, 由方程 (21) 求得节点位移增量 $\{du\}$, 采用切线刚度法求解, 并求出单元应力增量和单元应力, 从而求出裂纹延线上各节点 A_0 、 A_1 、 A_2 ... 的等效节点力。当 A_0 点的等效节点力达到式 (22) 给出的 R_{A_0} 值时, 则认为 A_0 点已经满足塑性颈缩条件; 取消其 y 方向的位移约束, 这时颈缩区长度认为是 A_0A_1 , 再进行下一增量加载, 直到 A_1 点等效节点力达到式 (22) 给出的 R_{A_1} 值; 再取消 A_1 点 y 方向的位移约束, 对应的颈缩区长度 A_0A_2 , 这样继续加载, 就可以得到不同的外载荷下颈缩区的长度, 同时求出该时真实裂纹顶

端的张开位移 δ , 标称应变 e 以及应力应变场。

五、计算结果与讨论

根据本文提出的带状颈缩区模型, 对应变硬化指数 N 为 0.129, 屈服极限 σ_{ys} 为 47kg/mm^2 , 极限强度 σ_0 为 59.4kg/mm^2 的幂次硬化材料, 用全量理论有限元方法计算半宽 b 为 460mm , 厚 25mm , 中心裂纹半长 a 为 57.5mm 的均匀拉伸方板。

图 6 给出裂纹半长 a 与标距 y 的比值 $\frac{a}{y}$ 为 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{5.935}$ 、 $\frac{1}{4.903}$ 、 $\frac{1}{3.871}$ 、 $\frac{1}{2.839}$ 、 $\frac{1}{1.806}$ 的标称应变 e 和裂纹顶端张开位移 δ 的无量纲参数计算结果, 即 $\Phi(=\frac{\delta}{2\pi e_{ys} a}) \sim \frac{e}{e_{ys}}$ 曲线, 这里 $e_{ys} = \frac{\sigma_{ys}}{E}$, 计算表明: 标称应变随所选择的标称点位置不同而变化很大,

当 $\frac{e}{e_{ys}} < 1.5$ 时 Burdekin 设计曲线是安全的，当 $\frac{e}{e_{ys}}$ 较大时，对于 $\frac{a}{y} < \frac{1}{4}$ 的大标距情形，Burdekin 设计曲线是不安全的。

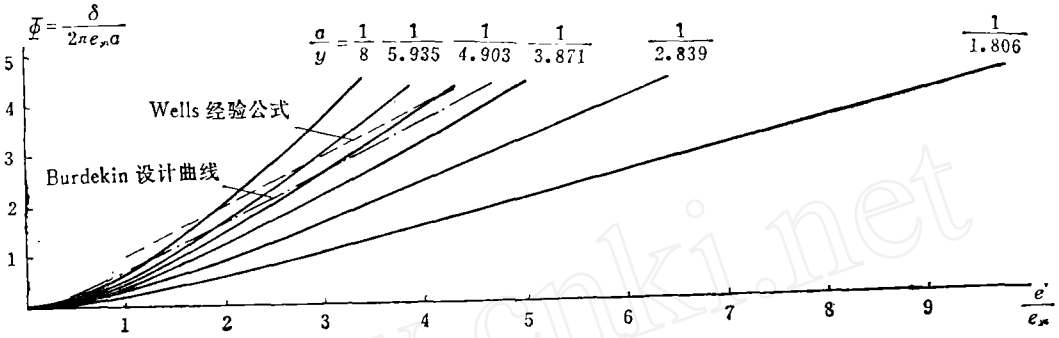


图 6

图 7 给出 $\frac{a}{y}$ 为 $\frac{1}{5.455}$ 、 $\frac{1}{4.744}$ 、 $\frac{1}{1.818}$ 、 $\frac{1}{1.423}$ 的标称应变 e 与裂纹中心点张开位移 δ_0 的无量纲参数计算结果，并与文献[5]的实验结果进行比较，两者基本上一致， $\Phi_0 (= \frac{\delta_0}{2\pi e_{ys} a})$ 的实验值比本文计算值一般偏高，最大偏高 20% 左右，须说明实验所用的试件 $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ，而计算所取的 $\frac{a}{b}$ 约为 $\frac{1}{8}$ ，这也就是 Φ_0 的计算值低于实验值的原因。同时，本文计算中所取的材料参数与[5]中实验所用的也不尽相同。

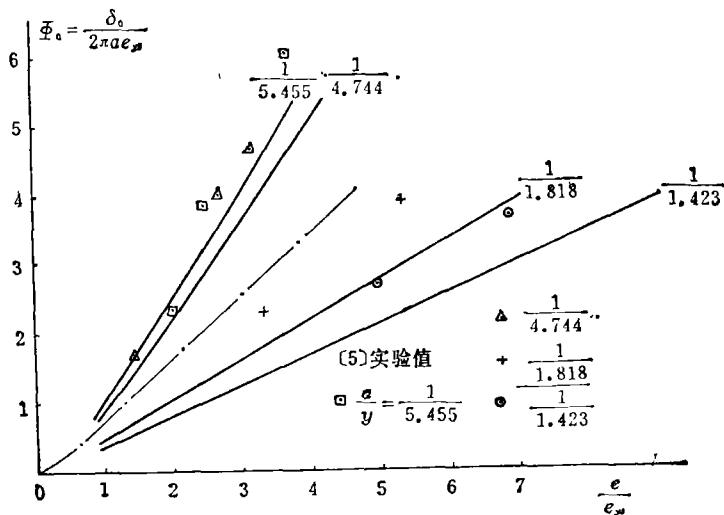


图 7

图 8 给出外加拉伸应力无量纲参数 $\frac{\sigma}{\sigma_{ys}}$ 与颈缩区长度 ρ 的无量纲参数 $\frac{\rho}{a+\rho}$ 的计算结果(曲线(1))。图 9 给出 $\frac{\sigma}{\sigma_{ys}}$ 与裂纹顶端张开位移 δ 的无量纲参数 Φ 的计算结果(曲线

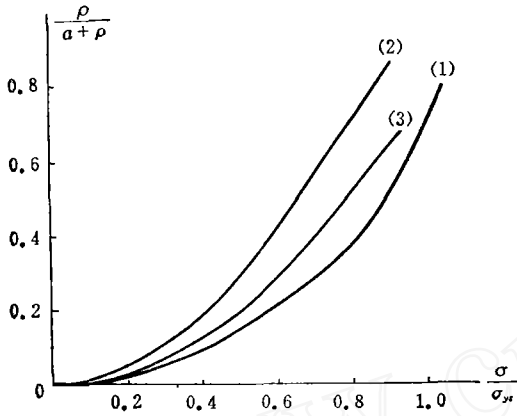


图 8)

算结果符合较好。

(1))。这些结果分别与无限体 Dugdale 模型解(曲线(2))及有限体 Dugdale 模型弹性有限元解(曲线(3))进行了比较。由于 Dugdale 模型基于理想塑性材料, 带状屈服区以外假定是弹性区, 因此, 如图 8 所示, 对同样外加应力, 所算得的带状屈服区长度 ρ 比本文提出的带状颈缩区要长。

从图 9 可以看出, 当 $\frac{\sigma}{\sigma_{ys}} \rightarrow 1$ 时 Φ 值偏差大, 对无限体 Dugdale 模型, 当 $\frac{\sigma}{\sigma_{ys}} \rightarrow 1$ 时 $\Phi \rightarrow \infty$, 显然这时 Dugdale 模型不适用, 而当 $\frac{\sigma}{\sigma_{ys}} < 0.5$ 时, Dugdale 模型与本文计

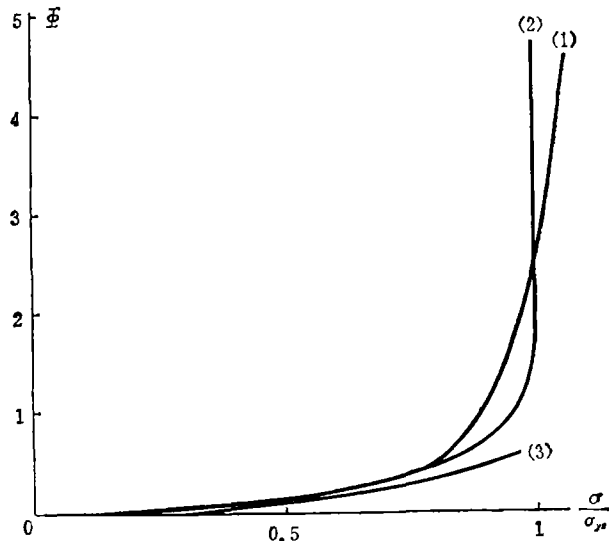


图 9)

图 10 给出均匀拉伸中心裂纹板塑性区的分布, 可以看出塑性区并不限于裂纹延伸面上, 而正如〔2〕所观察到的, 塑性区向着与裂纹大约成 50° 方向发展成两条剪切带。

1) 图 8、图 9 中曲线(1)是本文计算的结果, 曲线(2)是无限体 Dugdale 模型的解, 曲线(3)是试件 Dugdale 模型弹性有限元解

对于带状颈缩区模型，本文还用弹塑性增量理论的有限元法对上述同样的试样进行了计算，图 11 给出标称应变 e 与裂纹顶端张开位移 δ 的无量纲参数计算结果，与图 6

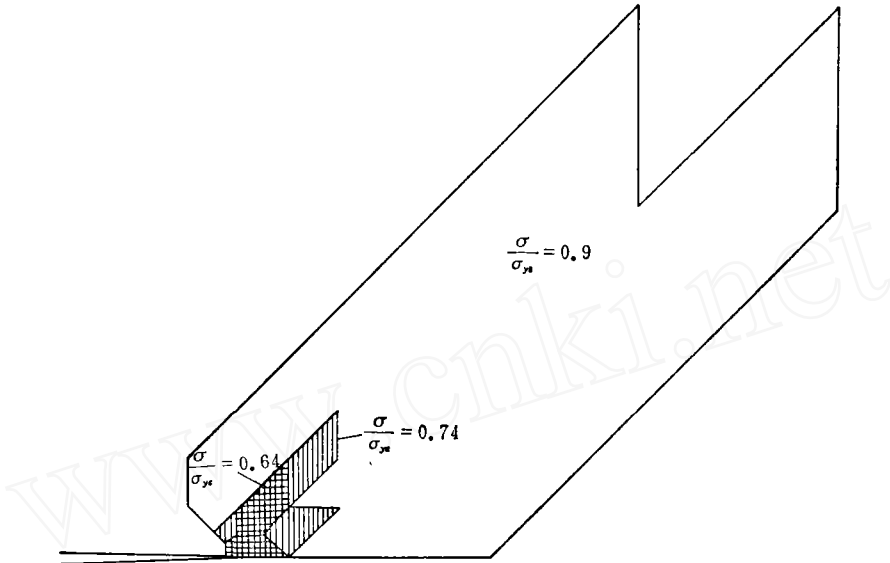


图 10

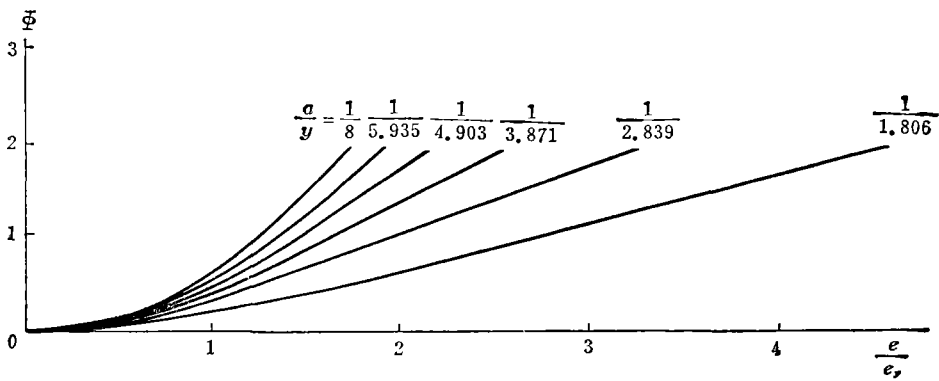


图 11

的全量理论计算结果趋势基本上一致。

最后，本文对文献〔7〕中给出的两种材料，中心裂纹长 $2a$ 为 10mm 及 50mm，厚度为 3mm，板宽 120mm 的试件在均匀拉伸作用下四种情况，采用带状颈缩区模型弹塑性增量理论的有限元方法进行了计算。表 I 给出材料特性，表 II 给出相应于〔7〕中起裂时裂纹中心张开位移 δ_i 的名义应力 $\sigma_{i(名)}$ 和净截面应力 $\sigma_{i(净)}$ 的计算值，并列出了〔7〕中实验值，两者符合得很好，对试件 (9) 和 (12)，本文计算值与〔7〕中实验值差别小于 10%，对试件 (7) 和 (8)，本文计算值与〔7〕中实验值差别小于 2%。

表 I 试件材料性能

试件号	屈服强度 $\sigma_{ys}(hb)$	极限强度 $\sigma_0(hb)$	最大载荷处延伸率 %	应变硬化指数
(9) (12)	28.5	42.0	23	0.2
(7) (8)	38.0	46.0	10	0.095

表 II 本文计算结果

试件号	中心裂纹长 $2a(mm)$	起始扩展时 裂纹中心位移 $\Delta_{II}(mm)$	(7)	(7)	(本文)	(本文)
			$\sigma_i(名)$ (hb)	$\sigma_i(净)$ (hb)	$\sigma_i(名)$ (hb)	$\sigma_i(净)$ (hb)
(9)	10	1.6	28.4	31.0	31.1	33.9
(12)	50	1.7	18.8	32.2	20.3	34.8
(7)	10	1.0	38	41.5	38.8	42.3
(8)	50	1.18	25.3	43.4	25.3	43.4

参 考 文 献

- [1] Dugdale D.S., J. Mech. Phys. Solids, 8(1960), 100—104.
- [2] Burdekin F.M. and Stone D.E.W., J. Strain Analysis, 1(1966), 145—154.
- [3] Burdekin F.M. and Dawes, M. G., Conf. on Practical Appl. Fracture Mech. to Pressure Vessel Technology, 3rd—5th May (1971), 28—37.
- [4] Egan G.R., 2nd International Conference on Pressure Vessel Technology, Part 2(1973), 1037—1048.
- [5] Tsai Chi Kung, Lo Li Keng, Chen Hsien Hsi, Cheng Pen Ho, Lu Chi Chu, Chang Pao Chan, Doc. IIW—78—900.
- [6] Schaeffer B.J., Liu H.W., and Ke J.S., Experimental Mechanics, 11, 4(1971), 172—175.
- [7] Lebey J. and Roche R., Proceedings of the Fourth International Conference on Fracture, 3(1977) 47—57.
- [8] McClintock, F.A., Trans. ASME. J. of Basic Eng. 82(1960), 423.
- [9] Hutchinson J.W., J. Mech. Phys. Solids, 16(1968), 337—347.
- [10] Goldman N.L. and Hutchinson J.W., Int. J. Solid Structures, 11(1975), 575—592.
- [11] Rice J.R., Fracture, 2(1968).

AN ELASTIC-PLASTIC FRACTURE MODEL OF PLANE STRESS AND ITS FINITE ELEMENT ANALYSIS

Xu Ji-lin and Wang Zi-qiang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica,

Abstract

In the present paper, a plane stress elastic-plastic fracture model—the strip necking zone model is proposed on the basis of the experimental results given by Schaeffer, Liu and Ke. It may be regarded as an extension of Dugdale Model. With this model, the calculations by finite element method incorporating plastic deformation theory or plastic incremental theory are both carried out to determine the crack opening displacement. The calculated results are compared with the Burdekin's design curve and some published experimental results. The analysis indicates that the nominal strains vary with different gauge lengths. Therefore Burdekin design curve is on the safe side when the nominal strains are taken at some definite gauge lengths. The calculated values of the crack opening displacements in this paper are in good agreement with the published experimental results.