

# 高焓喷管层流边界层分析

陆 志 云

(中国科学院力学研究所)

**提要** 本文导得了适用于高焓、高M数锥形喷管层流边界层排挤厚度 $\delta^*$ 、动量厚度 $\theta$ 和边界层厚度 $\delta$ 的简便计算公式。喷管喉部上游假设为平衡流，喉部下游视为化学与振动冻结流。 $\delta^*$ 和 $\delta$ 均表示为喷管几何参数、喷管喉部参数及喷管所求点无粘流参数的显函数形式而不是积分形式，因此特别适宜于此类喷管的工程设计。本公式计算结果与国外发表的风洞实验测试数据进行了比较(详见本文图2及表3)，结果是令人满意的。

## 符 号

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| $a$ 音速   | $\bar{n}$ 压力梯度相关数,式(7)          |
| $A$ 喷管截面积  | $N$ 动量参数,式(10)                  |
| $\bar{A}$ 式(10)(17)中常数                                   | $p$ 静压                          |
| $\bar{B}$ 同上   | $Pr$ Prandtl 数                  |
| $C$ 常数,式(17)(18)   | $r$ 边界层内某点与轴线垂直距离               |
| $D$ 喷管直径   | $r^*$ 喉部壁面半径                    |
| $U$ $x$ 方向速度,式(5)  | $R$ 曲率因子,式(5)                   |
| $v$ $y$ 方向速度   | $s$ 焓函数,式(8)                    |
| $V$ $Y$ 方向速度,式(5)  | $T$ 静温                          |
| $x$ 沿喷管壁的坐标  | $u$ $x$ 方向速度                    |
| $y$ 垂直于喷管壁的坐标  | $Y$ 同上                          |
| $X$ 变换后的坐标,式(2)  | $z$ 压缩性因子                       |
| $E_0$ 常数,式(14)   | $\alpha$ 喷管扩张段半锥角               |
| $f(M_e, \gamma_f)$ 函数,式(15)                              | $\beta$ 压力梯度参数,文献[3]            |
| $\bar{f}(M_e, \gamma_f)$ 函数 $f(M_e, \gamma_f)$ 的逼近函数     | $\gamma$ 比热比                    |
| $h$ 静焓   | $\gamma_{e_s}$ 等熵指数             |
| $H$ 总焓, $H = h + \frac{u^2}{2}$                          | $\delta$ 边界层厚度                  |
| $H_{i,r}$ 型参数 $H_{i,r} = \delta_{i,r}^*/\theta_{i,r}$    | $\delta^*$ 边界层排挤厚度              |
| $k_0$ 常数,式(3)  | $\eta$ 表1积分值                    |
| $k, k_1$ 常数,式(14)  | $\theta$ 动量厚度                   |
| $l$ 切应力参数 $l = \frac{\theta_{i,r}}{U_e} (U_e)_{\bar{w}}$ | $\kappa$ 常数,式(7)                |
| $M$ 马赫数  | $\lambda$ Sutherland 粘性律系数,式(3) |
| $n$ 文献[3]压力梯度相关数   | $\mu$ 粘性系数                      |
|  | $\nu$ 动粘度                       |
|  | $\bar{v}_0$ 常数,式(7)             |

本文于1978年12月收到。

$\xi$  喷管截面比  $\xi = A/A^* = (r/r^*)^2$

$\rho$  密度

$\varphi$  进口段半锥角

$\varphi_1(\xi_0)$  函数,式(20)

$\varphi_2(M_e, \gamma_f)$  函数,式(21)

$\varphi_3(M_e, \gamma_f)$  函数,式(22)

$\psi$  流函数

下标:

o 无粘流滞止值

c 边界层外缘参数

eq 平衡流值

f 冻结流值

w 喷管壁面值

$x(X, Y)$  坐标中的值

\*

喉部值  
凡坐标变量  $x, y, X, Y$  以下标出现,则表示对该坐标的偏微分。

## 一、引 言

对高焓高M数喷管流场边界层的理论分析只能采用各种近似方法,迄今只是对特定滞止条件、几何形状及壁温情况借助于大型计算机进行数值积分<sup>[1,2]</sup>,计算复杂;且不同的近似方法所得结果往往相差甚大<sup>[3-8]</sup>;由于问题的非相似性加上缺少满意的修正参数,使某一特定喷管形状及滞止参数  $F$  的计算结果往往不能直接用于另一参数下的喷管;另一方面,“高焓”“高M数”带来的“低密度”使喷管边界层区域较无粘流区域还要大,精确地计算排挤厚度及边界层厚度就显得十分必要。

直到1969年,才由 Petric<sup>[9]</sup> 对高焓层流边界层以何种理论方法为最佳作了系统的实验鉴定。他对滞止参数  $P_0$  为1大气压、 $T_0$  为5000K左右的空气流经喷管时的边界层剖面,采用电子束及多种探针进行了诊断,发现所有理论计算的  $\delta^*$  均偏高于实验测量值,唯以 Cohen-Reshotko<sup>[3]</sup> 方法偏高为最小,有时仅偏高4%。自此后该方法在高焓层流边界层特定喷管参数计算中虽获较广泛应用<sup>[4]</sup>,但却很难用于高焓喷管的实际工程设计,其原因在于公式中的积分因子是以全喷管流场无粘流参量的积分形式给出的:为了计算  $n$ ,必须对喷管进口滞止点直至所求截面处所有点的边界层外缘参数进行数值积分计算<sup>[1]</sup>,而在设计过程中喷管进口参数  $p_0, H$  和几何参数  $\varphi, \alpha, r^*, \xi_0$  及  $\frac{A}{A^*}$  中的任一量变化一次均需重复所有计算并需五次以上的迭代。

本文针对高焓、高M数喷管无粘流喉部上游一般为平衡流、下游一般为化学与振动冻结流的特点,从轴对称边界层动量积分方程出发,对喉部后本文修正定义后的  $\bar{n}$ ,在类似于[3][9][11][12]的顺压梯度普适关系线化近似的基础上,用M数作积分变换并对被积函数以连续函数分段逼近法,在“冷壁面”这一高焓地面模拟风洞具有普适性的条件下,导出了  $\bar{n}, \theta, \delta^*$  及  $\delta$  的更为简单得多的表达式。该表达式表示为喷管几何参数、喉部及截面参数的显函数形式,避免了繁杂的数值积分运算。

## 二、方程与基本假设

喉部后为气体轴对称定常冻结流,边界层方程采用 Probstein<sup>[13]</sup> 等人提出的形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r) &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left( u r \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu r}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) r u \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\}$$

式中  $H = h + \frac{u^2}{2}$ . 引进 Stewartson<sup>[4]</sup> 与 Mangler<sup>[5]</sup> 变换:

$$\left. \begin{aligned} X &= \int_0^x \lambda \frac{a_e \rho_e}{a_0 \rho_0} r_w^2 dx \\ Y &= \frac{a_e}{a_0} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} r dy \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $\lambda$  由粘性律确定:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu}{\mu_0} &= \lambda \frac{T}{T_0} \\ \lambda &= \sqrt{\frac{T_0 + k_0}{T_w + k_0}} \sqrt{\frac{T_w}{T_0}}; \quad k_0 = 110K \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

流函数定义为:

$$\psi_x = -\frac{\rho}{\rho_0} v r; \quad \psi_y = \frac{\rho}{\rho_0} u r \quad (4)$$

再引进

$$U = \psi_y = \frac{a_0}{a_e} u; \quad V = -\psi_x; \quad R = \left( \frac{r}{r_w} \right)^2 = \left( 1 - \frac{y \cos \alpha}{r_w} \right)^2 \quad (5)$$

将 (2) 至 (5) 用于 (1) 化简后得

$$\left. \begin{aligned} U_x + V_y &= 0 \\ U U_x + U_y V &= U_e U_{ex} \left( \frac{u^2/2 + a^2/(\gamma-1)}{u_e^2/2 + a_e^2/(\gamma_e-1)} \right) + v_0 \frac{\rho_0 \rho_e^*}{\rho_e^* \rho_0} \frac{T_e^*}{T_0} (R U_y)_y \\ U H_x + V H_y &= \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{a_e^2}{a_0^2} v_0 \frac{\rho_0 \rho_e^*}{\rho_e^* \rho_0} \frac{T_e^*}{T_0} (R U U_y)_y + \frac{v_0 \rho_0 \rho_e^*}{Pr \rho_e^* \rho_0} \frac{T_e^*}{T_0} (R H_y)_y \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

现作如下基本假设

(a) 边界层内亦为化学与振动冻结流。根据空气介质实验结果, 边界层内  $N_2$  振动松弛现象极其微弱, 故可假设化学复合更弱;

(b) 不考虑横向曲率效应的二阶效应。因横向曲率效应只对速度剖面形状及摩擦有明显影响, 对  $\delta^*$  影响甚微, 故可认为  $R \approx 1$ ;

(c)  $Pr \approx 1$ . 本文涉及的是等温壁外的强顺压梯度流动与高  $M$  数情况,  $Pr = 1$  近似成立。Petrie<sup>[9]</sup> 曾对大  $\beta$  值下的不同  $Pr$  情况时的速度及温度剖面进行了分析, 电子枪的测试结果表明  $Pr \approx 1$  的假设成立。

(d) 将压力梯度相关数  $\bar{n}$  修正定义为

$$\bar{n} = \frac{-U_{ex} \theta_{ir}^2}{\bar{v}_0}; \quad \bar{v}_0 = v_0 \frac{\rho_0 \rho_e^*}{\rho_e^* \rho_0} \frac{T_e^*}{T_0} = \kappa v_0 \quad (7)$$

(e) 定义焓函数  $s = \frac{u^2/2 + a^2/(\gamma-1)}{u_e^2/2 + a_e^2/(\gamma_e-1)} - 1$  并假设

$$s \approx \frac{H}{H_e} - 1 \quad (8)$$

### 三、 $\bar{n}$ 的关系式简化与求解

在上述基本假设下,可将边界层动量方程沿 Y 方向自  $0 \rightarrow \infty$  积分得到如文献 [3] [9] [11] [12] 形式上完全一样的动量积分关系:

$$-U_e \frac{d}{dX} \left( \frac{\bar{n}}{U_{eX}} \right) = 2[\bar{n}(H_{tr} + 2) + l] \quad (9)$$

该类型的微分方程在不可压缩流动情况时对顺压梯度的普适性首先为 Thwaites<sup>[11]</sup> 证明,其后 Кочин-Лойцянский<sup>[12]</sup> 及 Cohen-Reshotko<sup>[3]</sup> 均采用了这一形式的普适关系。作线性近似后式 (9) 即为

$$N(s_w, \bar{n}) = 2[\bar{n}(H_{tr} + 2) + l] \approx \bar{A} + \bar{B}\bar{n} \quad (10)$$

积分后得到喉部下游的  $\bar{n}$  表达式为

$$\bar{n} = -\bar{A}U_{eX}U_e^{-\bar{B}} \left[ \int_{x^*}^X U_e^{\bar{B}-1} dX - \frac{\bar{n}^*}{\bar{A}U_{eX}^*U_e^{*\bar{B}}} \right] \quad (11)$$

对喉部上游的区域,若用  $\gamma_{es} < 1.400$  的完全气体等熵流动来“等效”等熵平衡流,则得

$$n^* = -\bar{A}U_e^{*\bar{B}}U_{eX}^* \left[ \int_0^{x^*} U_e^{\bar{B}-1} dX - \frac{n_0}{(\bar{A}U_e^{*\bar{B}}U_{eX}^*)_{x=0}} \right] \quad (12)$$

将式 (12) 用因子  $\kappa = \frac{p_0 \rho_c^*}{\rho_c^* \rho_0} \frac{T_c^*}{T_0}$  修正后再代入 (11), 化回至  $(x, y)$  坐标平面内便得

$$\begin{aligned} \bar{n} = & -AM_c^{-\bar{B}} \frac{dM_c}{dx} \frac{1}{r_w^2} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-k} \left[ \frac{1}{\kappa} \int_0^{x^*} \left( \frac{p_c}{p_0} \right)^{k_1} M_c^{\bar{B}-1} r_w^2 dx \right. \\ & \left. + \int_{x^*}^x \left( \frac{p_c}{p_0} \right)^{k_1} M_c^{\bar{B}-1} r_w^2 dx + \frac{|n_0|}{\kappa E_0} \right] \quad (13) \end{aligned}$$

式中

$$k = \frac{3\gamma_{cs} - 1}{2\gamma_{cs}}; \quad k_1 = \frac{3\gamma_{fs} - 1}{2\gamma_{fs}}; \quad E_0 = \bar{A}M_c^{-\bar{B}} \left( \frac{dM_c}{dx} \right)_{x=0} \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-k} \quad (14)$$

对喉部上游不同  $\gamma_{es}$  时式 (13) 的第一项积分因子的计算结果如表 1 所示。当空气  $p_0$

表 1  $\bar{B} = 2.50$  时积分  $\frac{2 \sin \varphi}{r^{*3}} \int_0^{x^*} \left( \frac{p_c}{p_0} \right)^{k_1} M_c^{\bar{B}-1} r_w^2 dx$

$\gamma_{es}$	$\eta = \frac{2 \sin \varphi}{r^{*3}} \int_0^{x^*} \left( \frac{p_c}{p_0} \right)^{k_1} M_c^{\bar{B}-1} r_w^2 dx$
1.222	$0.0168 + 0.4537 \ln \xi_0 + 0.08\xi_0^2$
1.250	$0.0163 + 0.4512 \ln \xi_0 + 0.08\xi_0^2$
1.286	$0.0153 + 0.4486 \ln \xi_0 + 0.08\xi_0^2$
1.330	$0.0148 + 0.4478 \ln \xi_0 + 0.08\xi_0^2$
1.400	$0.0114 + 0.4401 \ln \xi_0 + 0.08\xi_0^2$

在 1—5 大气压、 $H_e$  在 2000—5000 大卡/千克范围内变化时,喉部上游各点的  $\gamma_{es}$  相应为 1.22—1.35, 此时由表 1 可求得积分值变化小于 2.6%; 又由量级分析可知,高 M 数时式 (13) 中第二项积分约较第一项积分大一个量级,故积分第一项由不同  $\gamma_{es}$  所引起的变化值给  $\bar{n}$  造成的误差一般小于 0.35%。故可取 1.22 至 1.35 间的任一  $\gamma_{es}$  下的完全气体流动来等效计算平衡流时的  $n$  值。

对喉部下游,采用化学与振动冻结流下的等熵关系代替完全气体等熵关系,并用相应

的截面比  $A/A^*$  与  $M_e$  的关系式代替完全气体喷管流动的关系式, 便可将式 (14) 中第二项积分的积分变量  $x$  变换为  $\xi = \frac{A}{A^*} = \left(\frac{r_w}{r^*}\right)^2$ , 再将  $\xi$  变换为  $M_e$ , 从而化得:

$$\begin{aligned} & \int_{x^*}^x \left(\frac{p_c}{p_0}\right)^{\frac{3\gamma_f-1}{2\gamma_f}} r_w^2 M_e^{\beta-1} dx \\ &= \frac{r^{*3}}{2 \sin \alpha} \left(\frac{a_{c,q}^*}{a_f^*}\right)^{3/2} \left(\frac{p_c^*}{p_0}\right)^{\frac{3\gamma_f-1}{2\gamma_f}} \left(1 + \frac{\gamma_f-1}{2} \frac{a_{c,q}^{*2}}{a_f^{*2}}\right)^{\frac{3\gamma_f-3}{4(\gamma_f-1)}} \\ & \times \int_{\frac{a_{c,q}^*}{a_f^*}}^{M_e} \left(1 + \frac{\gamma_f-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{9-7\gamma_f}{4(\gamma_f-1)}} \left(M_e^{\beta-1.5} - \frac{1}{M_e^{3.5-\beta}}\right) dM_e \end{aligned} \quad (15)$$

取  $\bar{\beta} = 2.50$ , 则 (15) 式中第一项对任一  $\gamma_f$  均可积分. 对第二项被积函数  $f(M_e, \gamma_f) = \left(1 + \frac{\gamma_f-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{9-7\gamma_f}{4(\gamma_f-1)}} \frac{1}{M_e}$  以  $\gamma_f = 1.400$  为左端点在  $\gamma_f = 1.400$  至 1.500 之间对不同  $\Delta M_e$ 、 $\Delta \gamma_f$  展开并作近似逼近后, 可得到  $f(M_e, \gamma_f)$  在不同马赫数时的近似逼近函数为  $\bar{f}(M_e, \gamma_f)$ :

$$\bar{f}(M_e, \gamma_f) = \begin{cases} \frac{1.080}{M_e} - 0.167[1 + 4.49(\gamma_f - 1.400)] & (1 \leq M_e \leq 2.5) \\ \frac{1.115}{M_e^{1.516+2.20(\gamma_f-1.400)}} - 0.016[1 + 6.25(\gamma_f - 1.400)] & (2.5 < M_e \leq 10) \\ 0 & (M_e > 10) \end{cases} \quad (16)$$

可证明当  $1 \leq M_e \leq 2.5$  时, 逼近误差  $(\bar{f} - f)/f < 2\%$ . 而当  $2.5 \leq M_e < 5$  时, 虽然  $(\bar{f} - f)/f \approx 4.4\%$ , 但由式 (15) 可见此时  $f$  的值对积分的贡献已很小, 从而可证明对积分产生的误差仍在 2% 以内.

将 (16) 代入式 (15) 并将表 1 对应于  $\gamma_{es} = 1.25$  的  $\eta$  值及 (15) 一并代入 (13), 再用音速关系、微分形式的欧拉运动方程及化学与振动冻结流下的能量方程等化简后可得到

$$\begin{aligned} \bar{n} = -\bar{A} & \frac{\left(1 + \frac{\gamma_f-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{7\gamma_f-9}{4(\gamma_f-1)}}}{M_e^2 - 1} \left\{ \frac{C}{\kappa} \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \left[ \varphi_1(\xi_0) + \frac{n_0}{C_{es} \bar{A}} \right] \right. \\ & \left. + \varphi_2(M_e, \gamma_f) - \varphi_3(M_e, \gamma_f) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$C = \left(\frac{a_{c,q}^*}{a_f^*}\right)^{-3/2} \left(\frac{p_c^*}{p_0}\right)^{-\frac{3\gamma_f-1}{2\gamma_f}} \left(1 + \frac{\gamma_f-1}{2} \frac{a_{c,q}^{*2}}{a_f^{*2}}\right)^{\frac{5-3\gamma_f}{4(\gamma_f-1)}} \quad (18)$$

$$C_{es} = \left(\frac{2}{\gamma_{es} + 1}\right)^{-\frac{3(\gamma_{es}+1)}{4(\gamma_{es}-1)}} \quad (\text{当 } \gamma_{es} = 1.25 \text{ 时, } C_{es} = 2.21) \quad (19)$$

$$\varphi_1(\xi_0) = 0.0163 + 0.4512 \ln \xi_0 + 0.08 \xi_0^{-2} \quad (20)$$

$$\varphi_2(M_e, \gamma_f) = \frac{4}{5-3\gamma_f} \left[ \left( 1 + \frac{\gamma_f-1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{5-3\gamma_f}{4(\gamma_f-1)}} - \left( 1 + \frac{\gamma_f-1}{2} \frac{a_{eq}^{*2}}{a_f^{*2}} \right)^{\frac{5-3\gamma_f}{4(\gamma_f-1)}} \right] \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(M_e, \gamma_f) &= 1.080 \ln \frac{2.5}{(a_{eq}^*/a_f^*)} + (0.883 - 0.75\gamma_f) \left( 2.5 - \frac{a_{eq}^*}{a_f^*} \right) \\ &+ \frac{0.507}{\gamma_f - 1.166} [2.5^{-2.2(\gamma_f-1.166)} - M_e^{-2.2(\gamma_f-1.166)}] \\ &+ (0.124 - 0.1\gamma_f) \left( M_e - \frac{a_{eq}^*}{a_f^*} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

进一步可解得动量厚度  $\theta$ 、排挤厚度  $\delta^*$  及边界层厚度  $\delta$  为:

$$\theta = \frac{T_e}{T_w} \left[ \frac{\bar{n} \nu_w}{du_e/dx} \left( 1 + \frac{\gamma_f-1}{2} M_e^2 \right)^{-1} \right]^{1/2} \quad (23)$$

$$\delta^* = \theta \left[ H_{ir} + \frac{\gamma_f-1}{2} M_e^2 (1 + H_{ir}) \right] \quad (24)$$

$$\delta = \theta \left[ \delta_{ir}/\theta_{ir} + \frac{\gamma_f-1}{2} M_e^2 (1 + H_{ir}) \right] \quad (25)$$

上列诸式中  $H_{ir}$  及  $\delta_{ir}/\theta_{ir}$  可用文献 [4] 的 Falkner-Skan 型流动的相似性剖面解求出。  $\delta_{ir}^*$  由  $\delta_{ir}^* = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{U}{U_e} + \beta \right) dY$  确定;  $\theta_{ir}$  由关系式  $\theta_{ir} = \int_0^\infty \frac{U}{U_e} \left( 1 - \frac{U}{U_e} \right) dY$  确定;  $\delta_{ir}$  为对应于不可压缩平面上  $\frac{U}{U_e} = 0.995$  时的  $\eta = Y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U_e}{\nu_0 X}}$  值;  $n_0$  的值可取  $N(s_w, \bar{n}) = 0$  时的  $n$  值, 对应  $\beta = 1$  与  $s_w = \text{常数}$  时的交点。

一般地面模拟风洞的高焓流喷管均采用水冷铜壁面, 壁温满足  $T_w \leq 400\text{K}$ ; 当总温  $T_0$  为 2000K 至 8000K 时, 则有  $-0.95 \leq \frac{T_w}{T_0} - 1 \leq -0.80$ , 亦即满足关系式

$$-1 < s_w \leq -0.80 \quad (26)$$

此时由普适关系曲线可求得相应的  $\bar{B}$  值满足

$$2.36 < \bar{B} \leq 2.53 \quad (27)$$

由式 (11) 可见积分号内外  $\bar{B}$  是相抵消的, 故可设想  $\bar{B}$  的变化不会导致  $\bar{n}$  值的大幅度改变。表 2 给出了同一喷管参数下,  $\bar{B}$  取 2.50 和 2.30 两不同值时所引起的  $\bar{n}$ 、 $\theta$  及  $\delta^*$  的差

表 2  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  对结果的影响

$D^* = 8\text{mm}, \alpha = 7.5^\circ, \varphi = 22.5^\circ, r_0/r^* = 6, \gamma_f = 1.455$						
$M_e$	序 号	$\bar{B}$	$\bar{A}$	$\bar{n}_1/\bar{n}_2$	$\theta_1/\theta_2$	$\delta_1^*/\delta_2^*$
7	1	2.50	0.361	0.902	0.950	0.968
	2	2.30	0.327			
5	1	2.50	0.361	0.885	0.941	0.958
	2	2.30	0.327			
2.5	1	2.50	0.361	0.840	0.916	0.946
	2	2.30	0.327			

异。在本文高焓、冷壁面的实际条件下， $\bar{B}$  值偏近不等式右端，故取  $\bar{B} = 2.50$  后对  $\bar{n}$ 、 $\theta$  及  $\delta^*$  引起的实际误差要比表 2 小得多。此外，对动量积分方程的相似性解的数值积分数据的分析，可发现  $\bar{B}$  增大的同时亦将导致  $\bar{A}$  增大，对  $\bar{n}$  值的改变恰起抵消作用。由上可见， $\bar{B} = 2.50$  的取法合理。

### 四、结 论

本文将高焓高 M 数喷管流无粘流场的喉部上游区域视为平衡流，喉部下游区域视为化学与振动冻结流，并在  $N_2$  振动温度松弛的测量数据分析基础上视边界层内亦为化学与振动冻结流，对边界层外缘采用了冻结流下的等熵关系，引进了修正因子  $\frac{p_0}{p^*} \frac{\rho_c^*}{\rho_0} \frac{T_c^*}{T_0}$  修正了压力梯度相关数，通过顺压梯度普适关系线化近似法，在冷壁面条件  $\bar{n}$  为单值情况下，用量级分析、无量纲 M 数的积分变换，以被积函数的分段逼近方法最终导出了  $\bar{n}$ 、 $\delta^*$  和  $\delta$  的显函数表达式。

本文结果表明，当  $p_0$  在 1—5 大气压、 $H_0$  在 2000—5000 大卡/千克或更大范围内变化时，喉部上游压力梯度相关数  $\bar{n}$  的计算可采用  $\gamma_{ex} = 1.25$  或相应的等熵指数的完全气

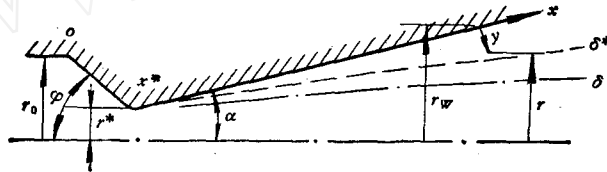


图 1 喷管几何参数

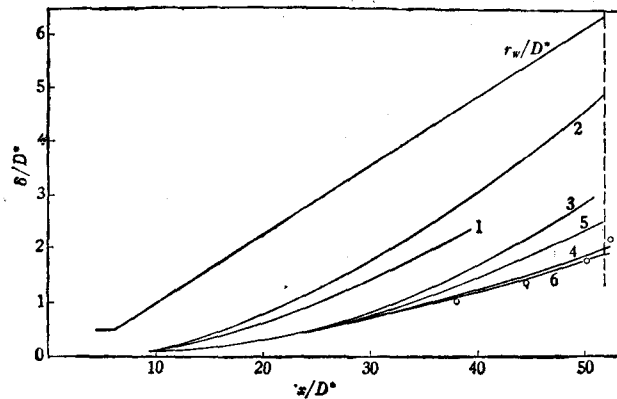


图 2 边界层排挤厚度  $\delta^*$  增长情况

空 气  
 $T_0 = 500^\circ\text{K}$   
 $p_0 = 1.16\text{atm}$   
 $T_w = 350^\circ\text{K}$   
 $r = 1.455$   
 $Z = 1.180$

0 实验数据  
 1, Pohlhausen 能量积分  
 2, Pohlhausen 动量积分  
 3, Beckwith-Cohen 方法  
 4, Cohen-Reshotko 方法  
 5, 文献 [1] 修正法  
 6, 本文 (17)---(25) 式

体流动来“等效”；对喉部下游  $\bar{n}$  的计算虽然产生了被积函数逼近误差约 2%，但因修正了等熵关系，使本文公式的计算结果在喷管出口处仍能更接近实验值。例如对  $T_0=5000\text{K}$ ， $p_0=1.16$  大气压的空气，在喷管喉部下游  $D/D^*=9$  的截面处，仅等熵关系修正一举，便可使  $\theta$  和  $\delta^*$  的偏高值纠正 4.2%。表 3 列出了具体的喷管计算举例，图 2 给出了本文公式的结果与其他理论结果及国外发表的实验结果比较。

表 3 排挤厚度  $\delta^*$  的最后结果比较

$D^* = 8\text{mm}$ , $\alpha = 7.5^\circ$ , $\varphi = 22.5^\circ$ , $r_0/r^* = 6$ , $r_f = 1.455$ , $s_w = -0.93$					
排 挤 厚 度 (厘米)	$x/D^*$	38.1	44.5	50.1	52.4
	实验测量值	0.845	1.14	1.42	1.72
	Cohen-Reshorko 方法的 IBM7094 计算机结果	0.903	1.19	1.47	1.58
	本文公式(16)等	0.880	1.17	1.41	1.54

由表 3 上的结果可见，在喷管出口截面下游的点，公式计算结果与实验结果偏差较大，这是自然的。因为此时边界条件已由无滑移的壁面条件变为自由射流的边界条件，这部分流场应当采用研究自由剪切层的非相似性方法来计算<sup>[16]</sup>，本文的结果已不复适用。

本文公式可用于高焓、高 M 数冷等温壁锥喷管的边界层计算。由于避免了一般的积分表达式使计算大为简化，故尤其适用于此类喷管的工程设计。一般高焓低密度电弧风洞喷管及低密度、低温等离子体流喷管采用水冷铜壁面即属此例。

作者对卞荫贵先生提供的指导与帮助表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] Быркин, А. Г., *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. физ.* **10**, 1(1970), 124—131.
- [2] David, L. Whitfield and Chark H. Lewis, *J. of Spacecraft and rockets*, **7** (1970), 462.
- [3] Cohen, C. B. and Reshotko, E., *NACA Report*, 1294 (1956).
- [4] Luce, R., Gregorek, G. M. and Lee, J. D., *USAF ARL Report*, 65—112.
- [5] Bechwith, I. E., Cohen, C. B., *NASA TND-625* (1961).
- [6] Clutter, D. W., Smith, A. M. O., *Douglas Report*, LB 31088 (1964).
- [7] Smith, A. M. O., Clutter, D. W., *AIAA J.*, **4**(1965), 639.
- [8] Jaffe, N. A., Lind, R. C., Smith, A. M. O., *AIAA J.* **9**(1967), 1563.
- [9] Petrie, S. L., *NASA-CR-96152* April (1968).
- [10] James, T. Van Kuren. *AFFDL-TR-74-59*.
- [11] Thwaites, B., *Aero. Quarterly*, **1**, **11**(1949), 245—280.
- [12] Кочин, Н. Е. и Лошьянский, Л. Г., *ДАН СССР*, **36**, 9(1942).
- [13] Probstein, R. F., Elliott, D., *J. Aeronaut. Sci.* **23**(1956), 208.
- [14] Stewartson, K., *Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A* **200**, (1949), 84—100.
- [15] Mangler, W., *Zeitschr. f. Angew. Math. and Mech.* **28**(1948), 97.
- [16] Lykoudis, P. S., *AIAA J.*, **4**(1966), 577.



## AN ANALYSIS OF LAMINAR BOUNDARY LAYER IN HIGH ENTHALPY NOZZLE FLOWS

Lu Zhi-yun

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

### Abstract

This paper presents a simple formula for calculating the displacement thickness, momentum thickness and physical thickness of laminar boundary layer in high enthalpy flows in conic nozzles at hypersonic Mach numbers. The inviscid flow upstream of the throat is assumed to be in chemical and vibrational equilibrium and downstream of the throat the flow is frozen. The present expressions for  $\delta^*$ ,  $\theta$  and  $\delta$  are given as explicit functions of the geometric dimensions of the nozzle and the parameters of the inviscid flow field at the throat and at the point considered, instead of an integral expression. Therefore it is particularly suitable for the design of this kind of nozzle. Comparison between the result from the present formula and published experimental data shows that the agreement is satisfactory.