

强聚焦加速器中带电粒子横向运动 稳定性的线性理论

朱如曾

(中国科学院力学研究所)

提要 本文对强聚焦加速器中带电粒子运动的稳定性乃至一般的 N 维周期性线性系统的稳定性给出用转移矩阵的特征值表示的稳定性充分必要条件。对强聚焦加速器中带电粒子的横向运动,则进一步给出用转移矩阵的元表示的稳定性充分必要条件,并绘制了稳定性图。因此,横向运动的稳定性问题在线性理论范围内获得原则上的完整解决。

一、引言

强聚焦方案^[1],即周期性的交变梯度聚焦方案在同步加速器和其它回旋加速器及直线加速器中被广泛地采用,在带电粒子的输送通道上也常被采用。这种聚焦方案一个主要的问题是,带电粒子在运动过程中是受限于一定的范围内,还是发散的,这就是带电粒子的横向运动的稳定性问题。

不考虑空间电荷效应^[2-5],并取旁轴近似,可以用转移矩阵来表示粒子的横向运动。设沿带电粒子透镜的轴线的坐标为 z ,横向运动坐标为 x 和 y ,对应的广义动量为 p_x 和 p_y 。我们按加速器中场的周期来选取参考平面 $1, 2, \dots, k, k+1, \dots$ 。在旁轴近似下有

$$\begin{bmatrix} p_{x_{k+1}} \\ p_{y_{k+1}} \\ x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_k \begin{bmatrix} p_{x_k} \\ p_{y_k} \\ x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

其中, \mathbf{A}_k 为与 k 有关的 4×4 阶矩阵。如果我们把粒子因相对论效应而引起的质量增加以及辐射阻尼^[6,7]的作用当作缓变因素,则对于研究运动的稳定性问题来说,可以把 \mathbf{A}_k 当作与 k 无关,并记为 \mathbf{A} ,因此

$$\begin{bmatrix} p_{x_k} \\ p_{y_k} \\ x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

如果我们还要考虑纵向运动的稳定性,就涉及 6×6 阶矩阵。本文主要讨论横向运动的稳定性问题。当加速器具备一定的对称性时, x 和 y 方向是可以分别考虑的,这时只涉及

本文于1979年6月18日收到。

到 2×2 阶矩阵, 这一情况下的稳定性问题已经解决^[1]. 本文对横向运动稳定性的考虑主要着眼于 x 和 y 方向有耦合, 因而不能分别考虑的情况. 所以我们的重点是 4×4 阶的矩阵. 但是, 对 6×6 阶和更一般的 $N \times N$ 阶情况, 也能得到用矩阵的特征值来表示的稳定性判据. 所以下面先就 $N \times N$ 阶情况进行讨论, 然后再转到 4×4 阶矩阵上来.

二、 $N \times N$ 系统的稳定性条件

N 维周期性线性系统的第 n 级输出 \mathbf{x}_n 与输入 \mathbf{x}_0 之间有关系式

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{D}^n \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

其中, \mathbf{D} 称为系统的矩阵, 而

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} \xi_n^{(1)} \\ \xi_n^{(2)} \\ \vdots \\ \xi_n^{(N)} \end{bmatrix}$$

其中, $\xi_n^{(i)} (i = 1, 2, \dots, N)$ 在实数域上取值. 事实上后面的证明也适用于 $\xi_n^{(i)}$ 在复数域上取值的情况, 不过我们为确定起见, 认定 $\xi_n^{(i)}$ 是在实数域上取值的. 下面给出稳定性定义:

定义 用式 (2.1) 表示的 N 维周期性线性系统 (以下简称为 N 维系统) 称为是稳定的, 如果对任意给定的正实数 L , 存在正实数 M , 使当

$$|\xi_0^{(i)}| < M \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

时, 成立

$$|\xi_n^{(i)}| < L \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad n = 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

由此定义可以证明:

定理 1 矩阵为 \mathbf{D} 的系统稳定的充分必要条件是 \mathbf{D}^n 的矩阵元有界.

证明 从略.

为了得到进一步的稳定性条件我们先证引理:

引理 设 k 阶 Jordan 块 \mathbf{H}_k 的特征根为 λ , 则当 n 取一切自然数时, \mathbf{H}_k^n 的矩阵元的情况可分为以下四类:

- (i) 若 $|\lambda| < 1$, 则矩阵元有界;
- (ii) 若 $|\lambda| > 1$, 则矩阵元无界;
- (iii) 若 $|\lambda| = 1$ 而且 $k = 1$, 则矩阵元有界;
- (iv) 若 $|\lambda| = 1$ 而且 $k > 1$, 则矩阵元无界.

证明 由 \mathbf{H}_k 的形式可得

$$\mathbf{H}_k^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & & & & \\ C_n^1 \lambda^{n-1} & \lambda^n & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_n^{k-1} \lambda^{n-k+1} & C_n^{k-2} \lambda^{n-k+2} & \dots & \dots & \lambda^n \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

其中

$$C_n^k = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{当 } k \leq n \\ 0, & \text{当 } k > n. \end{cases} \quad (2.4)$$

在式 (2.3) 中令 $n \rightarrow \infty$, 并分析式 (2.4) 即得:

- (i) 若 $|\lambda| < 1$, 则矩阵元全部趋于零;
- (ii) 若 $|\lambda| > 1$, 则对角线及左下三角区矩阵元趋于无穷大;
- (iii) 若 $|\lambda| = 1$, 而且 $k = 1$, 则矩阵元的模恒为 1;
- (iv) 若 $|\lambda| = 1$, 而且 $k > 1$, 则左下三角区的矩阵元趋于无穷大.

故得引理中的结论.

以后称“矩阵元有界”的矩阵为“有界矩阵”.

定理 2 若 $N \times N$ 矩阵 \mathbf{D} 的特征根集为 $\{\lambda_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, p; p \leq N$) 若满足如下条件之一, 则系统是稳定的, 否则是不稳定的:

- (i) 所有特征根的模都小于 1;
- (ii) 虽然有些特征根的模等于 1, 但不是多重根, 而其余特征根的模小于 1;
- (iii) 虽然有 t 个特征根 λ_R ($R = 1, 2, \dots, t$) 的模既为 1, 又各有重数 $\mu_R > 1$, 但对于这些特征根, 特征矩阵的秩等于 $(N - \mu_R)$, 而其余特征根的性质与 (ii) 相同.

证明 对矩阵 \mathbf{D} , 必存在复数域上满秩矩阵 \mathbf{V} , 将 \mathbf{D} 化为 Jordan 型:

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{V} = \mathbf{H}_{k_1} + \mathbf{H}_{k_2} + \dots + \mathbf{H}_{k_m} \\ (m \geq p; k_1 + k_2 + \dots + k_m = N)$$

其中每一子块 \mathbf{H}_{k_i} 都是 Jordan 块. 于是

$$\mathbf{H}^n = \mathbf{H}_{k_1}^n + \mathbf{H}_{k_2}^n + \dots + \mathbf{H}_{k_m}^n \quad (2.5)$$

先证条件的充分性:

- (i) 所有特征根的模小于 1, 由式 (2.5) 和引理知 \mathbf{H}^n 有界. 因为

$$\mathbf{D}^n = \mathbf{V}\mathbf{H}^n\mathbf{V}^{-1}$$

所以 \mathbf{D}^n 有界. 根据定理 1, 系统稳定.

- (ii) 由引理的 (i) 和 (iii) 知 \mathbf{H}^n 有界, 所以 \mathbf{D}^n 有界, 故系统稳定.

(iii) 对于重数为 $\mu_R > 1$ 的特征根 λ_R , 因为 λ_R 所对应的特征矩阵的秩为 $(N - \mu_R)$, 故相应的本征向量构成 μ_R 维子空间. 所以相应的 Jordan 块是 1×1 阶的, 又已知 $|\lambda_R| = 1$, 故由引理 1 的第 (iii) 项知, 这种 Jordan 块的 n 次方有界. 其余的 Jordan 块属于情况 (ii), 故其 n 次方也有界, 所以 \mathbf{H}^n 有界, 因此 \mathbf{D}^n 有界, 系统稳定.

下面证必要性.

假定系统稳定, 由定理 1, \mathbf{D}^n 有界, 故 \mathbf{H}^n 有界, 即式 (2.5) 右边各项均有界. 再由引理可知, \mathbf{H}_{k_i} 只有两种情况:

- (1) $|\lambda| < 1$;
- (2) $|\lambda| = 1$, 但 $k_i = 1$

如果 (2) 确实出现, 则模为 1 的特征根所对应的 Jordan 块都为 1×1 阶的. 所以这些特征根要么是单重根, 要么对于这些特征根 (λ_R), 特征矩阵的秩等于 $(N - \mu_R)$, 而 μ_R

是 λ_R 的重数. 故 \mathbf{D} 必满足定理中的 (ii) 和 (iii) 两项之一.

如果 (2) 不出现, 即所有 Jordan 块全是情况 (1) 则定理中的 (i) 项得到满足.

定理 3 上述定理 2 的条件 (iii) 可改为

$$f(\mathbf{D}) / \prod_{i=1}^t (\mathbf{D} - \lambda_i \mathbf{I})^{\mu_i - 1} = 0 \quad (2.6)$$

其中, $f(\lambda)$ 是 \mathbf{D} 的特征多项式, t 表示重数 μ_i 大于 1 的不同的多重根的个数.

证明 定理 2 的条件 (iii) 表示, 与多重根 λ_i 对应的 Jordan 块是一阶的. 此即 \mathbf{D} 的最小多项式一定能除尽 $f(\lambda) / \prod_{i=1}^t (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i - 1}$. 而这又等价于式 (2.6).

三、 x 和 y 方向可以分离的情况

下面我们就加速器中 x 方向和 y 方向的运动是可分离的情况导出用矩阵元表示的稳定性充分必要条件. 这些条件在其他著作中已有过^[1], 但是为了完整起见, 仍采用本文的一般定理来推导一下.

当 x 和 y 可分离时, 矩阵变为两个 2×2 矩阵的直接和. 令矩阵为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

其中, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为实数. 特征方程为

$$\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + |\mathbf{D}| = 0 \quad (3.2)$$

下一节将说明, 对于强聚焦加速器来说, $|\mathbf{D}| = 1$, 所以式 (3.2) 化为

$$\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + 1 = 0 \quad (3.3)$$

若 $|\alpha + \delta| < 2$, 则 $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$, θ 为实数, 且 $\theta \neq 0, \pi$. 由定理 2 的 (ii) 可知系统稳定.

若 $|\alpha + \delta| > 2$, 则必有一根之模大于 1, 系统不稳定.

若 $|\alpha + \delta| = 2$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, 此时, 由定理 2 的 (iii) 可知稳定条件还要求 $\begin{bmatrix} \alpha \mp 1 & \beta \\ \gamma & \delta \mp 1 \end{bmatrix}$ 的秩为 0, 故得

$$\beta = \gamma = 0, \quad \alpha = \delta = \pm 1$$

于是得

定理 4 行列式为 1 的 2 维系统的稳定性充分必要条件是

$$|\text{Tr} \mathbf{D}| < 2 \quad \text{或} \quad \mathbf{D} = \pm \mathbf{I}, \quad (3.4)$$

其中 $\text{Tr} \mathbf{D}$ 表示 \mathbf{D} 的迹, \mathbf{I} 为单位矩阵.

四、 x 和 y 不能分离的情况

在强聚焦加速器中, 当 x 和 y 方向有耦合时, 我们面临的矩阵 \mathbf{D} 是 4×4 阶的, 而且矩阵元全是实数. 因为带电粒子运动服从正则方程, 根据拉格朗日不变量的考虑, 可以证明, \mathbf{D}' 和 \mathbf{D}^{-1} 是相似的, 所以 \mathbf{D} 和 \mathbf{D}^{-1} 有相同的特征多项式. 故特征方程

$$f(\lambda) = 0$$

是倒数方程, 即如果 λ_1 是根, 则 λ_1^{-1} 也是根. 所以特征方程可写成

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + 1 = 0 \quad (4.1)$$

其中

$$a = c \quad (4.2)$$

下面为了普遍起见, 先不利用 (4.2).

定理 5 行列式为 1 的 4 维系统的稳定性充分必要条件是满足如下几组条件中的任一组:

$$(I) \begin{cases} a = c \\ \left(\frac{a^2}{4} + 2\right) > b > (2|a| - 2) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$(II) \begin{cases} a = c \\ -4 < a < 0 \\ b = -2(a + 1) \\ \mathbf{D}^3 + (a + 1)\mathbf{D}^2 - (a + 1)\mathbf{D} - \mathbf{I} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$(III) \begin{cases} a = c \\ 0 < a < 4 \\ b = 2(a - 1) \\ \mathbf{D}^3 + (a - 1)\mathbf{D}^2 + (a - 1)\mathbf{D} + \mathbf{I} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$(IV) \begin{cases} a = c = 0 \\ b = -2 \\ \mathbf{D}^2 = \mathbf{I} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$(V) \begin{cases} a = c \\ |a| < 4 \\ b = \frac{a^2}{4} + 2 \\ \mathbf{D}^2 + \frac{a}{2}\mathbf{D} + \mathbf{I} = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$(VI) \mathbf{D} = \pm \mathbf{I}, \quad \text{即 } a = c = \mp 4, \quad b = 6 \quad (4.8)$$

其中, \mathbf{I} 为 4×4 阶单位矩阵; $a = -\text{Tr}\mathbf{D}$; $b = \mathbf{D}$ 的所有 2 阶主子式之和; $-c = \mathbf{D}$ 的所有 3 阶主子式之和.

证明 \mathbf{D} 的特征方程是 (4.1), 但并不要求 $a = c$. 因为常数项为 1, 所以特征根要么模全为 1, 要么必有模大于 1 的特征根. 根据定理 2, 后一情况系统不稳定. 故为了找出使系统稳定的所有情况, 只需考虑特征根的模全为 1 的情况.

由于方程 (4.1) 是实系数的, 故共轭复数根成对出现. 常数项为 +1, 故实数根 +1 和 -1 也是成对出现的. 所以四个根可表示为

$$\lambda_1 = e^{i\theta_1}, \quad \lambda_2 = e^{-i\theta_1}, \quad \lambda_3 = e^{i\theta_2}, \quad \lambda_4 = e^{-i\theta_2} \quad (4.9)$$

其中 θ_1 和 θ_2 为实数.

把式 (4.9) 代入方程 (4.1) 定出

$$a = c = -2(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \tag{4.10}$$

$$b = 2 + 4\cos\theta_1\cos\theta_2 \tag{4.11}$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{1}{4}[-a + \sqrt{a^2 - 4b + 8}] \\ \cos\theta_2 &= \frac{1}{4}[-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8}] \end{aligned} \right\} \tag{4.12}$$

分析式(4.12)得到(1)–(6)分别对应着如下情况:

(1) 有 4 个模全为 1 的互不相等的特征根。

(2) 有 2 个不相等的模为 1 的根, 还有一个二重根 $\lambda = 1$, 但此时有

$$f(\mathbf{D})/\mathbf{D} - \mathbf{I} = \mathbf{D}^3 + (a+1)\mathbf{D}^2 - (a+1)\mathbf{D} - \mathbf{I} = 0$$

(3) 有 2 个不相等的模为 1 的根, 还有一个二重根 $\lambda = -1$, 但此时

$$f(\mathbf{D})/\mathbf{D} + \mathbf{I} = \mathbf{D}^3 + (a-1)\mathbf{D}^2 + (a-1)\mathbf{D} + \mathbf{I} = 0$$

(4) 有 2 个不同的二重根 $\lambda = \pm 1$, 但此时又有

$$f(\mathbf{D})/(\mathbf{D} + \mathbf{I})(\mathbf{D} - \mathbf{I}) = \mathbf{D}^2 - \mathbf{I} = 0$$

(5) 有 2 个不同的二重根 $\lambda = e^{\pm i\theta}$, ($\theta \neq 0, \pi$) 但又有

$$f(\mathbf{D})/(\mathbf{D} - e^{i\theta}\mathbf{I})(\mathbf{D} - e^{-i\theta}\mathbf{I}) = \mathbf{D}^2 + \frac{a}{2}\mathbf{D} + \mathbf{I} = 0$$

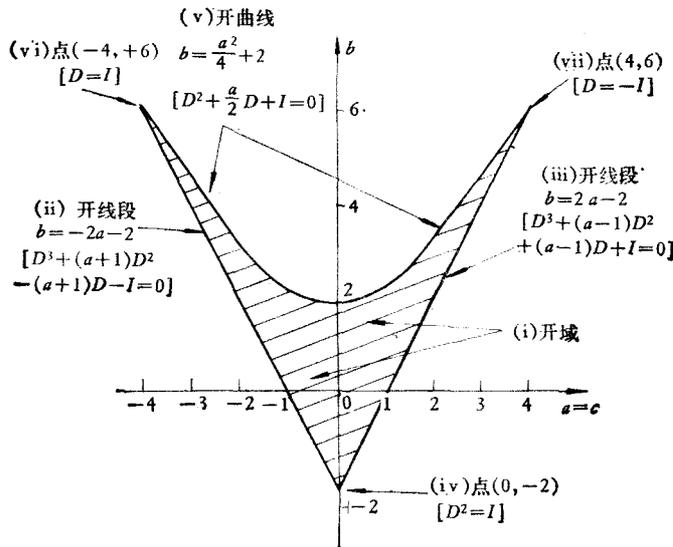
(6) 有一个四重根 $\lambda = \pm 1$, 但同时

$$f(\mathbf{D})/(\mathbf{D} \mp \mathbf{I})^3 = \mathbf{D} \mp \mathbf{I} = 0$$

按定理 2 和定理 3, 以上六种情况全是稳定的。不满足以上条件都不稳定。

从定理 5 可知, $a = c$ 是稳定的必要条件。幸好, 在强聚焦加速器中, 必有 $a = c$, 这就是式(4.2)。

在稳定性图中, 阴影区是稳定的, 而边界上的点则须附上相应的条件才是稳定的。所



稳定性图

需附上的条件也示于图中方括号内。

本文曾得到中国科学院力学研究所谈镐生教授、卞荫贵教授和中国科学院高能物理研究所徐建铭教授的指导和帮助, 谨此致谢。

参 考 文 献

- [1] 徐建铭, 加速器原理, 科学出版社 (1974).
- [2] Peterson, G. W. et al., *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **16**, 3 (1969), 214.
- [3] Mavrogenes, G. et al., *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **20**, 3-4 (1973), 478.
- [4] Olcese, J. J. et al., *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **20**, 3-4 (1973), 895.
- [5] Mavrogenes, G. et al., *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **20**, 3-4 (1973), 919.
- [6] 朱如曾, 物理, **8**, 3(1979), 216.
- [7] Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **75** (1949), 1912.

LINEAR STABILITY THEORY OF TRANSVERSE MOTION OF CHARGED PARTICLE IN A STRONG-FOCUSING ACCELERATOR

Zhu Ru-zeng

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

Sufficient and necessary conditions of stability in terms of eigenvalues of the transfer matrix are given for the motion of a charged particle in a strong-focusing accelerator. They are also valid for a general periodic linear system in N dimensions. Furthermore, the sufficient and necessary conditions of stability in terms of elements of the transfer matrix are derived for the transverse motion of a charged particle in a strong-focussing accelerator, and the stability diagram is also plotted. Thus, the problem of the stability of transverse motion is solved in principle within the limit of linear theory.