

湍流自由剪流的自模性理论

谢象春

(中国科学院力学研究所)

提要 本文讨论了自由湍流剪流的速度脉动与温度脉动特性。用与各向同性湍流对比确定经验常数的方法,使所论半经验理论与实验数据的比较中,只有湍流尺度扩散律中的比例系数以及动量扩散与热量扩散问题的各自一个经验常数由实验决定。

本文讨论有关湍流自由剪流——混合区、平面与轴对称射流以及平面与轴对称尾迹——的动量扩散与热量扩散中的速度脉动与温度脉动及其相关特性。考虑到,在自由湍流中,湍流平均运动的速度分布已为许多实验证明^[1]具有自模性,那末构成湍流瞬时速度的另一叠加分量——速度脉动在流场内不同处所也应服从自模性条件(以上系指自模流动段内);从而本文引入一个关于流动横截面内湍流平均涡旋 Reynolds 数 Re_L 相当大 ($Re_L \gg 1$) 的假设。

一、二元速度脉动相关方程的近似解

不可压粘性流体运动湍流流场中一点的二元速度脉动相关方程可表为^[2]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_k} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_k} + \overline{u_k u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \\ & = - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_k u_j} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p u_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{p u_i} \right) \\ & + \frac{1}{\rho} p \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_k}}{\partial x_l \partial x_l} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \end{aligned} \quad (1.1)$$

此处 u_i 表示速度脉动分量; U_i 表示平均速度分量; p 表示压力脉动; ρ 表示常数密度; ν 表示运动粘度; x_j 表示笛卡儿坐标; t 表示时间; 重复下标表示求和。如近来已被实验证实的固壁湍流剪流[管(槽)流与附面层流动]中所采取的近似^[3-5]一样,我们将略去(1.1)式中对时间的全微分项以及湍流应力扩散与分子粘性应力扩散项,上式变为

$$\overline{u_k u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} p \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = 0 \quad (1.2)$$

按 Rotta 单独引入的假设^[6],有

$$\frac{1}{\rho} p \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = -C \frac{\sqrt{q}}{L} \left(\overline{u_i u_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} q \right) \quad (1.3)$$

及

本文于 1977 年 10 月 4 日收到。

$$\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \nu \left(K \frac{\overline{u_i u_k}}{2L^2} + \delta_{ik} \kappa \frac{q^{3/2}}{3\nu L} \right) \quad (1.4)$$

此处 δ_{ik} 是 Kronecker 符号; L 是表征涡旋平均直径的湍流尺度; C 、 K 、 κ 是经验常数; q 表示湍流脉动能量, 其值为

$$q = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (1.5)$$

在流动区域的中间部分, 当湍流平均涡旋 Reynolds 数 $Re_L \left(= \frac{\sqrt{q} L}{\nu} \right) \gg 1$, 则对应于 (i, k) 采取 $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$ 与 $(3,3)$ 诸值, 由 (1.2)–(1.4) 可得关于自由湍流平面情形 [混合区 (即无限平面平行射流边界层)、平面射流与平面尾迹] 的切向 Reynolds 似应力 $\overline{\rho u v}$ 以及法向 Reynolds 似应力 $\overline{\rho v^2}$ 、 $\overline{\rho w^2}$ 与湍能 q 的下列方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{uv}}{q} \cdot L \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{q}} + \kappa &= 0 \\ \frac{\overline{v^2}}{q} \cdot L \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{q}} + C \frac{\overline{uv}}{q} &= 0 \\ C \frac{\overline{v^2}}{q} + \frac{2}{3} (\kappa - C) &= 0 \\ C \frac{\overline{w^2}}{q} + \frac{2}{3} (\kappa - C) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

式中 y 表示纵坐标; u, v, w 表示沿三个直角坐标方向的速度脉动; U 表示纵向平均速度。最后求解 (1.6) 并考虑到 (1.5) 式得到¹⁾

$$\overline{uv} = - \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \left(\frac{C}{\kappa} - 1 \right)^{3/2} \frac{\kappa}{C^3} L^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (1.7)$$

$$q = \frac{2(C - \kappa)}{3C^2 \kappa} L^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (1.8)$$

$$\overline{u^2} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \left(1 + \frac{2\kappa}{C} \right) \left(\frac{C - \kappa}{C^2 \kappa} \right) L^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (1.9)$$

$$\overline{v^2} = \overline{w^2} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \left(1 - \frac{\kappa}{C} \right)^2 \frac{1}{C \kappa} L^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (1.10)$$

由 (1.7)–(1.10) 可知, 诸 Reynolds 似应力之间互成比例, 另外由 (1.7), (1.9) 与 (1.10) 可得

$$\frac{\overline{u^2}}{\overline{v^2}} = \frac{\overline{u^2}}{\overline{w^2}} = \frac{1 + \frac{2\kappa}{C}}{1 - \frac{\kappa}{C}} \quad (1.11)$$

$$K_{uv} = \frac{\overline{uv}}{\sqrt{\overline{u^2}} \sqrt{\overline{v^2}}} = - \sqrt{\frac{3\kappa}{2(C + 2\kappa)}} \quad (1.12)$$

1) 同时由 (1.2)–(1.4) 式对应于 (i, k) 值分别为 (1.3), (3.2) 的情形, 不难求得 $\overline{uw} = \overline{vw} = 0$ 。

从上面的(1.11)与(1.12)式可清楚地看出,当 C 值愈大,则 $\overline{u^2}$ 值与 $\overline{v^2}$ 或 $\overline{w^2}$ 值愈接近,而 K_{uv} 值愈小. 最后湍流切应力可表为

$$\tau = \rho L_{Pr}^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.13)$$

此处 L_{Pr} 系 Prandtl 混合长度为

$$L_{Pr} = \alpha L \quad (1.14)$$

其中

$$\alpha = \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \left(\frac{C}{\kappa} - 1 \right)^{3/2} \frac{\kappa}{C^3} \right]^{1/2} \quad (1.14a)$$

可见在所论近似情形下,由二元速度脉动相关方程所推导出的湍流切应力表示形式完全和广泛使用的 Prandtl 混合长度理论一致.

用相应的步骤处理轴对称问题,可以得到与(1.7)~(1.14a)诸式完全相似的结果.

二、湍流速度脉动的自模性条件

按照文献[7]处理涡量脉动方程的方法,我们把下列不可压缩流情形的湍流脉动方程^[2]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j u_i}) + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.1)$$

变换到跟平均流动一同运动的坐标系中去并采用相似变换可得所论定常平均运动自由剪切流动的下列方程

$$\frac{\sqrt{q}/L}{\frac{\partial U}{\partial y}} \varphi_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_j} + \varphi_2 = - \frac{\sqrt{q}/L}{\frac{\partial U}{\partial y}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + \frac{1}{Re_L U_{max}} \frac{\sqrt{q}}{\partial \xi_i \partial \xi_i} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi_i^2} \quad (2.2)$$

此处 $\varphi_i(\xi) = u_i/\sqrt{q}$; $\phi(\xi) = (p/\rho)/q$; $\Omega(\xi) = U/U_{max}$; $\xi_i = x_i/L$; $\zeta = y/L$;

$$x'_i = x_i - \int_{t_0}^t U_i(x_0, t) dt;$$

t_0 表示某一初始时刻; x_0 表示运动坐标系原点的坐标; u_i 表示运动坐标系中的速度脉动亦即流体的运动速度; U_{max} 表示混合区流场中未受扰动的来流速度或射流与尾迹流场中的轴心速度与轴心亏损速度. 对于 $\partial U/\partial y \neq 0$ (即流场的中间部分)的情形,当

$$Re_L U_{max} \gg \sqrt{q},$$

则(2.2)式变为

$$\frac{\sqrt{q}/L}{\frac{\partial U}{\partial y}} \varphi_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_j} + \varphi_2 = - \frac{\sqrt{q}/L}{\frac{\partial U}{\partial y}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \quad (2.3)$$

自由模性条件从(2.3)式得到自由湍流平面情形的下列表示式¹⁾

1) 显然,由(2.2)从涡旋 Reynolds 数相同的相似性湍流流场条件出发则可以得到: $q = \text{常数} \cdot \nu \frac{\partial U}{\partial y}$, $L = \text{常数} \cdot \frac{\nu}{\sqrt{q}}$.

$$q = \text{常数} \cdot L^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (2.4)$$

基于文献[7]的分析,切向 Reynolds 似应力与三个法向 Reynolds 似应力之间互成比例。从而得出,利用运动坐标系变换湍流脉动方程,从自模性条件出发,也可得出与前面一致的结论(同样,对于轴对称情形,也可得到类似的结果)。

三、湍流尺度

在(1.7)–(1.10)诸式或(2.4)式中,表征涡旋平均直径的湍流尺度 L ,可用积分自由剪流横截面内两个不同点的速度脉动二元相关方程来得到。关于不可压粘性流体运动湍流流场中 A 点速度脉动 $(u_i)_A$ 与 B 点速度脉动 $(u_k)_B$ 的二元相关方程具有下面的形式^[8]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{(u_i)_A (u_k)_B} + \overline{(u_i)_A (u_k)_B} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)_A + \overline{(u_i)_A (u_j)_B} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right)_B \\ & + \frac{1}{2} [(U_j)_A + (U_j)_B] \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{AB} \overline{(u_i)_A (u_k)_B} + [(U_j)_B - (U_j)_A] \frac{\partial}{\partial \xi_j} \overline{(u_i)_A (u_k)_B} \\ = & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{AB} [\overline{(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B} + \overline{(u_k)_B (u_i)_A (u_j)_A}] \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi_j} [\overline{(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B} - \overline{(u_k)_B (u_i)_A (u_j)_A}] \\ & - \frac{1}{2\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{AB} \overline{p_A (u_k)_B} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} \overline{p_B (u_i)_A} \right] \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} \overline{p_A (u_k)_B} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} \overline{p_B (u_i)_A} \right] + \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right)_{AB} \overline{(u_i)_A (u_k)_B} \\ & + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_i} \overline{(u_i)_A (u_k)_B} \end{aligned} \quad (3.1)$$

此处 $\xi_j = (x_j)_B - (x_j)_A$; $(x_j)_{AB} = \frac{1}{2} [(x_j)_A + (x_j)_B]$; $(x_j)_A$ 、 $(x_j)_B$ 表示 A 、 B 两点的坐标; $(U_i)_A$ 、 $(U_k)_B$ 表示 A 、 B 两点的平均速度; p_A 、 p_B 表示 A 、 B 两点的压力脉动。在所论 $Re_L \gg 1$ 的自模性条件下,可在(3.1)式中略去含有运动粘性系数 ν 的项;同时如前面一样略去相应的湍流扩散项;则对定常情形并令 $i = k$,可把(3.1)式写成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(U_i)_A + (U_i)_B] \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{AB} \overline{(u_i)_A (u_i)_B} = - \overline{(u_i)_A (u_i)_B} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)_A \\ & - \overline{(u_i)_A (u_j)_B} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)_B + [(U_j)_A - (U_j)_B] \frac{\partial}{\partial \xi_j} \overline{(u_i)_A (u_i)_B} \\ & + \Psi_{ii}[(x_j)_{AB}, \xi_j] \end{aligned} \quad (3.2)$$

式中 $\Psi_{ii}[(x_j)_{AB}, \xi_j]$ 表示流场中的脉动分量能量交换。下面的步骤就是把(3.2)式两边乘以 $d\xi_2$ 然后以 0 至 ∞ 为限积分。采取一般的近似处理方法^[9]以及由因次分析假设

$$\int_0^\infty \{ \Psi_{ii}[(x_j)_{AB}, \xi_j] \}_{\xi_1, \xi_3=0} d\xi_2 \propto \frac{1}{\rho} \left(p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_0 L$$

$\left[\left(p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_0 \right]$ 表示 A 、 B 两点重合即 $\xi_j = 0$ 时的压力脉动与速度脉动梯度相关]其次注意

到(1.3)式,于是采用通常的边界层近似,并且规定 A 点位于靠近与流动方向重合的 x 轴某处,最后得到自由湍流平面情形的下列方程

$$U_* \frac{d(q_m L)}{dx} = n \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_* q_m L \quad (3.3)$$

此处 n 为常数; U_* , $(\partial U / \partial y)_*$ 为流动横截面内纵向平均速度与纵向平均速度横向梯度的相应的平均值以及

$$q_m L = \int_0^\infty [(\overline{u_i})_A (\overline{u_i})_B]_{\xi_1, \xi_2=0} d\xi_2 \quad (3.4)$$

式中 q_m 表示流场横截面内对应于 x 轴与射流边界之间的中点处的湍流能量。

现在我们讨论作为自由湍流的一个基本流动图案——自由剪切混合层的情形。考虑到速度脉动的自模性即 $q = U_{\max}^2 f(y/b)$ (此处以及在下面的讨论中 b 表示混合区厚度或射流与尾迹的半厚度),则在(3.4)式中的 $q_m = U_{\max}^2 f(k) = \text{常值}$ (k 是无因次常数),从而得出自由湍流平均涡旋尺度方程

$$U_* \frac{dL}{dx} = n \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_* L \quad (3.5)$$

如此根据(3.5)式可推导出关于各种不同类型自由剪流的表征平均涡旋直径的湍流尺度扩散规律。

对于混合区、平面与轴对称射流情形, $U_* \propto U_{\max}$, $(\partial U / \partial y)_* \propto U_{\max} / b$, 并且设

$$L \propto b \quad (3.6)$$

从而考虑到当 $x = 0$, $L = 0$ 的条件,积分(3.5)式可得

$$L = k_1 x \quad (3.7)$$

此处 k_1 为比例常数。即湍流尺度具有线性的扩散规律,此为 Laurence 的实验^[40]所证明。

对于尾迹情形, $U_* \propto U_\infty$ (U_∞ 为所论流场的来流速度),则如上面的讨论一样,积分(3.5)式后,分别得到

$$L = k_2 (c_D dx)^{1/2} \quad (\text{平面尾迹}) \quad (3.8)$$

及

$$L = k_3 (c_D Ax)^{1/3} \quad (\text{轴对称尾迹}) \quad (3.9)$$

此处 c_D 为阻力系数; d 为圆柱直径; A 为物体迎风面积; k_2 , k_3 为比例常数。这就是说,对平面与轴对称尾迹,湍流尺度分别有按 x 的 $1/2$ 次方与 $1/3$ 次方变化的扩散规律。所得结果与已知的实验事实^[8]相符。

另外,再来考察(3.5)式,估计到(3.6)与(1.10)以及代入 $U_* = dx/dt$,则有

$$\frac{db}{dt} \propto \sqrt{v^2} \quad (3.10)$$

由此证明了 Prandtl^[41]曾经提出过而为尔后很多实验^[42]所验证的关于混合区厚度变化率与横向速度脉动成比例的物理设想。

最后,我们用因次分析方法由(3.1)式可得对应于均匀各向同性湍流场情形的湍流尺度为

$$L = k_0 \sqrt{\nu t} \quad (3.11)$$

式中 k_0 为比例系数。

四、热扩散问题

把不可压粘性流体运动湍流流场中的温度脉动方程^[7]乘以速度脉动 u_i 与速度脉动方程 (2.1) 乘以温度脉动 θ 相加再对时间或系综取平均并考虑到连续方程得到下列速度脉动与温度脉动的二元相关方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i \theta} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i \theta} + \overline{\theta u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i \theta u_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p \theta} + \frac{1}{\rho} \overline{p} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \\ &+ \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i \theta}}{\partial x_i \partial x_i} - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i} \partial \theta}{\partial x_i \partial x_i} + a(1 - \text{Pr}) u_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} \end{aligned} \quad (4.1)$$

此处 Θ 表示平均温度; a 表示导热系数; Pr 为 Prandtl 数. 如前面处理动量扩散问题一样, 对于所论射流与尾迹这一类湍流自由剪流的热扩散问题, 我们将略去 (4.1) 式中对时间的全微分项以及湍流热流扩散与粘性热流扩散项, 并设 $\text{Pr} = 1$, 从而上式变为

$$\overline{\theta u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \overline{u_i} \partial \theta}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad (4.2)$$

按因次分析, 在 Rotta 关于动量扩散问题假设的基础上, 对于所论热扩散问题, 我们设

$$\frac{1}{\rho} \overline{p} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = -C' \frac{\sqrt{q}}{L} \overline{u_i \theta} \quad (4.3)$$

及

$$\nu \frac{\partial \overline{u_i} \partial \theta}{\partial x_i \partial x_i} = \nu \frac{\overline{u_i \theta}}{L^2} \left(\frac{K'}{2} + \frac{\kappa'}{3} \frac{\sqrt{q} L}{\nu} \right) \quad (4.4)$$

式中 C' 、 K' 与 κ' 为经验常数. 当 $\text{Re}_L \gg 1$, 对应于 $i = 1, 2$, 可由 (4.2) — (4.4) 得到关于横向速度脉动与温度脉动相关 $\overline{v \theta}$ 以及纵向速度脉动与温度脉动相关 $\overline{u \theta}$ 的下列方程

$$\frac{\overline{v \theta}}{q} L \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\overline{u v}}{q} L \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \left(C' + \frac{2}{3} \kappa' \right) \frac{\overline{u \theta}}{\sqrt{q}} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\overline{v^2}}{q} L \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \left(C' + \frac{2}{3} \kappa' \right) \frac{\overline{v \theta}}{\sqrt{q}} = 0 \quad (4.6)$$

考虑到 (1.7), (1.8) 与 (1.10), 则由 (4.5), (4.6) 可得

$$\overline{v \theta} = - \frac{\left[\frac{2}{3} (C - \kappa) \right]^{3/2}}{\left(C' + \frac{2}{3} \kappa' \right) C^2 \sqrt{\kappa}} L^2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (4.7)$$

$$\overline{u \theta} = \frac{2(C - \kappa)}{C(3C' + 2\kappa')} \left(\frac{1}{C' + \frac{2}{3} \kappa'} + \frac{1}{C} \right) L^2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (4.8)$$

由 (1.14) 与 (4.7) 得到湍流热流为

$$q_0 = c_p \rho \overline{v\theta} = -\frac{1}{Pr_T} c_p \rho L_{Pr}^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (4.9)$$

此处 c_p 是定压比热; Pr_T 是湍流 Prandtl 数, 其值为

$$Pr_T = \frac{1}{C} \left(C' + \frac{2}{3} \kappa' \right) \quad (4.9a)$$

由(4.9)式可以看出, 在所论近似情形下, 由速度脉动与温度脉动的二元相关方程所推导出的湍流热流表示式在形式上和由 Taylor 涡量交换理论所得的热流表示式^[22]一致。

其次假设

$$v \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \nu \frac{\overline{\theta^2}}{L^2} \left(\frac{K''}{2} + \frac{\kappa''}{3} \sqrt{\frac{qL}{\nu}} \right) \quad (4.10)$$

式中 K'' 、 κ'' 是经验常数。当 $Re_L \gg 1$, 用同样的方法处理流场中一点处的温度脉动二元相关方程^[23] ($Pr = 1$), 则得温度脉动的下列表达式

$$\sqrt{\overline{\theta^2}} = \sqrt{\frac{2(C - \kappa)}{\kappa'' \left(C' + \frac{2}{3} \kappa' \right) C}} L \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (4.11)$$

最后考虑到(1.9), (1.10), (4.7), (4.8)以及(4.11)可分别得到横向速度脉动与纵向速度脉动和温度脉动之间的相关系数为

$$K_{v\theta} = \frac{\overline{v\theta}}{\sqrt{\overline{v^2}} \sqrt{\overline{\theta^2}}} = -\sqrt{\frac{\kappa''}{3C' + 2\kappa'}} \quad (4.12)$$

$$K_{u\theta} = \frac{\overline{u\theta}}{\sqrt{\overline{u^2}} \sqrt{\overline{\theta^2}}} = \left(1 + \frac{3C}{3C' + 2\kappa'} \right) \sqrt{\frac{3\kappa''}{2(C + 2\kappa)(3C' + 2\kappa')}} \quad (4.13)$$

关于轴对称情形, 对于热扩散问题也可得到与(4.7)–(4.9a)及(4.11)–(4.13)等式完全相类似的结果。

另外必须提到, 从温度脉动的自模性条件出发, 由温度脉动方程也可得到与(4.11)式相同的结论。

五、理论与实验比较

前面所引入的经验常数 κ , κ' 与 κ'' 可借对比的方法确定。对于动量扩散情形, 可采用文献 [4] 中处理管流的理论计算与实验比较时对比各向同性湍流流场所得的 κ 值为 0.155; 而对于热量扩散情形, 我们定义一个 $\partial U/\partial y$ 与 $\partial \theta/\partial y$ 可为任意小量的准均匀各向同性湍流流场, 对比温度脉动的初期衰变, 则得 $\kappa' = 0.29$ 及 $\kappa'' = 0.35$ 。于是, 除湍流尺度扩散律中的比例系数由实验确定外, 所剩下的待实验决定的经验常数为 C 或 C' 。

作为理论与实验比较的典型例子, 我们把公式 (1.9), (1.12) 和 (4.13) 与 Г. С. Антонова^[24, 25] 以及 S. Corrsin 等^[26] 关于自由射流的实验¹⁾ 比较示于图 1–4 (采用 $k_1 = 0.0155$, $C = 1.02$, $C' = 0.6947$; 此处 U_0 , U_m 分别表示射流出口速度及射流主段轴心速度, $b_{1/2}$ 是二分之一射流轴心速度处离射流轴心的距离, d_0 是射流出口直径。) 以及把

1) 所引 Антонова 和 Corrsin 等实验的射流出口温度与周围介质温度比值大约在 1.5 附近, 此处近似地作为不可压缩流情形处理。

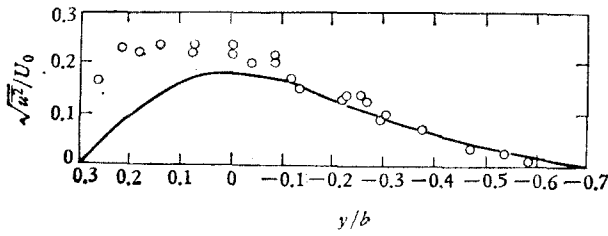


图 1
○ Антонова 实验数据^[14] — 理论曲线

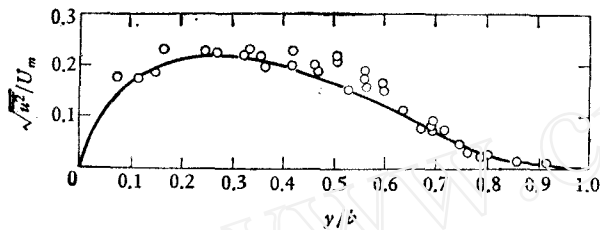


图 2
○ Антонова 实验数据^[14] — 理论曲线

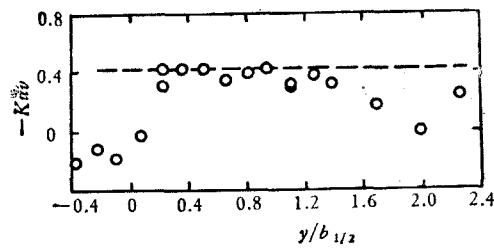


图 3
○ Corrsin 与 Uberoi 实验数据^[16]
--- 理论曲线

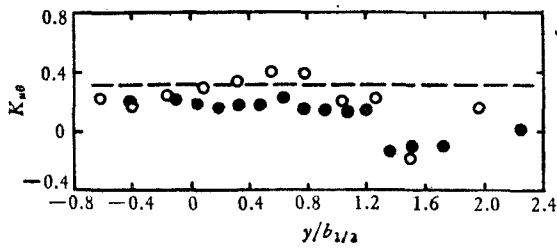


图 4
● $x/d_0 = 15$
○ $x/d_0 = 20$ } Corrsin 与 Uberoi 实验数据^[16]
--- 理论曲线

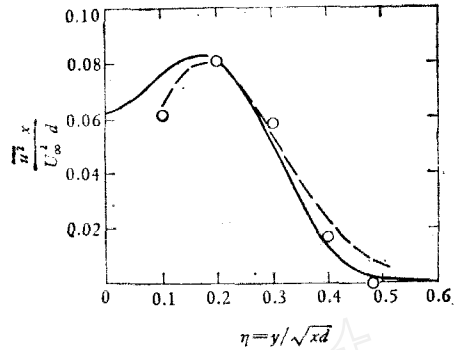


图 5
— Townsend 实验^[17]
--- 文献[7]理论计算
○ 本文理论计算

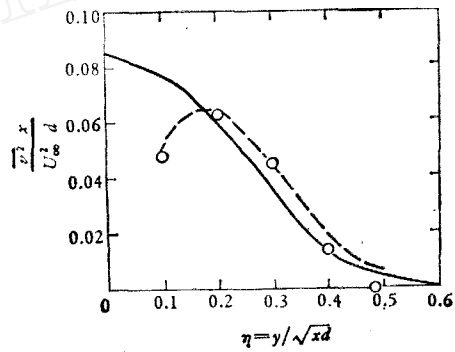


图 6
— Townsend 实验^[17]
--- 文献[7]理论计算
○ 本文理论计算

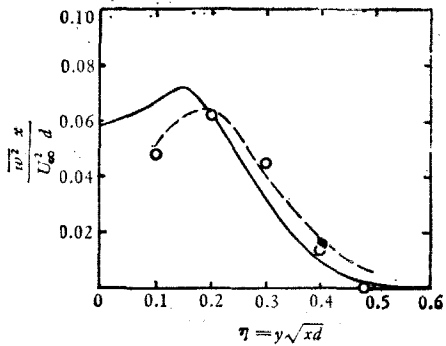


图 7
— Townsend 实验^[17]
--- 文献[7]理论计算
○ 本文理论计算

(1.9) 和 (1.10) 与 A. A. Townsend^[17] 关于平面尾迹的实验比较示于图 5—7 (采用 $k_2 = 0.093$, $C = 1.755$; 并在同图中表示了按涡旋相似理论^[7] 的计算结果)。同时根据 Антонова 的测量数据例如可算出射流主段的湍流平均涡旋 Reynolds 数 Re_L 约为 $800(y/b = 0.1)$, 而按 Townsend 关于平面尾迹的实验数据算得的 Re_L 为 $28(\eta = 0)$; 从而分析表明, 本文所采取的关于 $Re_L \gg 1$ 的假设, 在理论的一定近似范围内, 是可以允许的。

由以上比较可以看出, 在实验数据具有一定分散的范围内, 从整个流场横截面内的大部分区域来看, 理论与实验结果比较符合。

参 考 文 献

- [1] 谢象春, 湍流射流理论与计算, 科学出版社 (1975).
- [2] Chou, P. Y., *Quart. Appl. Math.*, **3**, 1 (1945), 38—54.
- [3] Ливин, В. Б. *Теплофизика высоких температур*, **2**, 4 (1964), 588—598.
- [4] Стуров, Г. Е., *Ж. ПМТФ*, **1** (1973), 95—99.
- [5] Глушко, Г. С., *Изв. АН СССР, Механика*, **4** (1965), 13—23.
- [6] Rotta, J. C., *Zeit. für phys.*, **129** (1951), 547—572.
- [7] 周培源, *力学学报*, **3**, 4 (1959), 231—237.
- [8] Hinze, J. O., *Turbulence* (2nd ed.), McGraw-Hill, New York (1975).
- [9] Иевлев, В. М., *Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред*, Изд., «Наука», Москва (1975).
- [10] Laurence, I. C., *NACA, Rep. No. 1292* (1956).
- [11] Prandtl, L., *The mechanics of viscous fluids*, In W. F. Durand, *Aerodynamic theory*, III (1935), 163—164.
- [12] Taylor, G. I., *Proc. Roy. Soc., A.*, **135** (1932), 685—705.
- [13] Corrsin, S., *J. Appl. Phys.*, **23**, 1 (1952), 113—118.
- [14] Антонова, Г. С., *Труды совещания по прикладной газовой динамике*, Изд. АН Каз. ССР, Алма-Ата (1959).
- [15] Абрамович, Г. Н., *Теория турбулентных струй*, Физматгиз, Москва (1960).
- [16] Corrsin, S. and Uberoi, M. S., *NACA*, 998 (1950).
- [17] Townsend, A. A., *The structure of turbulent shear flow* (2nd ed.), University Press, Cambridge (1976).

SELF-PRESERVING THEORY OF TURBULENT FREE SHEAR FLOW

Shieh Sang-chun

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, using the hypothesis for the turbulent Reynolds number $Re_L \gg 1$ in the cross-section of turbulent free shear flows—mixing zone, plane jet, plane wake, axi-symmetric jet and axi-symmetric wake, the characteristics of velocity fluctuations, temperature fluctuation and their correlations are clarified. Empirical constants in the equations of correlation are determined by referring to isotropic turbulence. Thus in comparing the present semi-empirical theory with experimental data, only the proportion coefficient in the diffusive law of turbulent scale and the empirical constants for momentum diffusion and for heat diffusion are determined by experiments.