简化 Navier-Stokes 方程组及其数学性质

王汝权　刘学宗　焦履琼　　高　智
（中国科学院计算中心）　　（中国科学院力学研究所）

提要　本文对二维简化 Navier-Stokes 方程组作了定性分析，作者认为当流动的切向速度分量 $u < c$（c 为局部声速）时，上述方程组是不适定的．因此，在数值求解时有不稳定性的问题．此外，还讨论了球锥粘性超音绕流时初值及边值条件的提法．

自从 1904 年 L. Prandtl 提出边界层理论以来，它在粘性流的研究方面起了非常重要的作用，但是，随着高速飞行器的发展，对于许多重要的实际问题，边界层理论已显得不够用了．直接数值求解完全 Navier-Stokes 方程组（以下简称 N-S 方程），虽已取得可喜的成果，但其计算容量和计算时间仍然是可观的．有一条引人注目的途径，即改进边界层方程或简化完全 N-S 方程，从而达到有效地解决实际问题的目的．在这方面，从六十年代以来，人们做了大量的工作，可归纳为三种：1. 建立二阶边界层理论[1]． 2. 薄激波层近似[2,3]． 3. 简化 N-S 方程[4-6]．我们指出，薄激波层方程组当 $\mathrm{Re}_\infty \to \infty$ 时不能光滑过渡到 Euler 方程，而简化 N-S 方程当 $\mathrm{Re}_\infty \to \infty$ 时可光滑地过渡到无粘流方程；其次，对简化 N-S 方程可用统一的计算格式一次解出，无须用解边界层方程组那样的复杂方法．

利用简化 N-S 方程求解一系列实际问题的工作已经很多，所遇到的共同问题是按初边值问题求解时出现数值解的不稳定性[13-17]．不少人提出过避开这种困难的各种处理方法，却很少从数学上研究上述不稳定性的原因，方程的性质及边值条件的正确提法．本文是根据作者的一些实际计算经验，从数学及力学的观点定性地分析一下这些问题，目的是与国内外学者讨论．

一、简化 N-S 方程组

简化 N-S 方程组由于右端的取舍不同形式上略有不同．当 Reynolds 数 Re_∞ 很大时实际差别很小．下面写出高智在 1967 年分析粘性——无粘流干扰问题时导出的简化 N-S 方程组[27]：（参阅图 1）

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(rH\rho v)=0 \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{u}{H}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{uv}{H}\right)+\frac{1}{H}\frac{\partial p}{\partial x} =\frac{1}{\mathrm{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\pi\frac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\frac{\partial u}{\partial y}-k\frac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{H}\right) \tag{1.2}$$

本文于 1979 年 4 月 25 日收到．

$$\rho\left(\frac{u}{H}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-k\frac{u^2}{H}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{1.3}$$

$$c_p\rho\left(\frac{u}{H}\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\left(\frac{u}{H}\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\delta\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\delta\pi\mu\frac{\partial T}{\partial y}+\Phi \tag{1.4}$$

$$p=\rho T \tag{1.5}$$

其中 $H=1+ky$, $\pi=\dfrac{\cos\theta}{r}+\dfrac{k}{H}$, $\Phi=\dfrac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2k\dfrac{u}{H}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$,

$\delta=c_p/\mathrm{PrRe}_\infty$, $\mathrm{Re}_\infty=\rho_\infty V_\infty a/\mu_\infty$, $\mathrm{Pr}=c_p\mu/\lambda$, a 为钝头驻点曲率半径，k 为物面曲率，x、y 分别为沿物面及垂直物面的正交坐标，u、v 为相应的分速度．p、ρ、T、μ、λ 分别代表压力、密度、温度、粘性系数及导热系数．x、y、r 用 a；u、v 用 V_∞；p、ρ、T、μ、λ 分别用 $\rho_\infty V_\infty^2$、ρ_∞、V_∞^2/R、μ_∞ 及 λ_∞ 无量纲化．方程组 (1.1)—(1.5) 中包含了无粘方程，其数学类型与边界层方程有本质区别，下面将予以讨论．

二、简化 N-S 方程的类型

大家知道，古典的边界层方程组属抛物型，作为初边值问题求解是适定的．简化方程组的类型没有统一的提法，有人提抛物型方程组[13—15]，有人提双曲-抛物方程组[16,17]．文 [19] 认为在物面附近（假定壁面条件为 $u=0$, $v=0$, $T=T_W$）具有反热传导性质．方程的基本类型决定流场中信息传播的方式和边界条件的提法及数值解法，因而是十分重要的问题．

简化 N-S 方程系由几个一阶和几个二阶拟线性偏微分方程所组成，严格按古典意义确定其类型是困难的．由于方程组中既有对流效应，又有扩散效应，我们可以某种效应为主来分析解的行为．

鉴于方程组的拟线性性质，我们仅限于某个点的小邻域讨论．当 $\mu\neq 0$ 时，引入下列辅助变量：

$$\tau=\frac{1}{\mathrm{Re}_\infty}\mu\frac{\partial u}{\partial y},\ q=\delta\mu\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.1}$$

于是，可将 (1.1)—(1.5) 化为等价的一阶方程组

$$A\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x}+B\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial y}=\boldsymbol{F} \tag{2.2}$$

其中 A, B 为 6×6 矩阵，$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{F}$ 为六维列向量．(2.2) 的特征方程为

$$\det(\sigma_1 a_{ij}+\sigma_2 b_{ij})=0 \quad i,j=1,2,\cdots,6 \tag{2.3}$$

其特征根为

$$\sigma_2^4=0,\ \lambda_5=H\left(\frac{v}{u}+\frac{1}{u}\sqrt{p/\rho}\right),\ \lambda_6=H\left(\frac{v}{u}-\frac{1}{u}\sqrt{p/\rho}\right) \tag{2.4}$$

此结果与 [16, 17] 的结论一致．

由 (2.4) 看出，微分方程组有四个重特征，反映了抛物型性质，信息以无限速度沿 $x=\mathrm{const}$. 传播；另有二个非零的实特征，代表双曲型性质，信息以有限速度沿特征方向传播．因此，当 $\mu\neq 0$ 时或扩散占优势时，可把简化 N-S 方程组看成双曲-抛物双重性质的方程组．从 [25] 的判别方法也可得出同一结论．

另一方面,当 $\mu=0$, 即 (1.1)—(1.5) 退化为一阶方程组时,特征根为:

$$\lambda_1=\lambda_2=Hv/u,\ \lambda_{3,4}=H\frac{uv\pm c^2\sqrt{M^2-1}}{u^2-c^2} \tag{2.5}$$

其中 M 为 Mach 数. 当 $M>1$ 时,所有特征根为实的,属双曲方程组;当 $M<1$ 时,λ_3 和 λ_4 为复根,属椭圆方程组. 因此,当扩散效应很小时 ($\mu\to 0$), 方程组的性质将发生根本变化. 介于中间状态的方程性质是复杂的. 但是,我们认为,更为重要的问题是,对 (1.1)—(1.5) 提初边值问题是否适定?

三、初值问题的适定性

在 [16, 17] 中曾指出过简化方程组的双曲--抛物性质,但他们由此得出结论:钝头体超音绕流流场从驻点开始作为初边值问题向下游积分是适定的. 我们对此有不同的看法. 经分析发现,当 $u<c$ 时 Cauchy 问题的提法是不适定的. 为简单起见,我们考虑原方程组的主要部分并且在系数冻结时的情形:

$$A\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x}+B\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial y}=C\frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial y^2} \tag{3.1}$$

其中 $\boldsymbol{X}^T=(u,v,p,T)$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{H} & 0 & \frac{u}{Hp} & -\frac{u}{HT}\\ 0 & \frac{\rho u}{H} & 0 & 0\\ \frac{\rho u}{H} & 0 & \frac{1}{H} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{u}{H} & c_p\frac{\rho u}{H}\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{v}{p} & -\frac{v}{T}\\ 0 & \rho v & 1 & 0\\ \rho v & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\mu_y & 0 & -v & c_p\rho v\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta\mu\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 当 $u=0$ 及 $u=c$ 时退化,因此不能由方程组 (3.1) 将导数 $\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x}$ 明显解出. 为讨论 $x\geqslant 0$ 时 Cauchy 问题是否适定,我们注意到下列定理[20]:

常系数方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}=A\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x}+B\frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial x^2} \tag{3.2}$$

为进化方程组的必要条件是矩阵 B 的特征值有正的实部,若这些特征值是互不相同的,则条件也是充分的.

我们利用与 [20] 中同样的证明方法推出 (3.1) 为进化方程组的必要条件是其特征方程

$$\det(\lambda A-C)=0 \tag{3.3}$$

的根有非负的实部．(3.3) 的根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{\mu}{2\mathrm{Re}_\infty}\cdot\frac{1}{\mathrm{Pr}}\cdot\frac{H}{\rho u(m^2-1)}\{[(\mathrm{Pr}+\gamma)m^2-1] \pm [((\mathrm{Pr}+\gamma)m^2-1)^2 - 4\mathrm{Pr}\,\gamma m^2(m^2-1)]^{1/2}\}$$

其中 $m^2 = (u/c)^2$，不难看出，当 $u \geqslant c$ 时 $\lambda_{3,4} \geqslant 0$；而当 $u < c$ 时 $\lambda_3 < 0$，$\lambda_4 > 0$．因此，当 $u < c$ 时，(3.1) 不满足进化方程的必要条件，初值问题的提法是不适定的．

在 $u < c$ 的区域出现计算的不稳定性这一事实，有许多工作已提到[13-15,19]，我们认为，差分解法产生的不稳定性是由于 $u < c$ 时原偏微分方程的不适定性所引起的．同一隐式差分格式在 $u \geqslant c$ 的区域未出现不稳定问题．从数学上看，关键在于方程组 (3.1) 中导数 $\partial \boldsymbol{X}/\partial x$ 的系数矩阵 A 在定解区域中发生退化．因此，要克服数值解的不稳定性，必须改变矩阵 A 的结构．如在 x 动量方程中显式处理 $\partial p/\partial x$[13]；在连续方程中显式处理 $\partial u/\partial x$[19]；在 y 动量方程中迭代 $\partial v/\partial x$[5] 以及阻止扰动发展的特殊做法[26]等等．事实上，如果将 x 动量方程中的 $\partial p/\partial x$ 或连续方程中的 $\partial u/\partial x$ 看作相对固定，则方程组 (3.1) 的特征方程 $\det(\lambda A - C) = 0$ 的根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 = \frac{H}{\rho u}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\right) > 0; \quad \lambda_4 = \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\lambda_3 > 0. \tag{3.4}$$

其实部非负，因此满足进化方程组的必要条件．

四、初边值问题的提法

如前所述，简化 N-S 方程组一般说来在 $u < c$ 的区域初值问题是不适定的．那么应如何给边界条件，才能保证问题的提法是适定的呢？下面仅对钝头体超音速粘性绕流做一定性分析．在无粘流情形，流动图象如图 2 所示，若从驻点提初值问题，如积分关系法[21]所做的那样，则产生两个问题．第一，驻点解是不能独立确定的，而与流场中通过奇异线 $u = c$ 上的正则条件相关；第二，从驻点线向下游积分是数值不稳定的，这种不稳定性是由问题提法的不适定所引起的．

对粘性流来说，物面条件若为 $u = 0$，$v = 0$，$T = T_W$（无滑流，无引射），则流场中所产生的局部声速线 $u = c$ 并不和物面相交，而是紧靠物面一直延伸到底部近尾流区域的 E 点（图 3）．换句话说，头部的亚音区与底部的亚音迴流区被一条物面附近极薄的亚音带连结起来．信息通过这条带前后是否互相有影响呢？这是国外学者有争论的问题，大多数人认为这种影响是存在的[13-15,19,22]；也有人从力学观点分析后面的信息对前面是不产生影响的，因而认为对简化 N-S 方程提初边值问题是适定的[23,24]．根据我们前面的分析，前一种观点是比较合理的，事实上，假定对简化 N-S 方程亦采用积分关系法的思想进行求解[6]，由于曲线 $u = c$ 不落在物面上而落在底部区域，我们设想积分关系法的分割条带数 N 无限增大，则驻点线上待确定的无穷多个未知量与 $u = c$ 上的无穷多个正则条件连系起来，当 $N \to \infty$ 时，驻点线 $x = 0$ 上的量与整条线 $u = c$ 上的正则条件相连系，这就是说前后的“关联”是存在的，原则上必须在区域 $ABCDEFA$ 上作为边值问题求解，而人为地给定前面流场沿 x 方向推进求解是不合理的．

根据上述分析，我们认为在区域 $ABCDEFA$ 上求解时边界条件可如下给出：在 $x=0$ 处给对称条件，在 EF 线上不应提条件，$x=0$ 处不足的条件由隐含解在曲线 $u=c$ 上的正则条件来补充．关于 y 方向的边界条件，可由原始偏微分方程组的特征来确定．由第二节可知，方程组有四个 $x=\text{const}.$ 的特征，代表抛物性质，信息沿 $x=\text{const}.$ 以无限速度传播，必须在 $y=0$ 及 $y=y_s$ 上各给二个边值条件；其次，因特征值 $\lambda_5(0)>0$，$\lambda_6(0)<0$，故在 $y=0$ 处可给一个条件；$\lambda_5(y_s)>0$，$\lambda_6(y_s)<0$，在 $y=y_s$ 处亦给一个条件．若将钝头体绕流的脱体激波作为未知，则须再给一个条件，共七个条件．我们取物面上三个条件和激波上的四个条件，正好使方程组封闭．但是，若将法向动量方程中 v 对 y 的二阶导数保留，还缺少一个边界条件，通常用激波上的连续方程[14]或壁面上的法向动量方程补充．

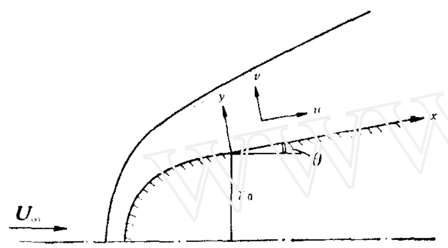

图　1

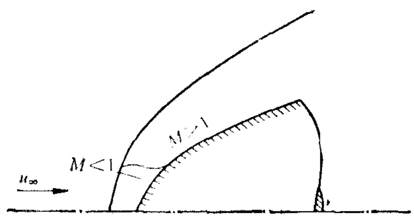

图　2

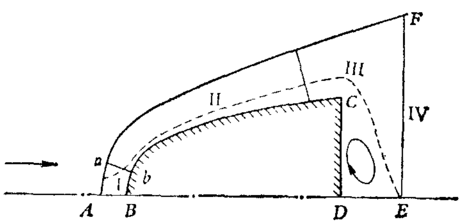

图　3

在实际计算中，对细长的钝体，底部流场和头部流场的相互作用是很弱的（由于粘性耗散使扰动逐渐消失）．因此可将定解区域分成 I、II、III、IV 四个区域求解．I 为钝头区，大部分为亚音区；II 为身部流场，大部分为超音区，而壁面附近为薄亚音区；III 为近尾流区，其流动结构极为复杂；IV 为远尾区，即纯超音区．以上四个区域划分的准则是相邻两个区域的解相互影响可以忽略．我们采用直线法求解区域 I，经验表明，只要 ab 线将主要亚音部分包含进去，则区域 II 对 I 的影响可忽略．区域 II 可作为初边值问题推进求解，但有数值不稳定性存在，只要利用第三节所指出的改变系数矩阵 A 的性质或适当控制步长便可求得稳定的数值解．区域 III 应作为边值问题求解，许多人仍用 (1.1)—(1.5) 类型的方程组，但是保留 x 方向的二阶导数项更为合理．至于区域 IV 纯粹是超音区域，利用方程组 (1.1)—(1.5) 作为初边值问题推进求解是合理的．我们对球锥组合体求解区域I、II 的数值结果表明，上面提出的分区解法是可行的，比之 R. T. Davis 方法[5]或时间相关法有效得多．目前简化 N-S 方程已应用于管道流[8]、近尾流[9]、远尾流[10]、压缩拐角[11]、激波-附面层干扰问题[12]以及三维尖头和钝头体的粘性绕流[13—15]．效果是比较好的．

参　考　文　献

[1] Van Dyke, H., Hypersonic Flow Research, Academy, Press, N. Y. (1962).
[2] Cheng, H. K., IAS paper, 63—92 (1963).
[3] Магомедов, К. М., *Изв. АН СССР, МЖГ*, 2(1970), 44—56.
[4] Головачев, Ю. П. и. др., *ЖВММФ*, **13**, 4(1973), 1021—1028.

[5] Davis, R. T., *AIAA J.*, 8, 5 (1970), 843—851.
[6] Толстых, А. И., *ЖВММФ*, 6, 1(1966), 113—120.
[7] Srivastava, B. N. et al., *AIAA J.*, 14, 2(1976), 243—245.
[8] Ветуцкий, В. Н., *Изв. АН СССР. МЖГ*, 4(1977), 29—35.
[9] Ohrenberger, J. et al., *AIAA paper*, (1972), 72—116.
[10] Кокошиская, Н. С. и др., Аэродинамика и Газавая Динамика, М., «Наука» (1976).
[11] Miller, D. G. et al., *AIAA Paper*, 75—1(1975).
[12] Issa, R. I. et al., *AIAA J.*, 15, 2 (1977), 182—188.
[13] Rubin, S. G. et al., *Computer and Fluids*, 1,, 1 (1973), 37—57.
[14] Helliwell, W. S. et al., *Computer and Fluids*, 1 (1975), 83—101.
[15] Patanker, S. V. and Spalding, D. B., *Int. J. Heat mass Transfer*, 15, 10 (1972), 1787—1805.
[16] Davis, R. T. and Flügg-Lotz, I. *J. Fluid Mech.*, 20, part (1964), 539—623.
[17] Kaiser, J. E. and Flügg-Lotz, I., AD—669378 (1968).
[18] Петровский, И. Г., Лекция об уравнениях с частными производными, М., Физматгиз (1961).
[19] Воронкин, В. Г., *Изв. АН СССР, МЖГ*, 6(1974), 99—105.
[20] Гельфанд, И. М., *УМН.*, 14, 2(1959). 87—158.
[21] Белоцерковский, О. М., Численные методы решения задаи механики сплошных сред, *Вц АН СССР*, (1969).
[22] Garvine, R. W. *The Phys. Fluids.*, 11, 7 (1968), 1413—1423.
[23] Miller, G., AD—746891 (1972).
[24] Miller, G., *AIAA J.*, 11, 7(1973), 938—942.
[25] Абрашин, В. Н., *ДАН БССР*, 20, 11(1976), 968—970.
[26] Ковеня, В. М. Черный, С. Г. Яненко, Н. Н., *ДАН СССР*, 245, 6(1979), 1322—1324.
[27] 高 智，无粘外流和粘性边界层联立求解，中国科学院力学研究所工作报告(1967).

SIMPLIFIED NAVIER-STOKES EQUATIONS AND THEIR MATHEMATICAL CHARACTERISTICS

Wang Ru-quan Liu Xue-zong

Jiao Lu-qiong

(*The Computing Center, Academia Sinica*)

Gao Zhi

(*The Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

This paper presents some qualitative analysis for simplified Navier-stokes equations. Authors conclude that the system of equations is ill-posed when tangential component of velocity u is smaller than c (c is local sound velocity) in the flow field. Therefore, instabilities have been encountered in numerical solutions. In addition, we also discuss the problem of proper specification of the initial-boundary value for viscous hypersonic flow around a sphere-cone body.