

变截面圆轴扭转问题用非正交曲线坐标的新解法*

李敏华

(中国科学院力学研究所)

提要 本文是在飞机发动机涡轮轴应力分析的基础上提高为变截面圆轴扭转问题的一个新解法。利用向量的散度和旋度对不同坐标系是不变量的特点,通过张量分析推导出在任意非正交曲线坐标系中变截面圆轴扭转问题的平衡和协调方程,包括用应力函数表达的协调方程和应力函数与应力分量的关系式。用任意非正交曲线坐标和差分法求解应力函数。本文计算得到了全轴的等应力函数线和剪应力分布,并得到沿小凹槽边任意点的应力,计算结果和光弹试验结果接近。本文还计算了有解析解的空心锥轴,误差小于百分之一。通过计算说明本文提出的新解法收敛性很好,并且所需计算机容量少(可在容量32k的TQ-16机上同时计算800多个节点),应用方便,便于编排通用程序,计算量较有限元法少;另一方面,由于采用了任意非正交曲线坐标,因此,适用于解决复杂曲线边界的问题,提高了通常用的差分法的适应性和灵活性;此外,本方法用应力函数作为未知量,从所得的等应力函数线和等位移函数线图可以看出全轴应力分布的概况,对于改进设计很有帮助。

变截面轴在扭矩作用下的问题,早期的工作大都是从数学上的方便出发,取特殊的并且可以用函数表达的正交曲线坐标^[1],因此这些轴的形状大多是很特殊的,很难用于工程实际,对于给定形状的轴,更没有一般性的解法。计算机发展后,有限元法可以解决很多问题,但对于形状复杂的轴,特别是包括应力高度集中区的问题,用有限元法要求有很大的计算机容量,并且对于小凹槽应力高度集中区,应力变化率大,外推不易得到准确的结果。

1972年,作者曾计算了线性变截面圆轴的应力。1975年,以飞机发动机涡轮轴为例,进一步作过在扭矩作用下的应力分析^[2],考虑到涡轮轴断轴的疲劳源在圆角小凹槽处(半径小于半毫米),因此需要对外形极为复杂的轴及小凹槽应力集中区进行细致的应力分析,所以提出的解法采用应力函数作为基本未知量,采用任意正交曲线坐标。但当时所用的数值计算方法收敛性差,并且对于形状极为复杂的轴正交曲线坐标的形成比较困难,因此尚不能作为一种普遍适用的解法。本文改换了迭代法,提高了收敛性,这样,放松了对应力函数 ψ 初值的要求,因此也就放松了对坐标曲线选择的要求。中国科学院力

* 1979年11月16日收到。

学研究所在工程热物理方面, 成功地将非正交曲线坐标用于叶轮机械内部流动问题的分析计算^[3]. 我们得到启发, 改用非正交曲线坐标. 本文推导出变截面圆轴扭转问题在任意非正交曲线坐标系中的方程, 提出了变截面圆轴扭转问题的新解法. 计算了有解析解的空心锥轴, 计算结果和解析解进行了比较, 并对复杂外形涡轮轴进行了实例计算.

符 号

$B_{k-1, i-1}^{k,i}$	表示 k, i 节点 ψ 的差分方程中 $\psi^{k-1, i-1}$ 项的系数	(y_1, y_2, y_3)	任意正交曲线坐标
e_i	基底向量, 亦称协变基底向量	β_{ij}	任意曲线坐标 q^i 和 q^j 之间的夹角
e^i	正交于 e_i 的基底向量, 亦称逆变基底向量	$\gamma_{zr}, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}$	圆柱坐标系中的剪应变分量
g_{ij}	任意曲线坐标系中的度量张量	$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$	圆柱坐标系中的正应变分量
M_i	扭矩	$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	圆柱坐标系中的正应力分量
(q^1, q^2, q^3)	任意非正交曲线坐标	$\tau_{zr}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$	圆柱坐标系中的剪应力分量
(R, Θ, Z)	圆柱坐标	τ_θ	垂直于 θ 方向平面上的剪应力向量
u_i	协变单位基底向量	$\tau_\theta^1, \tau_\theta^2, \tau_\theta^3$	表示 τ_θ 在 q^1, q^2, q^3 方向的分量
u^i	逆变单位基底向量	Φ	位移函数
v	切向位移	Ψ	应力函数
(x^1, x^2, x^3)	笛卡尔坐标	ψ	无量纲应力函数
		$\psi_{(m)}^{k,i}$	表示迭代过程中第 k, i 节点第 m 次计算的应力函数值

一、用应力向量的散度和旋度表达的变截面圆轴扭转问题的平衡和协调方程

变截面圆轴的扭转问题, 由于轴对称, 位移不是 θ 的函数, 切向位移 v 是 z 和 r 的函数, 轴向位移和径向位移都等于零.

$$v = v(z, r) \quad u = w = 0$$

在 r, θ, z 坐标系中, 应力应变分量为

$$\begin{aligned} \epsilon_r = \epsilon_\theta = \epsilon_z = \gamma_{zr} &= 0 \\ \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{zr} &= 0 \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \\ r_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} = r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{\tau_{\theta z}}{G} \end{aligned}$$

平衡和协调方程为

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{\theta z}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{r\theta}}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau_{\theta z}}{r} \right) = 0 \quad (2)$$

应力函数和应力分量的关系为

$$r^2 \tau_{r\theta} = - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad r^2 \tau_{\theta z} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (3)$$

位移函数 Φ 为

$$\Phi = \frac{v}{r} \quad (4)$$

变截面圆轴, 在扭矩作用下, 轴的内外壁应力函数是常数 (一般受扭的轴内外壁不受外力), 又由于轴对称, 只需要考虑轴纵剖面的应力 (二维问题). 纵剖面上内外壁曲线本身就是等应力函数线. 利用这一特点, 可取应力函数 Ψ 为未知量, 取等应力函数线 (轴的内外壁曲线) 和接近于等应力函数线的曲线组作为一组坐标曲线. 如用任意正交曲线坐标, 另一组坐标曲线可用正交于这组曲线组的曲线组; 如用任意非正交曲线坐标, 可取便于坐标形成的线组作为另一组坐标曲线. 这样, 对于解内外壁曲线形状复杂的变截面圆轴, 特别是带有应变集中的小凹槽的轴 (图 1) 是非常适用的. 可以比较准确的给出沿轴壁小凹槽应变集中处的任意点的应力. 因此, 需首先得到变截面圆轴在任意曲线坐标系的方程.

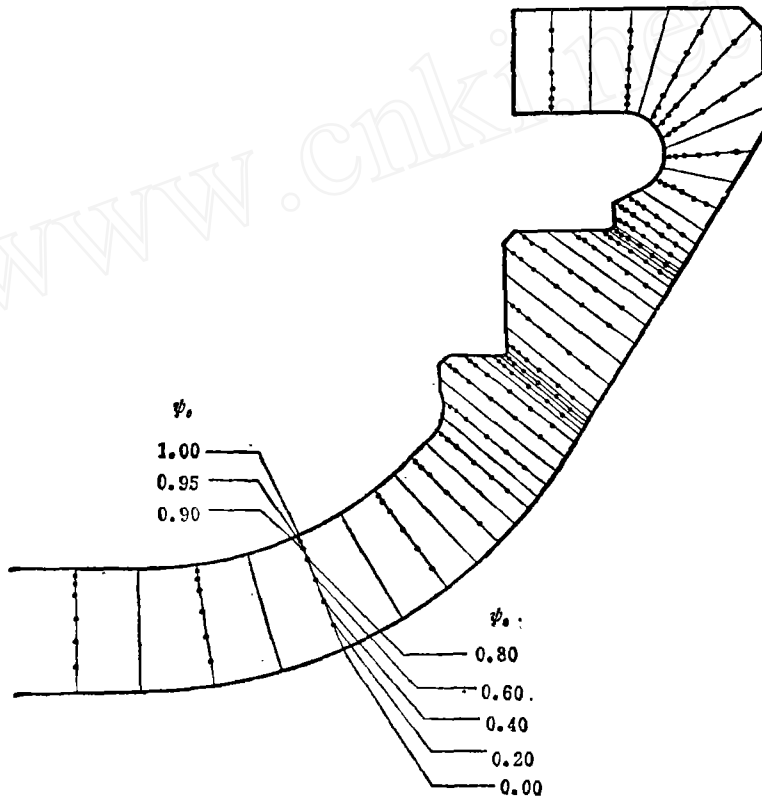


图 1

$\tau_{\theta z}$ 和 $\tau_{\theta r}$ 为垂直于 θ 方向平面上的剪应力分量, 可用 τ_{θ} 表示垂直于 θ 方向平面上的剪应力分量的合应力向量. 从正交曲线坐标系中向量的散度和旋度的一般表达式 (见附录) 可以看出方程 (2) 和 (3) 分别为:

$$\nabla \cdot (r\tau_{\theta}) = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{\tau}_0/r) = 0 \quad (6)$$

方程(5)和(6)分别为变截面圆轴扭转问题用剪应力向量的散度和旋度表达的平衡和协调方程^[2].

利用向量的散度和旋度对不同坐标系是不变量的特点,从向量的散度和旋度的一般方程直接写出在任意正交曲线坐标系 (y_1, y_2, y_3) 中的平衡和协调方程^[2]为

$$\frac{\partial}{\partial y_1} (h_3 r^2 \tau_{\theta_1}) + \frac{\partial}{\partial y_3} (h_1 r^2 \tau_{\theta_3}) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_3} (h_1 \frac{\tau_{\theta_1}}{r}) - \frac{\partial}{\partial y_1} (h_3 \frac{\tau_{\theta_3}}{r}) = 0 \quad (8)$$

应力函数 Ψ 和应力分量的关系为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_3} = -h_3 r^2 \tau_{\theta_1} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = h_1 r^2 \tau_{\theta_3} \quad (9)$$

用 Ψ 表达的协调方程为:

$$\frac{\partial}{\partial y_3} \left[\frac{h_1}{h_3 r^3} \frac{\partial \Psi}{\partial y_3} \right] + \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\frac{h_3}{h_1 r^3} \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} \right] = 0 \quad (10)$$

$$\text{其中} \quad h_1 = \frac{ds}{dy_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y_1}\right)^2} \quad (11a)$$

$$h_2 = h_\theta = r \quad (11b)$$

$$h_3 = \frac{ds}{dy_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial y_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y_3}\right)^2} \quad (11c)$$

文献^[2]用上述方程计算了发动机涡轮轴在扭矩作用下的应力分布.

二、在非正交曲线坐标系中变截面轴扭转问题的方程

对于非正交曲线坐标,用张量分析¹⁾比较方便.在任意曲线坐标系中散度和旋度的表达式分别为:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} [t^i \sqrt{g}] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{P} = & \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\partial p_3}{\partial q^2} - \frac{\partial p_2}{\partial q^3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial p_1}{\partial q^3} - \frac{\partial p_3}{\partial q^1} \right) \mathbf{e}_2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial p_2}{\partial q^1} - \frac{\partial p_1}{\partial q^2} \right) \mathbf{e}_3 \right] \quad (13) \end{aligned}$$

方程(12)和(13)中, q^i 为非正交曲线坐标(在本问题中 $i=1,2,3$). \mathbf{e}_i 为基底向量,也可称为协变基底向量, t^i 为向量 \mathbf{T} 的逆变分量, p_i 为向量 \mathbf{P} 的协变分量. g 是度量张量 g_{ij} 的行列式.在进行计算时还需要 g_{ij} 的公式,以及协变分量和逆变分量的关系式.

设 (x^1, x^2, x^3) 为笛卡尔坐标系中某一点的坐标, (q^1, q^2, q^3) 是该点在非正交曲线坐标系中的坐标.设 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$ 为一向量.

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} dq^3 \quad (14)$$

1) 有关张量的基本公式可参考张量分析的书籍.

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$ 即是基底向量 \mathbf{e}_i ;

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \tag{15}$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i dq^i \tag{14a}$$

向量 \mathbf{P} 可以表示为:

$$\mathbf{P} = P^i \mathbf{e}_i \tag{16}$$

\mathbf{e}_i 的方向切于坐标曲线，但不是单位向量。如用单位向量 \mathbf{u}_i ，则

$$\mathbf{P} = P^i \mathbf{u}_i \tag{17}$$

从方程 (14a) 可得到微分长度 ds 的平方

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j dq^i dq^j \tag{18}$$

用张量符号表示的微分长度 ds 的平方为

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j \tag{18a}$$

从方程 (18) 和 (18a)，度量张量 g_{ij} 为

$$g_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial q^i} \frac{\partial x^m}{\partial q^j} = g_{ji} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sqrt{g_{ii}g_{jj}} \cos\beta_{ij} \tag{19}$$

沿坐标曲线 q^i 的微分长度为

$$ds_i = \sqrt{g_{ii}} dq^i \quad (\text{对 } i \text{ 不取和}) \tag{18b}$$

比较 (11a, b, c) 和 (18b) 可以看出

$$h_i = \sqrt{g_{ii}}$$

取 q^3 和 q^1 为轴纵剖面 ($z-r$ 面) 上的非正交曲线坐标 (见图 2)， q^2 为 θ 方向的曲线坐标 (垂直于 $z-r$ 平面)

$\mathbf{T} = r\tau_\theta$ 是在 $z-r$ 面上的向量。代入方程 (5)， $\nabla \cdot (r\tau_\theta) = 0$ ，可得

$$\frac{\partial}{\partial q^1} (t^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial q^3} (t^3 \sqrt{g}) = 0 \tag{20}$$

因 q^2 为 θ 方向的曲线坐标， $\sqrt{g_{22}} = r$ ；又因 dq^2 垂直于纵剖面，即垂直于 q^3-q^1 面，所以当 $i \neq 2, g_{2i} = 0$

$$\begin{aligned} g &= g_{22} \begin{vmatrix} g_{33} & g_{31} \\ g_{13} & g_{11} \end{vmatrix} \\ &= g_{22} (g_{33}g_{11} - g_{31}g_{13}) \\ &= g_{22}g_{33}g_{11} (1 - \cos^2\beta_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^1 &= \frac{T^1}{\sqrt{g_{11}}} \\ t^3 &= \frac{T^3}{\sqrt{g_{33}}} \end{aligned}$$

方程 (20) 中的

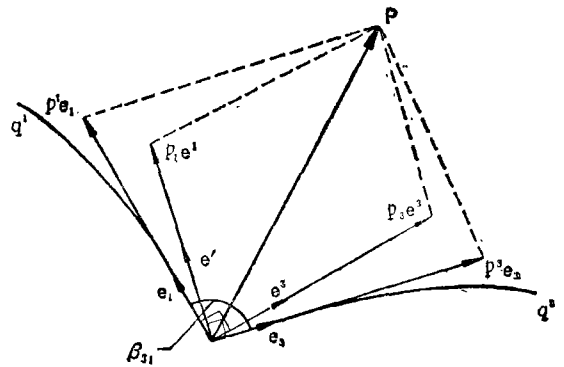


图 2

$$t^1 \sqrt{g} = \frac{T^1}{\sqrt{g_{11}}} \sqrt{g_{22}g_{33}g_{11}} \sin\beta_{31} = T^1 r \sqrt{g_{33}} \sin\beta_{31}$$

$$t^3 \sqrt{g} = \frac{T^3}{\sqrt{g_{33}}} \sqrt{g_{22}g_{33}g_{11}} \sin\beta_{31} = T^3 r \sqrt{g_{11}} \sin\beta_{31}$$

代入方程(20), 即得变截面圆轴扭转问题在非正交曲线坐标系中的平衡方程

$$\frac{\partial[\tau_\theta^1 r^2 \sqrt{g_{33}} \sin\beta_{31}]}{2q^1} + \frac{\partial[\tau_\theta^3 r^2 \sqrt{g_{11}} \sin\beta_{31}]}{2q^3} = 0 \quad (20a)$$

其中 r^2 为 r 的平方.

应力函数 Ψ 和应力分量的关系式为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial q^3} &= -r^2 \sqrt{g_{33}} (\sin\beta_{31}) \tau_\theta^1 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial q^1} &= r^2 \sqrt{g_{11}} (\sin\beta_{31}) \tau_\theta^3 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

从方程(6), 协调方程为

$$\nabla \times \left(\frac{\tau_\theta}{r} \right) = 0$$

$$\mathbf{P} = \tau_\theta / r$$

从方程(13), 并由于轴对称, 得

$$\frac{\partial p_1}{\partial q^3} - \frac{\partial p_3}{\partial q^1} = 0 \quad (22)$$

其中 p_1 和 p_3 为 \mathbf{P} 的协变分量, 要进行计算, 还需要得到协变分量和逆变分量的关系.

引进另一组正交于 \mathbf{e}_i 的基底向量 \mathbf{e}^i ($i=1, 2, 3$), \mathbf{e}^i 亦可称为逆变基底向量.

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{V} \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{V} \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{V}$$

其中 V 为数量三重积 $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$. 基底向量 \mathbf{e}^1 、 \mathbf{e}^2 和 \mathbf{e}^3 分别垂直于 $\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ 面, $\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1$ 面和 $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ 面

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j \quad (23)$$

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

两组基底向量 \mathbf{e}_i 和 \mathbf{e}^j 互为倒易向量, 因此有下列关系存在:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}^i dq_i \quad (24)$$

$$\mathbf{P} = p_i \mathbf{e}^i \quad (25)$$

$$\mathbf{P} = P_i \mathbf{u}^i \quad (26)$$

$$\text{即} \quad \mathbf{P} = p_i \mathbf{e}^i = p^j \mathbf{e}_j \quad (27)$$

对(27)式点乘 \mathbf{e}_i , 并由(19)及(23)得到

$$p_i = g_{ij} p^j \quad (28)$$

在本问题中即有:

$$p_1 = g_{11} p^1 + g_{13} p^3 = g_{11} \frac{P^1}{\sqrt{g_{11}}} + g_{13} \frac{P^3}{\sqrt{g_{33}}} = \sqrt{g_{11}} P^1 + \sqrt{g_{11}} P^3 \cos\beta_{31} \quad (28a)$$

$$p_3 = \sqrt{g_{33}} P^3 + \sqrt{g_{33}} P^1 \cos\beta_{31} \quad (28b)$$

将 $\mathbf{P} = \tau_\theta / r$ 及 (28a) (28b) 代入 (22), 得到协调方程

$$\frac{\partial}{\partial q^3} \left[\frac{\sqrt{g_{11}} \tau_\theta^1}{r} + \frac{\sqrt{g_{11}} \tau_\theta^1 \cos \beta_{31}}{r} \right] - \frac{\partial}{\partial q^1} \left[\frac{\sqrt{g_{33}} \tau_\theta^3}{r} + \frac{\sqrt{g_{33}} \tau_\theta^3 \cos \beta_{31}}{r} \right] = 0 \quad (29)$$

将方程 (21) 代入 (29), 整理后得到用应力函数表达的协调方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 \Psi}{(\partial q^3)^2} - \frac{2 \cos \beta_{31}}{\sqrt{g_{33} g_{11}}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^3 \partial q^1} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 \Psi}{(\partial q^1)^2} + G_3 \frac{\partial \Psi}{\sqrt{g_{33}} \partial q^3} + \\ + G_1 \frac{\partial \Psi}{\sqrt{g_{11}} \partial q^1} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} G_3 = & - \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{33}}} \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial}{\sqrt{g_{33}} \partial q^3} \left(\sqrt{\frac{g_{33}}{g_{11}}} r^3 \right) - \frac{\text{ctg} \beta_{31}}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \beta_{31}}{\partial q^3} + \\ & + \frac{3 \cos \beta_{31}}{r} \frac{\partial r}{\sqrt{g_{11}} \partial q^1} + \frac{1}{\sin \beta_{31}} \frac{\partial \beta_{31}}{\sqrt{g_{11}} \partial q^1} \\ G_1 = & - \left(\sqrt{\frac{g_{33}}{g_{11}}} \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial}{\sqrt{g_{11}} \partial q^1} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{33}}} r^3 \right) - \frac{\text{ctg} \beta_{31}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \beta_{31}}{\partial q^1} + \\ & + \frac{3 \cos \beta_{31}}{r} \frac{\partial r}{\sqrt{g_{33}} \partial q^3} + \frac{1}{\sin \beta_{31}} \frac{\partial \beta_{31}}{\sqrt{g_{33}} \partial q^3} \end{aligned}$$

关于扭矩 M_t 和应力函数的关系式, 可从下列关系推导(图3).

沿曲线 q^1 上各点:

$$\tau_\theta^3 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}} r^2 \sin \beta_{31}} \frac{\partial \Psi}{\partial q^1}$$

$$\tau_\theta^1 = \frac{-1}{\sqrt{g_{33}} r^2 \sin \beta_{31}} \frac{\partial \Psi}{\partial q^3}$$

$$\begin{aligned} dM_t = & \tau_\theta^3 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta_{31} \right) r dA \\ = & 2\pi r_\theta^3 r^2 \sin \beta_{31} \sqrt{g_{11}} dq^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_t = & 2\pi \int_{q_{\text{内}}^1}^{q_{\text{外}}^1} \frac{\sin \beta_{31}}{\sqrt{g_{11}} r^2 \sin \beta_{31}} \times \\ & \times r^2 \sqrt{g_{11}} \frac{\partial \Psi}{\partial q^1} dq^1 \\ = & 2\pi \int_{q_{\text{内}}^1}^{q_{\text{外}}^1} \frac{\partial \Psi}{\partial q^1} dq^1 = 2\pi (\Psi_{\text{外}} - \Psi_{\text{内}}) \end{aligned}$$

式中 $q_{\text{外}}^1$, $q_{\text{内}}^1$ 及 $\Psi_{\text{外}}$, $\Psi_{\text{内}}$ 分别指轴的外壁和内壁的 q^1 及 Ψ 的数值.

以 Ψ 代表无量纲应力函数, $\psi = \frac{\Psi}{K}$, 则 $M_t = 2\pi K (\psi_{\text{外}} - \psi_{\text{内}})$

可取

$$(\psi_{\text{外}} - \psi_{\text{内}}) = 1$$

$$K = M_t / 2\pi$$

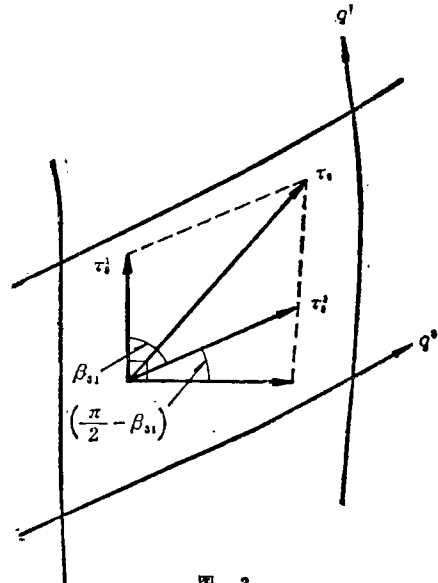


图 3

所以

$$\Psi = \frac{M_t}{2\pi} \psi \quad (31)$$

将(31)式代入(30)式, 得到用无量纲应力函数 ψ (在以后文中简称为应力函数) 表示的协调方程

三、数值解法和计算

用数值微分三点不等距公式代入方程(30), 得到 k, i 节点的差分方程.

$$B_{k-1,i-1}^{k,i} \psi^{k-1,i-1} + B_{k,i-1}^{k,i} \psi^{k,i-1} + B_{k+1,i-1}^{k,i} \psi^{k+1,i-1} + B_{k-1,i}^{k,i} \psi^{k-1,i} + B_{k,i}^{k,i} \psi^{k,i} + B_{k+1,i}^{k,i} \psi^{k+1,i} + B_{k-1,i+1}^{k,i} \psi^{k-1,i+1} + B_{k,i+1}^{k,i} \psi^{k,i+1} + B_{k+1,i+1}^{k,i} \psi^{k+1,i+1} = 0 \quad (32)$$

上式各项的系数 B 仅是几何参数的函数, 详细表达式见, 任孝安同志在1980年全国计算力学学术会上宣读的《变截面圆轴扭转问题的通用计算机程序及计算实例》(以下简称《程序及计算实例》)。

除边界外, 每一节点都有一个方程. 在边界上 ψ 值为已知, 可用矩阵直接法求解各节点的 ψ 值. 为了节省计算机容量, 以便用小储存量的计算机算复杂形状的变截面轴, 也可采用逐次逼近法. 例如, 可用节点 k, i 周围八节点(图4) ψ 的第 $(m-1)$ 次值计算 k, i 节点的第 m 次值 $\psi_{(m)}^{k,i}$. 或用 $k-1$ 和 $k+1$ 条 q^1 坐标曲线上 $i-1, i, i+1$ 点的 ψ 的

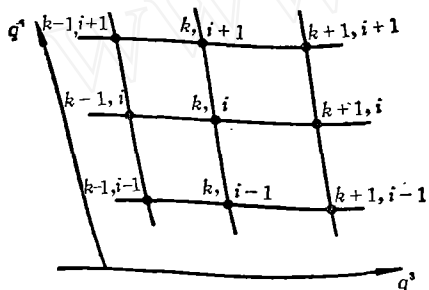


图 4

已知值代入方程(32), 得到第 k 条 q^1 坐标曲线上, 包括 $i-1, i, i+1$ 三点的 $\psi_{(m)}$ 值方程, 即包括 $\psi_{(m)}^{k,i-1}, \psi_{(m)}^{k,i}$, 和 $\psi_{(m)}^{k,i+1}$ 的差分形式表达的常微分方程. 这样就很容易解出满足轴内外壁边界条件的沿第 k 条 q^1 坐标曲线的各点 $\psi_{(m)}$.

坐标曲线的形成方法也是很重要的, 关系到能否作为普遍适用的解法和是否易于编排通用程序. 为此, 本文提出如下的坐标曲线: 先作内外壁近似中线, 再作垂直于近似中线的直线和内外壁相交, 这些直线组为 q^1 坐标线组. 根据文献^[2]的计算结果看出, 可取沿 q^1 线等分的 ψ 值作为 ψ 的初值 ψ_0 . 这样就可以得到选定 ψ_0 值的各 q^3 坐标曲线(见图1). 这种坐标曲线只需输入内外壁坐标点的数据, 其他的坐标点, 可以由计算机自动形成. 对于不适宜于用直线组作为 q^1 坐标线的区域, 可取能用简单方程表达的适当曲线组替代.

本文提出的新解法, 在形成过程中进行了很多计算, 根据计算中出现的情况逐步改进. 开始采用正交曲线坐标^[2], 用 S. Uchida 所建议的将偏微分方程化为常微分方程, 并沿 q^1 曲线进行数值积分的方法进行了计算^[4]. 计算程序和部分计算工作由韩子健同志进行. 但因 S. Uchida 所建议的沿 q^1 曲线进行数值积分的数值计算方法, 用在复杂形状的变截面圆轴扭转问题时, 在小凹槽应力高度集中区很容易发散, 只有在取很小的松弛因子的情况下计算才能进行, 因此收敛极慢. 通过对计算数据的分析, 找出了在

本文提出的新解法, 在形成过程中进行了很多计算, 根据计算中出现的情况逐步改进. 开始采用正交曲线坐标^[2], 用 S. Uchida 所建议的将偏微分方程化为常微分方程, 并沿 q^1 曲线进行数值积分的方法进行了计算^[4]. 计算程序和部分计算工作由韩子健同志进行. 但因 S. Uchida 所建议的沿 q^1 曲线进行数值积分的数值计算方法, 用在复杂形状的变截面圆轴扭转问题时, 在小凹槽应力高度集中区很容易发散, 只有在取很小的松弛因子的情况下计算才能进行, 因此收敛极慢. 通过对计算数据的分析, 找出了在

小凹槽区容易发散的原因, 改变了数值计算方法(详见文献^[2]), 解决了收敛性问题, 并进一步采用非正交曲线坐标, 图5所示的涡轮轴的等应力函数线, 就是用本文的解法计算所得的结果之一. 计算结果和光弹实验结果接近. 第一凹槽 $R=0.5$ 的轴, 本方法计算结果最大剪应力为 $0.161\text{kg}/\text{cm}^2$, 光弹实验结果为 $0.193\text{kg}/\text{cm}^2$. 详细计算结果见《程序及计算实例》. 为了检查方法和程序的可靠性还对有解析解的空心圆锥轴进行了计算, 计算结果和解析解比较, 误差小于1%. 非正交曲线坐标的通用程序和计算由任孝安同志进行, 本文非正交曲线坐标部分的方程也经她校核.

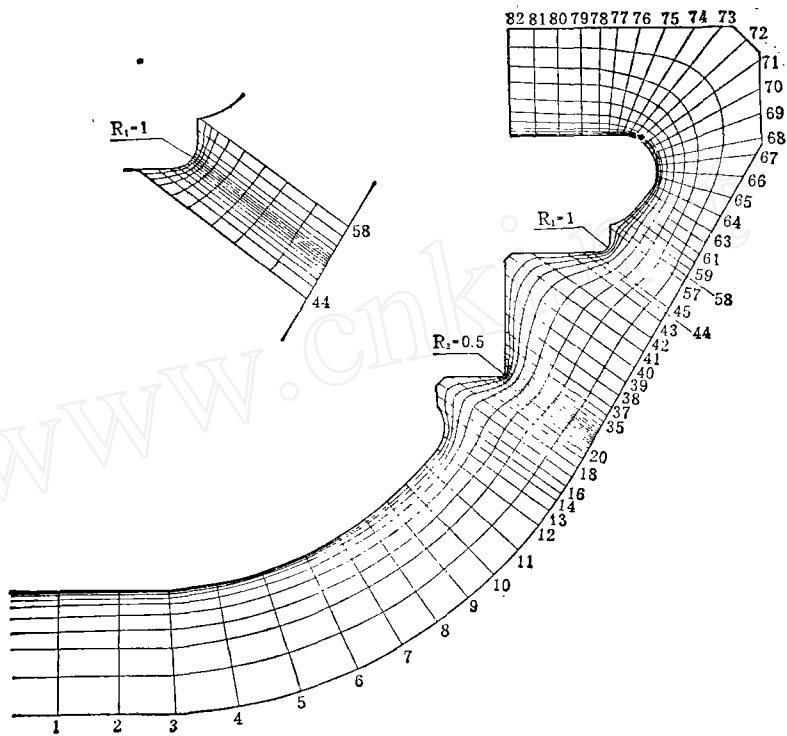


图 5

四、结 论

1) 文献^[2]所给出的变截面轴扭转问题, 以半径和剪应力向量的散度和旋度表达的平衡和协调方程分别为 $\nabla \cdot (r\tau_\theta) = 0$ 和 $\nabla \times (\tau_\theta/r) = 0$. 新表达式的特点是便于坐标转换, 特别是对于非正交曲线坐标.

2) 本方法使用的是任意的非正交曲线坐标, 可以适应复杂的曲线边界问题, 并使计算能采用任意网格, 这样, 可以根据不同的区域的精度要求灵活安排不同疏密的网格, 有利于提高应变集中区的解的精度, 因此本方法大大提高了传统差分方法的适应性和灵活性.

3) 本文用应力函数 ψ 作为基本未知量, 轴的内外壁曲线本身就是等应力函数线, 因此可以比较准确地得到沿内外壁小凹槽应变集中区处的任意点的应力. 并且由于取轴内外壁(等应力函数线)和接近于等应力函数线的曲线组作为一组坐标曲线, 因此在应变集中区可以并且自然形成比较密的网格. 另外, 用应力函数作为未知量, 从计算所得的等应力函数线和等位移函数线图可以看出全轴应力分布的大概情况. 对于改进设计有帮助.

4) 本方法所需计算机容量少, 可以在内存量较小的计算机上使用. 并且可用通用程序, 输入数据少, 便于应用, 因此有利于工程上的广泛应用.

5) 对有解析解的空心锥形轴的计算结果和解析解比较, 误差小于 1%. 对工程上实用的复杂外形的涡轮轴进行了实例计算(见《程序及计算实例》)结果和光弹实验^[5]接近(第一凹槽 $R_1 = 0.5$ 时本方法计算结果最大剪应力为 0.161 kg/cm^2 光弹实验结果为 0.193 kg/cm^2).

附 录

在正交曲线坐标系中向量的散度和旋度的一般表达式分别为:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (h_2 h_3 T_1) + \frac{\partial}{\partial y_2} (h_3 h_1 T_2) + \frac{\partial}{\partial y_3} (h_1 h_2 T_3) \right] \\ \nabla \cdot \mathbf{P} &= \frac{u_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 P_3)}{\partial y_2} - \frac{\partial (h_2 P_2)}{\partial y_3} \right] + \frac{u_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial (h_1 P_1)}{\partial y_3} - \frac{\partial (h_3 P_3)}{\partial y_1} \right] + \\ &+ \frac{u_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 P_2)}{\partial y_1} - \frac{\partial (h_1 P_1)}{\partial y_2} \right] \end{aligned}$$

其中 y_1, y_2 和 y_3 为三个正交曲线坐标; u_1, u_2 和 u_3 分别为沿着这三个坐标曲线的单位向量; $T_1 T_2 T_3$ 和 $P_1 P_2 P_3$ 分别为向量 \mathbf{T} 和 \mathbf{P} 沿三个坐标的分量. 以上二式实际上即是(12)和(13)式的特例.

参 考 文 献

- [1] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开源, 《弹性柱体的扭转理论》, 科学出版社, (1956).
- [2] 李敏华、韩子健, 任孝安《航空学报》, (1980).
- [3] Wu Chung-hua, Three-Dimensional Flow Equations Expressed with Respect to Non-Orthogonal Curvilinear Coordinates and Methods of Solution, Paper presented at 3rd International Symposium on Air Breathing Engines, March (1976), Munich.
- [4] Shigo Uchida, Calculation of Compressible Cascade Flow by the Method of Flux Analysis, J.A.S. 21, 4 April (1954).
- [5] 成都市水电勘测设计院科学实验所, 第二重型机械厂, 420厂, 《光弹实验报告》, (1972年).

A NEW METHOD FOR SOLVING TORSIONAL PROBLEM OF CIRCULAR SHAFT WITH VARIABLE DIAMETER USING NON-ORTHOGONAL CURVILINEAR COORDINATES

Li Min-hua

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

This paper presents a new method for solving torsional problem of circular shaft with variable diameter using arbitrary non-orthogonal curvilinear coordinates. Equations of equilibrium and compatibility expressed, respectively, in terms of divergence and curl of two related shear stress vectors are given. The equilibrium and compatibility equations in arbitrary non-orthogonal curvilinear coordinate system are then obtained. The contour lines of the outer and inner walls of the longitudinal section of the shaft (which are equal stress function lines) and other curves close to the equal stress function lines are taken as a family of non-orthogonal curvilinear coordinate curves. The grid points of the coordinate curves can be easily formed by the computer automatically. The numerical solution of the resulting set of equations gives the values of stress function and stress distribution for the whole shaft. One gas turbine shaft is selected as an illustrative example, the result obtained compares fairly well with that obtained by photoelasticity. This method is convenient to use needs smaller storage capacity and enables one to handle shaft having very complicated contours, thus greatly enhancing the adaptability and flexibility of the finite-difference method.