

绕圆柱体跨声速流场

林同骥 贾振学

(中国科学院力学研究所)

提要 本文将保角曲线坐标方法应用于绕物体外部的跨声速流动。文中讨论了圆柱体跨声速绕流,计算了来流马赫数 M_∞ 为亚临界,超临界和 M_∞ 为 1 的流场。给出了不同来流马赫数下柱面马赫数和压力分布,柱面前端中心流线上马赫数分布。给出了超临界绕流时不同来流马赫数下的声速线和来流马赫数 M_∞ 从 0.2, 0.3 到 1 的等马赫数线分布。本文部分结果与已有的理论结果进行了比较。本方法计算简单,精度高,是计算厚体跨声速绕流的有效方法,适用于不同形状的柱体和机翼的跨声速绕流。

符 号 表

a 声速,式(1)	η 保角曲线坐标,式(6)
b 圆柱半径或特征长度,式(1)	η_b 流场计算边界,式(15)
$f(\xi)$ 保角曲线坐标变换,式(6)	η_c 特征边界,式(14)
$g(\xi)$ 流量关联函数,式(10)	ξ 保角曲线坐标,式(6)
h_1, h_2 拉梅系数,式(2)	ρ 气体密度,式(3)
$i = \sqrt{-1}$	ϕ 位函数,式(5)
M 马赫数,式(4)	ψ 流函数,式(5)
p 压力,式(3)	θ 柱面角,式(19),图3
T 气体绝对温度,式(2)	下标:
u ξ 方向速度,式(2)	* 流速等于当地声速的临界参数
v η 方向速度,式(2)	∞ 自由来流参数
x 直角坐标,式(6)	x 对 x 的偏导数
y 直角坐标,式(6)	y 对 y 的偏导数
$z = x + iy$, 式(6)	η 对 η 的偏导数
γ 比热比,式(3)	ξ 对 ξ 的偏导数
$\zeta = \xi + i\eta$, 式(6)	

一、引 言

绕物体外部跨声速流动的研究主要是从本世纪四十年代以后开始的,当时飞机的飞行速度开始接近声速。最近十年,为了增加大型运输机的载荷量和提高战斗机和巡航导弹的性能,跨声速流动的研究引起了人们的重视。由于电子计算机的发展,使得速度图法^[4-7],松弛法^[8-13],时间相关法^[16-19]和有限元法^[20-23]等在求解跨声速问题中取得了很大进展。但是当物体比较厚时,物体对流场的扰动很大,一般小扰动方法已不适用。以圆柱

本文于1980年4月14日收到。

体跨声速绕流为例, 长期以来是人们关心的问题, 许多作者采用不同方法研究了这个问题^[15,18,22,24-30]。但由于受到所采用方法的限制, 只给出某些特定来流条件下的绕流结果。

本文采用保角曲线坐标方法^[31]讨论了圆柱体绕流, 分别计算了来流马赫数 M_∞ 为亚临界, 超临界和 1 的绕圆柱体流场, 给出了圆柱体绕流的系统结果和流场全貌。本文部分结果与已有的结果进行了比较。本方法计算简单; 精度好, 适用于不同形状的柱体和机翼的跨声速绕流。

二、保角曲线坐标下流函数方程

考虑理想气体二维定常无旋等熵流动, 根据符号表中的定义引进无量纲, 以相应符号上方加“—”代表。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x/b, & \bar{u} &= u/a_*, & \bar{a} &= a/a_*, & \bar{T} &= T/T_* \\ \bar{y} &= y/b, & \bar{v} &= v/a_*, & \bar{p} &= p/p_*, & \bar{\phi} &= \phi/a_*b \\ \bar{z} &= \bar{x} + i\bar{y}, & \bar{q} &= (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2}, & \bar{\rho} &= \rho/\rho_*, & \bar{\psi} &= \psi/a_*\rho_*b \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

文中的讨论全部为无量纲量, 为了方便略去“—”。

在任意正交曲线坐标 (ξ, η) 下, 质量守恒动量守恒和能量守恒关系可以写成^[32]

$$\left(\frac{\rho u}{h_2} \right)_\xi + \left(\frac{\rho v}{h_1} \right)_\eta = 0, \quad \left(\frac{v}{h_2} \right) - \left(\frac{u}{h_1} \right)_\eta = 0, \quad T = \frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} q^2 \quad (2)$$

其中 $h_1 = (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{-1/2}$, $h_2 = (x_\eta^2 + y_\eta^2)^{-1/2}$ 代表坐标 (ξ, η) 与直角坐标 (x, y) 的变换拉梅系数。理想气体的状态方程, 等熵关系, 声速 a 与温度 T 的关系分别为

$$p = \rho T, \quad p = \rho^\gamma, \quad a = T^{1/2} \quad (3)$$

由式(2)和式(3)得到密度 ρ , 马赫数 M 与速度 q 的关系分别为

$$\rho = \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} q^2 \right) \frac{1}{\gamma-1}, \quad M = q / \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} q^2 \right)^{1/2} \quad (4)$$

由质量守恒关系式(2a)¹⁾和动量守恒关系式(2b)定义流函数 ψ 和位函数 ϕ 分别为

$$\psi_\xi = -\frac{\rho v}{h_1}, \quad \psi_\eta = \frac{\rho u}{h_2}, \quad \phi_\xi = \frac{u}{h_1}, \quad \phi_\eta = \frac{v}{h_2} \quad (5)$$

当 $h_1 = h_2$ 时, 即坐标 (ξ, η) 与 (x, y) 之间成保角关系, 根据复变函数理论^[33] $\xi\eta$ 与 xy 之间存在下列关系:

$$z = f(\zeta) \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad z = x + iy \quad h_1 = h_2 = h = \frac{d\zeta}{dz} \quad (6)$$

其中 h 是 ζ 面相对 z 面的放大因子。在保角曲线坐标下, 根据式(4a)¹⁾和(5)得到 ρ, u, v 与 ψ 的关系式:

$$\rho^{\gamma+1} - \frac{\gamma+1}{2} \rho^2 + \frac{\gamma-1}{2} h^2 (\psi_\xi^2 + \psi_\eta^2) = 0, \quad u = \frac{h\psi_\eta}{\rho}, \quad v = \frac{h\psi_\xi}{\rho} \quad (7)$$

利用 $h_1 = h_2 = h$ 和式(4a), 由式(5)消去 $u, v, \phi_\xi, \phi_\eta$ 及 ρ_ξ, ρ_η 得到保角曲线坐标下流函数方程:

$$(a^2 \rho^2 - h^2 \psi_\eta^2) \psi_{\xi\xi} + 2h^2 \psi_\xi \psi_\eta \psi_{\xi\eta} + (a^2 \rho^2 - h^2 \psi_\xi^2) \psi_{\eta\eta} + h(\psi_\xi^2 + \psi_\eta^2)(h_\xi \psi_\xi + h_\eta \psi_\eta) = 0 \quad (8)$$

1) 括号内数字后的字母代表同一组方程中的公式顺序。

三、简化流函数方程和解

在二维流动中,以相应的不可压缩位势流的流线和等位线为保角曲线坐标,在这种坐标下可以认为 $u \gg v$ 或者说 $|\phi_\eta| \gg |\phi_\xi|$. 根据式 (8), 略去包含 ϕ_ξ 及其对 ξ, η 的偏导数的项,得到简化流函数方程:

$$a^2 \rho^2 \phi_{\eta\eta} + h h_\eta \phi_\eta^3 = 0 \quad (9)$$

根据式 (7a) 略去 ϕ_ξ^2 , 选取保角曲线坐标 $\eta = 0$ 为零流线. 由式 (4a) 得到式 (9) 的流函数 $\phi(\xi, \eta)$ 解的一般形式和速度 $q(\xi, \eta)$ 为^[31]:

$$\left. \begin{aligned} \phi(\xi, \eta) &= \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} g(\xi) \int_0^\eta \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} h^2(\xi, \eta) g^2(\xi) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} d\eta \\ q(\xi, \eta) &= h(\xi, \eta) g(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式 (10) 中, $h(\xi, \eta)$ 是坐标的已知函数, 唯一未知的量 $g(\xi)$ 由来流条件和边界条件确定.

四、边界条件

采用数值方法计算绕物体外部流动问题, 一般只能计算有限空间. 因此, 如何选取远处计算边界是个重要问题. 对于薄翼或细长体, 物体对流场的扰动范围很小, 只要离开物体一定距离就可以认为满足了无限远条件. 例如, Emmons^[34] Murman 和 Cole^[8] 等人计算薄翼绕流时, 将无限远边界条件取为离开物体几倍弦长的直线. Chan 等人^[20] 将包围物体的流场分成近区和远区, 在近区采用较细的网格, 远区采用较疏的网格, 两个区域的交接处采用匹配连接. 对于厚体, 物体对流场的扰动范围很大, 在跨声速情况更是如此, 无论选取直线或区域包围线为远场计算边界, 这条直线或包围线都要离开物体非常远, 这为数值计算带来很大困难.

考虑到离开物体越远, 可压缩流动的流线与相应的不可压缩流动的流线差别越小, 因此选取离开物体一定距离的不可压缩流动的流线为跨声速流场的计算边界是一种较好的近似方法. 在本文采用的保角曲线坐标下, 这条边界是一条坐标线, $\eta = \eta_b$, 这在计算中是很方便的. 但要注意到, 对于给定物体, 从计算边界 $\eta = \eta_b$ 到零流线 $\eta = 0$ 之间存在一个最窄截面. 以圆标为例, 这一最窄截面出现在 $\xi = 0$ 上, 即 y 轴. 这一关系用数学式表达可写作, $y(0, \eta) - y(0, 0) \leq y(\xi, \eta) - y(\xi, 0)$. 此外, 从无限远处 $\xi = -\infty$ 均匀来流的情况看, 通过 $\eta = 0$ 到 $\eta = \eta_b$ 之间的流量 ϕ_b 为 $(\rho, u)_\infty \eta_b$, 因此可以作为流场计算边界 η_b 的必要条件是上述来流流量 ϕ_b 能在 $\xi = 0$ 截面内通过. 利用式 (7) 和 $\xi = 0$ 条件, 这一关系可写为:

$$\left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} g(0) \int_0^{\eta_b} \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} h^2(0, \eta) g^2(0) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} d\eta = (\rho, u)_\infty \eta_b \quad (11)$$

为使式 (11) 成立, 对任意给定的来流条件 $(\rho, u)_\infty \eta_b$ 或 M_∞, η_b 存在一个最小值. 为讨论方便, 定义这个最小值为特征边界, 以 η_c 表示. 从式 (11) 看出, η_c 只是 $g(0)$ 的函数. 按上述定义在 $\xi = 0$ 截面上 η_c 必然满足极值关系 $\partial \eta_b / \partial g(0) = 0$. 因此将式 (11)

中 η_b 对 $g(0)$ 微分并令其为零,注意到积分上限是个变量,整理后得到 η_c 满足的关系式为

$$\int_0^{\eta_c} \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} h^2(0, \eta) g^2(0) \right]^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \cdot [1 - h^2(0, \eta) g^2(0)] d\eta = 0 \quad (12)$$

将式(11)中的 η_b 换作 η_c 并与式(12)联立,即可解得给定来流马赫数下的特征边界 η_c .

当来流马赫数 $M_\infty \rightarrow 0$ 时,简化方程的解式(10)在整个流场是精确的,因此相应的计算边界 η_b 应为 ∞ . 当 $M_\infty = 1$ 时,式(11)和式(12)联立给出 $\eta_c = \infty$, 既然 $\eta_b > \eta_c$, 所以 η_b 也是 ∞ . 这说明在 M_∞ 为 1 的情况下,来流流量达到了最大值,物体给予流场的影响要由整个流场来承担. 这正是跨声速流动的特点. 当来流接近临界马赫数时,绕物体流场的压缩性影响大部分由近区承担,这时 η_c 有较小值. 综上所述,当 M_∞ 从 0 逐渐上升到临界马赫数,再逐渐上升到 1 时,相应的 η_b 应从 ∞ 逐渐下降到它的最小值,然后又逐渐上升到 ∞ . 考虑到这些情况,可令

$$\eta_b = \eta_c + \sum_{k=1}^n a_k M_\infty^{-b} k^{-k}, \quad 0 \leq M_\infty \leq 1 \quad (13)$$

η_0 选取得合适可以提高初阶解的精度,减少迭代次数.

五、绕圆柱体跨声速流场

对于圆柱体绕流,相应的不可压缩位势流动有如下简单关系式^[35]:

$$\zeta = z + \frac{1}{z}, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad z = x + iy \quad (14)$$

根据式(6),由式(14)得到拉梅系数 h 及相应的坐标关系:

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{x^2 + y^2} [(x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1]^{\frac{1}{2}} \\ x &= \frac{1}{2} \left\{ \xi + \frac{\sqrt{2}}{2} [(A^2 + 4\xi\eta^2)^{\frac{1}{2}} + A]^{\frac{1}{2}} \right. \\ y &= \frac{1}{2} \left\{ \eta + \frac{\sqrt{2}}{2} [(A^2 + 4\xi^2\eta^2)^{\frac{1}{2}} - A]^{\frac{1}{2}} \right. \\ A &= \xi^2 - \eta^2 - 4 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

将式(15)代入式(11)和(12),对于给定来流条件得到特征边界 η_c , 结果见图 1. 根据上节讨论的边界条件,为了计算简单,由式(13)选取 $n = a_1 = b_1 = 1$ 得到计算边界 $\eta_b = \eta_c + \frac{1}{M_\infty}$. 由式(10)得到确定一阶近似的流量关联函数 $g(\xi)$ 的关系式:

$$\left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} g(\xi) \int_0^{\eta_b} \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} h^2(\xi, \eta) g^2(\xi) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} d\eta = (\rho u)_\infty \eta_b \quad (16)$$

将从式(16)算得的 $g(\xi)$ 代入式(10)得到一阶近似解. 由此计算出一阶近似的流线,再以此流线为曲线坐标,按照同样方法算出二阶近似,以至高阶近似. 一般说来,计算边界 η_b 的选取不是重要的,但是如果选取得合适,它可以提高初阶解的精度,减少迭代次数. 计算结果表明,对于圆柱体绕流,按照上述选取的 η_b , 初阶近似已具有很好的精度.

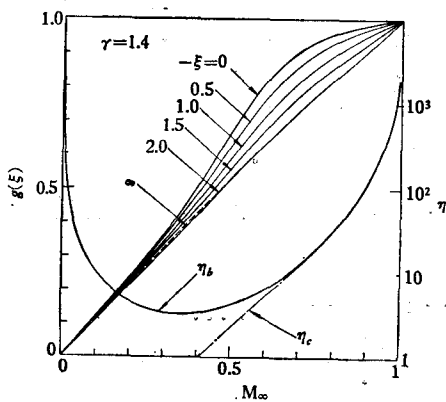


图 1 特征边界和流量关联函数

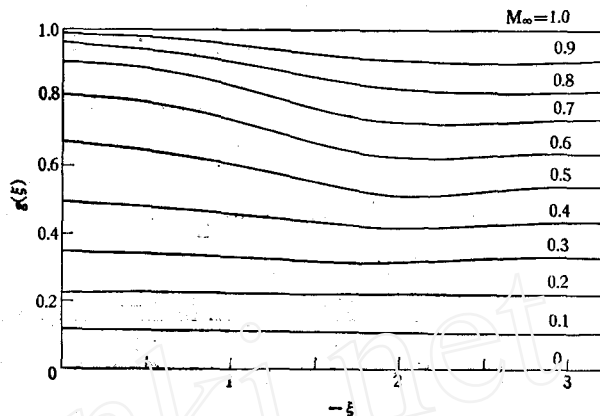


图 2 流量关联函数 $g(\xi)$

文中分别计算了不同 ξ 下, $g(\xi)$ 与来流马赫数 M_∞ 的关系曲线图 1, 不同来流马赫数下 $g(\xi)$ 与 ξ 的关系曲线图 2. 由图 2 可以看出, 当 ξ 为 $-\infty$ 时, 相应的 g 值等于来流速度, 即 $g(-\infty) = u_\infty$. 这表明, 在无限远处没有受到物体的扰动, 可压缩流动与相应的不可压缩流动一致. 随着 ξ 的增加, 压缩性影响加大, 开始时 g 值小于 u_∞ 即 $g < u_\infty$, 这表明压缩性使得流速偏低于相应的不可压缩流动的速度. 在通过前驻点的曲线坐标线 $\xi = -2$ 上 g 值最小. 随着 ξ 继续增加, g 值上升, 在 $\xi = \xi_m$ 处相应的 g 值等于 u_∞ . 应注意到, 对于不同的 M_∞ , ξ_m 的位置不同. 随着 ξ 进一步增加, g 值开始大于 u_∞ , 在 $\xi = 0$ 处, 即圆柱最大厚度截面, g 值最大. 也就是说, 在物体最大厚度处流场中压缩性影响最大. g 随 ξ 的变化代表了流场中压缩性修正的大小. 无论厚体和薄体上述关于 g 随 ξ 的变化规律都是一样的. 但是对于薄体 g 的最大值与最小值之间差别较厚体的情况小得多. 因此可以进一步近似, 可以在全流场中采用一个压缩性修正值, 如 Karmán-钱^[26,37]方法, 这在薄翼情况得到了很好的结果. 对于厚体, 从本文的计算结果可以看出不同的 ξ 截面必须采用不同的压缩性修正. 也就是说, 压缩性修正应该是一个随 ξ 变化的函数, 而不能是一个值. 另外, 不同的来流马赫数 M_∞ , 压缩性修正也不相同. 由图 2 可见, 当 M_∞ 很低时压缩性影响很小, 随着 M_∞ 增加, 压缩性修正加大, 在 M_∞ 为临界马赫数时压缩性修正最大. 但是, 当 M_∞ 继续增加, 压缩性修正反而下降.

对于来流马赫数 M_∞ 为 1 的跨声速绕流, 物体对流场的扰动范围很大, 这给理论分析, 数值计算和试验研究都带来了很大困难. 以圆柱体绕流为例, 当 M_∞ 为 1 时声速线的形状和走向等马赫数线的分布, 远场流动特性等, 目前都还不清楚. 考虑到这些情况, 根据本文方法对于 M_∞ 为 1 绕流得到简单的解析结果. 这对分析远场的一般性质是很有用的. 在 M_∞ 为 1 时, 由式 (11), (12) 得到 η_c 为 ∞ , 相应的 η_b 也为 ∞ . 将这一边界条件代入式 (10) 得到 $g(\xi) \equiv 1$. 由式 (4) 以及 (15)、(16), 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 得到流场中任一点 (r, θ) 的马赫数

$$M(r, \theta) = \left[\frac{\gamma^4 - 2\gamma^2 \cos 2\theta + 1}{\gamma^4 - \frac{\gamma - 1}{2} (1 - 2\gamma^2 \cos 2\theta)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

根据式 (17), 算得 M_∞ 为 1 的圆柱体绕流的等马赫数线分布, 结果见图 11. 由图可见, $M > 1$ 的等马赫数线都与 y 轴相交; $M < 1$ 的等马赫数线都与 x 轴相交; 声速线, 即 $M = 1$, 是伸向无限远的曲线, 其关系式是 $\gamma^2 \cos 2\theta = \frac{1}{2} \quad \gamma \geq 1$. 它是从柱面上 θ 为 30° 处出发, 以通过圆心的 45° 射线为渐近线的双曲线的圆外部分.

由式 (17), 令 θ 分别为 0 和 $\frac{\pi}{2}$, 即在直角坐标的 x 和 y 轴上, 当 $\gamma \gg 1$ 时, 将当地马赫数展开成 γ^{-2} 的幂级数:

$$M = 1 \mp \frac{\gamma + 1}{2\gamma^2} \left[1 - \frac{3(\gamma - 1)}{4\gamma^2} + \frac{(\gamma - 1)(5\gamma - 3)}{8\gamma^4} - \dots \right] \quad (18)$$

式 (18) 中“ $-$ ”为 x 轴上马赫数, “ $+$ ”为 y 轴上马赫数. 由此式可见, 扰动马赫数主要按 γ^2 衰减而且与比热比 γ 有关. 在 x 轴上的扰动马赫数小于零, 在 y 轴上的扰动马赫数大于零; 也就是说在 x 轴上的流速是亚声速的, 而在 y 轴上是超声速的.

六、计算结果和比较

根据前节给出的公式分别计算了来流马赫数 M_∞ 从 0.1, 0.2 一直到 1 的圆柱体绕流, 结果见下列各图.

图 3 给出比热比 γ 为 1.4, 来流马赫数从 0.1 到 1 的沿柱面的马赫数分布. 同时与 Imai^[24], $M_\infty \leq 0.4$; Cherry^[27], $M_\infty = 0.51$; Dorodnicyn^[29], $M_\infty = 1$; Hafez, South 和 Murman^[15], $M_\infty = 0.51$ 的结果进行了比较. 当 $M_\infty = 0.4$ 时, 本文结果与 Imai 结果符合得很好. 当 $M_\infty = 0.51$ 时, 在可比较的范围与 Cherry 结果符合得很好. 与 Hafez, South

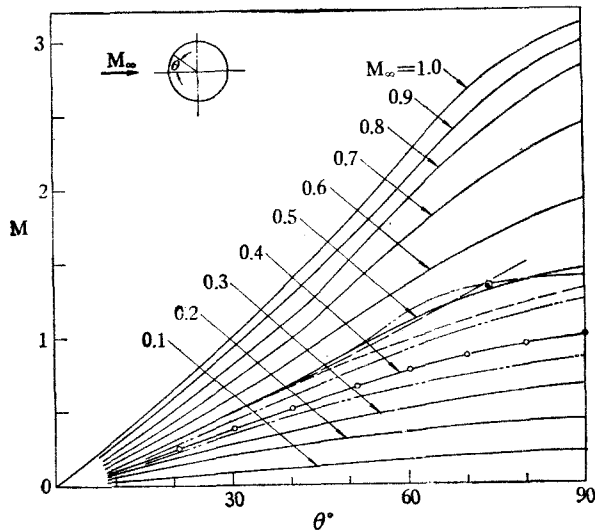


图 3 柱面马赫数分布

- 本文结果
- o- Imai^[24], $M_\infty = 0.4$
- .-.- Cherry^[27], $M_\infty = 0.51$
- .-.- Holt etc^[30], $M_\infty = 0.35, 0.45$
- .-.- Hafez etc^[15], $M_\infty = 0.51$
- Дородницын^[29], $M_\infty = 1$

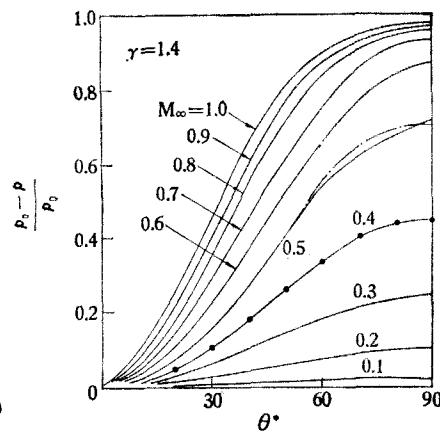


图 4 圆柱面压力分布

- 本文结果
- .-.- Cherry^[27], $M_\infty = 0.51$
- Imai^[24], $M_\infty = 0.4$

和 Murman 结果比较, 由图可见, 在 $\theta < 30^\circ$ 时, 他们的结果与本文结果基本符合; 在 $\theta > 30^\circ$ 时, 他们的结果比本文结果偏低。当 $M_\infty = 1$ 时 Dorodnicyn 结果在本文和 Cheryy 相应的 $M_\infty = 0.51$ 结果的下方, 比本文 $M_\infty = 1$ 的结果明显偏低。

图 4 给出来流马赫数 M_∞ 从 0.1 到 1 的柱面压力分布。由图可见, 当来流马赫数较低时, 柱面压力变化平缓, 随着 M_∞ 的增加, 柱面压力变化最大。

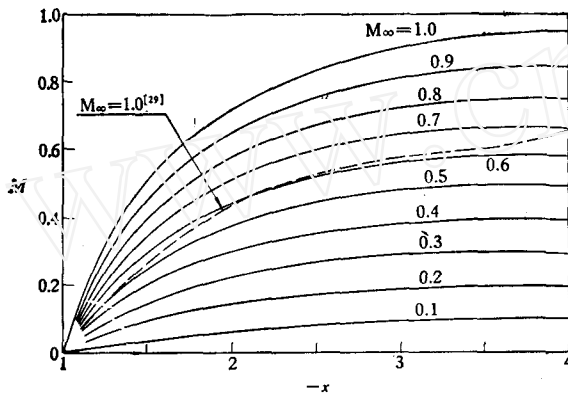


图 5 圆柱前端中心流线上马赫数分布

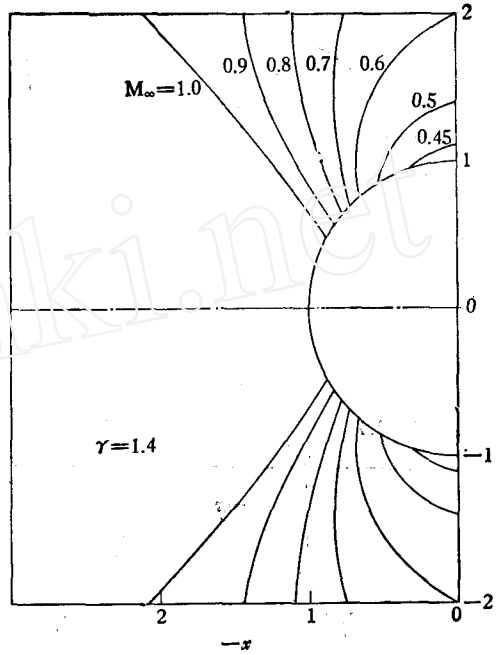


图 6 绕圆柱流动的声速线

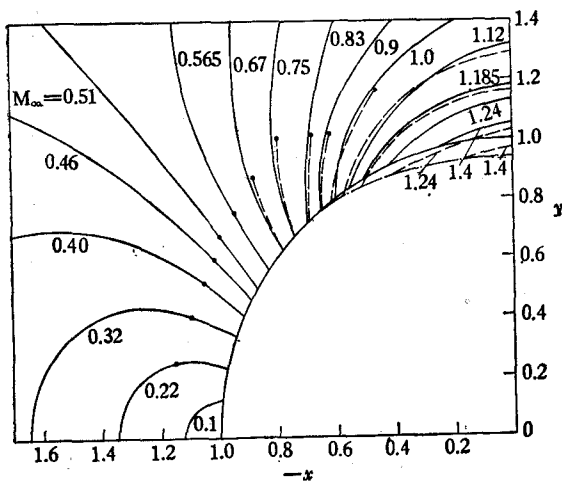


图 7 绕圆柱体流动
 $M_\infty = 0.51, \gamma = 1.405$

— 本文结果 — Cheryy^[27]

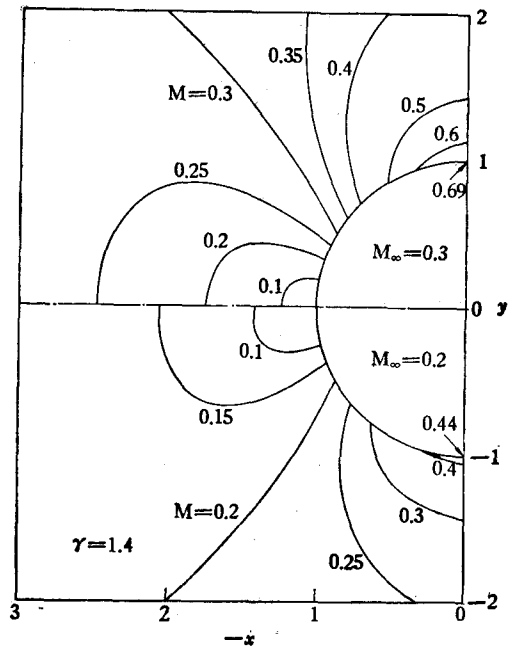


图 8 绕圆柱体流场, $M_\infty = 0.2, 0.3$

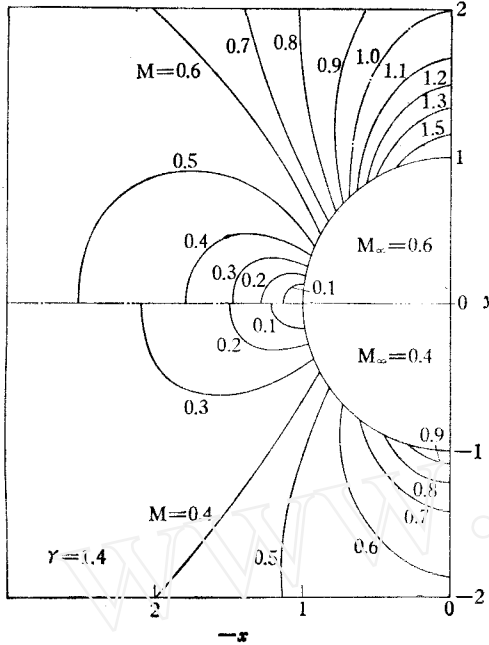


图9 绕圆柱体流场
 $M_\infty = 0.4, 0.6$

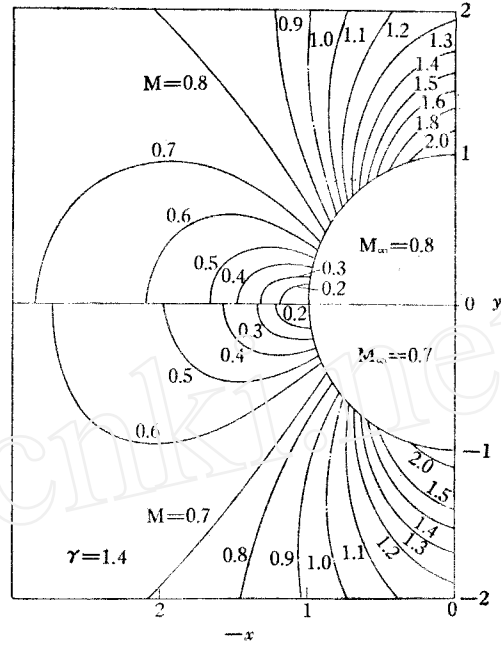


图10 绕圆柱体流场
 $M_\infty = 0.7, 0.8$

图5 给出来流马赫数 M_∞ 从 0.2 到 1 的柱面前端中心流线上马赫数分布, 同时与 Dorodnicyn^[29] $M_\infty = 1$ 的结果进行了比较, 他们的结果比本文相应的结果偏低。

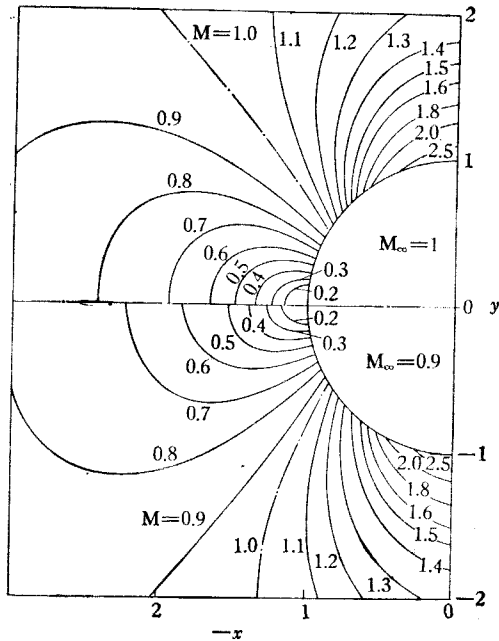


图11 绕圆柱体流场, $M_\infty = 0.9, 1$

图6 给出来流马赫数 M_∞ 分别为 0.45, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 和 1 的绕圆柱跨声速流动的声速线。由图可见, 当 M_∞ 为 0.45 时, 声速线在最大厚度附近的较小区域内。随着 M_∞ 增加壁面声速点沿柱面从上游移动, 声速线所包围的区域加大, 这时的声速线都与 y 轴相交。当 M_∞ 为 1 时声速线变为伸向无限远的双曲线。

图7 给出来流马赫数 M_∞ 为 0.51, 比热比 γ 为 1.405 时绕圆柱体的等马赫数线分布。同时与 Cherry^[27] 采用速度图法得到的准圆精确解进行了比较。Cherry 给出了圆柱附近的流场, 本文给出较大范围的流场。Cherry 准圆在 $\theta \leq 45^\circ$ 范围与真圆重合, 当 $\theta > 45^\circ$ 逐渐偏离真圆, 在 $\theta = 90^\circ$ 处比真圆厚度小 7%。由图可见, 在 Cherry 准圆与真空接近的区域, 本文结果与 Cherry 结果符合得很好。

图8, 9, 10, 11 分别给出来流马赫数 M_∞ 为 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 和 1 的绕圆柱体流动的等马赫数线分布。由图可见, 当 M_∞ 为 0.2, 0.3, 0.4 时整个流场是纯亚声速的。根据文中结果临界马赫数为 0.403, 即这时在圆柱最大厚度点的速度为当地声速。在超临界来流马赫数下, 随着 M_∞ 增加局部超声速区加大, 在 $M_\infty < 1$ 时超声速区是有限的, 当 $M_\infty = 1$ 时超声速区是无限的, 由声速线把流场分成两个无限大区域。声速线与 x 轴之间为亚声速区, 声速线与 y 轴之间为超声速区。但在无限远全部都是音速。

七、结 论

本文采用保角曲线坐标方法^[31]分析了圆柱体跨声速绕流, 分别计算了来流马赫数为亚临界, 超临界和马赫数为 1 的圆柱体绕流流场, 分析了压缩性对流场的影响。

通过计算本文给出圆柱体绕流的系统结果和流场全貌。给出了来流马赫数从 0.1 到 1 的沿柱面的马赫数分布及压力分布, 还给出柱面前端中心流线上马赫数分布。给出了超临界绕流时各种来流马赫数下的声速线, 还给出了来流马赫数为 0.2, 0.3, 0.4, 0.51, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 和 1 的圆柱体绕流流场。

本文只讨论了初阶近似, 结果精度很好, 而且计算简单。本方法适用于不同形状的柱体和机翼的跨声速绕流。

参 考 文 献

- [1] Nieuwland, G. Y., NLR (Noth) Tech. Rept. T172, (1967).
- [2] Boerstoel, J. W. and Uijlenhoel, R., ICAS paper 70—15, NLRMP70015U, (1970).
- [3] Boerstoel, J. W., IMA Conf. Comp. Methods and Problem in Aeron. Fl. Dynamics Manchester, NLR Rept. MP 74024U, (1974).
- [4] Takanashi, S. Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 16, 34(1973).
- [5] Garabedin, P. R. and Korn, D. G., In Numerical Solutions of Partial Differential Equations II New York Academic (1971).
- [6] Bauer, F., Garabedin, P. R. and Korn, D., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 108, Springer, New York (1975).
- [7] Sebieczky, H., DGLR-Symposium Tragflügel-Aerodynamik bei Schallnaken Strömungen (1972).
- [8] Murman, E. M., and Cole, J. D., *AIAA J*, 9(1971), 114—121.
- [9] Murman, E. M., AIAA Computational Fluid Mech. Conf. Palm., Springer, July (1973).
- [10] Jameson, A., Grumman Aerodynamics Rept. 391—71—1, Dec. (1971).
- [11] Jameson, A., Second AIAA Conf. on Comp. Fluid Dynamics, Hartford, June (1975).
- [12] Hafez, M. M., and Cheng, H. K., *AIAA J*, 15, 6(1977), 786—793.
- [13] Hafez, M. M., and Cheng, H. K., *AIAA J*, 15, 3(1977).
- [14] Cheng, H. K., and Hafez, M. M., Lecture Notes in Physics, 47, pp. 101—121, (1976).
- [15] Hafez, M. M., South, J. and Murman, E. M., *AIAA J*, 17, 8(1979), 838.
- [16] Magnus, R. and Yoshihara, H., *AIAA J*, 8, 12(1970), 2157—62.
- [17] Moretti, G., Polytech. Inst. Brooklyn, PIBAL Rep. 69—26 (1969).
- [18] Moretti, G., Polytech. Inst. Brooklyn, PIBAL Rep. 70—20 (1970).
- [19] Grossman, B., and Moretti, G., NASA CR-112271.
- [20] Chan, S. T. K. and Brosheans, M. R., AFFDL-TR (1974), 74—11.
- [21] Shen, S. F., "Finite Element Method in Fluid Problems" Ed. by Oden, J. T. etc. (1975), 198—192.
- [22] Norrie, D. H. and de Vries, G., Finite Element Method in Fluid Problems Ed. by Oden, J. T. etc. (1975), 21—28.

- [23] Chan, S. T. K., Broshears, M. R. and Young, V. Y. C., AIAA 13th Aerospace Science Meeting Pasadena, Calif. Jan. (1975), 20—22, AIAA Paper (1975), 75—79.
- [24] Imai, I., Proc. Phys. Math. Soc. Japan. **23**, pp. 181(1941).
- [25] Cherry, T. M., Proc. Roy. Soc. A192 (1947), 45—79.
- [26] Cherry, T. M., Proc. Roy. Soc. A196 (1949), 1—31.
- [27] Cherry, T. M., Proc. Roy. Soc. A196 (1949), 32—36.
- [28] Simasaki, T., *J of Math. and Phys.* **34**(1956), 1—42.
- [29] Dorodnicyn, A. A., *Adva. Aeron. Sci.* **2**(1959), 832—844.
- [30] Holt, M. and Masson, B. S., *Lecture Note in Physics*, **8**(1971), 243—251.
- [31] 林同骥, 贾振学, *力学学报*, **1**(1978), 1—18.
- [32] Tsien, H. S. "The Equations of Gas Dynamics" *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, Vol. III, "Fundamentals of Gas Dynamics", Ed. by Emmens, H. W., Princeton University Press (1958), 57—58.
- [33] Lamé, G., *Sur les lois de l'équilibre fluide étheré*, *J. de l'ecole Polyt. XIV* (1834), 191. also *See Lamb, H. Hydrodynamics* pp. 148—150.
- [34] Emmons, H. W. NACA TN 1746 (1948).
- [35] Lamb, H., "Hydrodynamics" Sixth Edition (1932), 77—78.
- [36] Tsien, H. S., *Jour. Aero. Soc.* **6**, 10(1939), 399.
- [37] Von Kármán, Th., *Jour. Aero. Soc.* **8**, 9(1941).

TRANSONIC FLOW AROUND A CIRCULAR CYLINDER

Lin Tong-ji Jia Zhen-xue

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

The conformal curvilinear coordinate method is applied to the analysis of transonic flow around a body, making use of the fact that the angle between the streamline of the transonic flow and that of the corresponding incompressible flow is small. As an example of the method, the flow fields around a circular cylinder are analysed for a series of free stream Mach number M_∞ varying from subcritical through supercritical up to one. For M_∞ equal to 0.2, 0.3, ..., 1, Mach number distributions both along the surface of the cylinder and along the central streamline, and the iso-Mach lines including sonic lines of the flow fields are given.

For verification, part of the results obtained are compared with those available. The iso-Mach lines for transonic flow around a circular cylinder are compared with Cherry's exact solution for the quasi-circular-cylinder for M_∞ equal to 0.51. The Mach number distribution along the surface of the circular cylinder are compared with those given by Imai (1941) for M_∞ equal to 0.4, Cherry (1947) for M_∞ equal to 0.51, Dorodnicyn (1959) for M_∞ equal to 1, and Jafez, South and Murman (1979) for M_∞ equal to 0.51. In addition to its wider scope of application, the method proves to be accurate. It can yield systematic results and needs less computation.

The present method can be applied to the analysis of transonic flow around cylinders of various shapes of cross-sections and around wings and cascades.