大雷诺数平稳湍流中悬浮颗粒的运动

李荫亭　关德相
（中国科学院力学研究所）

湍流中悬浮颗粒运动规律的研究，对于激光测速、空气污染、云雨形成及泥砂沉积等问题，具有重要的实际意义[1]．湍流脉动对悬浮颗粒的带动程度是其中的关键问题．湍流脉动的激光测量技术，迫切要求获得"完全带动"的统计判据，因为只有在"完全带动"的条件下，才有可能用激光技术测量湍流脉动速度．

所谓"带动程度"问题，就是由已知的湍流脉动速度，求出悬浮颗粒的运动速度．文献［2］对大雷诺数平稳湍流给出了流体质点运动的转移概率函数，从而得到拉格朗日湍流的完整统计描述．利用这个已知的湍流场，确定它对其中悬浮颗粒的"带动程度"，寻找"带动程度"的统计判据，就是本文要解决的问题．

一、湍流介质中颗粒的运动方程

湍流介质中，颗粒在某一方向上的运动方程为[3]

$$\frac{dv_p}{dt}+av_p=av_F+b\frac{dv_F}{dt}+c\int_{t_0}^{t}dt'\frac{\left(\frac{dv_F}{dt'}-\frac{dv_p}{dt'}\right)}{\sqrt{t-t'}}+f_e, \tag{1}$$

$$a=\frac{36\nu\gamma}{(2+\gamma)d^2}=\alpha\gamma, \tag{2}$$

$$b=\frac{3\gamma}{2+\gamma}=k\gamma, \tag{3}$$

$$c=\frac{18\gamma}{(2+\gamma)d}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}, \tag{4}$$

其中，v_p 是颗粒运动速度，v_F 是流体质点的速度，γ 是介质与颗粒密度之比，d 是颗粒直径，f_e 是所考虑方向上的外力（如重力，电磁力等），ν 是流体的运动粘性系数．方程右边的积分项，称为 Basset 项．Фукс[4] 指出，f_e 为定常力（如重力）时，Basset 项的存在使颗粒的加速度略微减少一些，其修正量随介质与颗粒密度比 γ（本文仅研究 $\gamma \leqslant 1$ 的情况）减小而减小，当密度比为 0.25 时，修正量不超过 2%．对空气中固体或液体悬浮质，其密度比一般小于 0.01，因此 Basset 项可以忽略．于是，运动方程变成

$$\frac{dv_p}{dt}+\alpha\gamma v_p=\alpha\gamma v_F+k\gamma\frac{dv_F}{dt}+f_e \tag{5}$$

或

$$\frac{dv_R}{dt}+\alpha\gamma v_R=(k\gamma-1)\frac{dv_F}{dt}+f_e, \tag{6}$$

本文 1979 年 4 月 15 日收到．

其中 $v_R = v_p - v_F$.

假定颗粒浓度很稀，我们可以忽略颗粒对湍流的反作用，即颗粒的存在不改变湍流场的结构．因此，上述方程中的 v_F 是作为已知湍流场中的速度而给出的．湍流脉动对颗粒的“带动程度”问题则变成由已知的 v_F 求 v_p 或 v_R.

湍流中流体质点的拉格朗日运动方程是[5]

$$\frac{dv_F}{dt} + \beta v_F = f(t), \tag{7}$$

β 为阻力系数，对均匀各向同性湍流 $\beta = \frac{5\nu}{\lambda^2}$, λ 为湍流微尺度． $f(t)$ 为作用于流体质点上的随机力．按文献[2]的结果，对大雷诺数平稳湍流，满足下述关系:

$$\langle f(t)\rangle_u = \overline{f(t)} = 0, \tag{8}$$

$$\langle f(t)f(t+\tau)\rangle_u = \overline{f(t)f(t+\tau)} = K\delta(\tau), \tag{9}$$

其中 $\langle\ \rangle_u$ 表示在速度为 u 的条件下的系综平均，“—” 表示全系综平均，$\delta(\tau)$ 为 δ-函数，$K = 2\beta\overline{v_F^2}$, 对平稳湍流 K 为常数．

方程 (7) 的解为:

$$v_F(t) = v_{F_0}e^{-\beta t} + e^{\beta t}\int_0^t e^{\beta\xi}f(\xi)d\xi, \tag{10}$$

其中 v_{F_0} 代表 $t = 0$ 时的 $v_F(t)$ 值.

二、颗粒运动速度的方均值

我们将仅研究 f_e 为重力的情况．考虑竖直方向上的颗粒运动，此时我们有 $f_e = -g(1-\gamma)$（取向上为正），方程(5)和(6)分别有如下形式的解:

$$v_p = -\frac{g(1-\gamma)}{\alpha\gamma}(1 - e^{-\alpha\gamma t}) + v_{p_0} e^{-\alpha\gamma t} + k\gamma e^{-\alpha\gamma t}\int_0^t e^{\alpha\gamma\xi}\left[f(\xi) + \left(\frac{\alpha}{k} - \beta\right)v_F(\xi)\right]d\xi, \tag{11}$$

$$v_R = -\frac{g(1-\gamma)}{\alpha\gamma}(1 - e^{-\alpha\gamma t}) + v_{R_0} e^{-\alpha\gamma t} + (k\gamma - 1)e^{-\alpha\gamma t}\int_0^t e^{\alpha\gamma\xi}[f(\xi) - \beta v_F(\xi)]d\xi, \tag{12}$$

其中 v_{p_0} 和 v_{R_0} 分别代表 $t = 0$ 时 $v_p(t)$ 和 $v_R(t)$ 之值.

为了计算悬浮颗粒的平均速度和方均速度，我们进行以初始时刻 $v_p = v_{p0}$ 为条件的条件系综平均，并以 $\langle\ \rangle_{v_{p_0}}$ 表示．于是，我们得到:

$$\langle v_p\rangle_{v_{p_0}} = -\frac{g(1-\gamma)}{\alpha\gamma}(1 - e^{-\alpha\gamma t}) + v_{p_0} e^{-\alpha\gamma t}, \tag{13}$$

$$\langle v_R\rangle_{v_{p_0}} = -\frac{g(1-\gamma)}{\alpha\gamma}(1 - e^{-\alpha\gamma t}) + v_{p_0}e^{-\alpha\gamma t}, \tag{14}$$

$$\langle v_p^2\rangle_{v_{p_0}} = \langle v_p\rangle^2_{v_{p_0}} + \overline{\beta v_F^2}\left\{\left[\frac{E_p^2}{\alpha\gamma} + \frac{G_p^2}{\beta} - \frac{4E_pG_p}{\alpha\gamma+\beta}\right] - \left(\frac{E_p^2}{\alpha\gamma} - \frac{G_p^2}{\beta}\right)e^{-2\alpha\gamma t} + \left[\frac{4E_pG_p}{\alpha\gamma+\beta} - \frac{2G_p^2}{\beta}\right]e^{-(\alpha\gamma+\beta)t}\right\}, \tag{15}$$

$$\langle v_R^2\rangle_{v_{p_0}}=\langle v_R\rangle_{v_{p_0}}^2+\beta\overline{v_F^2}\left\{\left[\frac{E_R^2}{\alpha\gamma}+\frac{G_R^2}{\beta}-\frac{4E_RG_R}{\alpha\gamma+\beta}\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{(1-G_R)^2}{\beta}-\frac{E_R^2}{\alpha\gamma}\right]e^{-2\alpha\gamma t}+\left[\frac{4E_RG_R}{\alpha\gamma+\beta}+\frac{2G_R(1-G_R)}{\beta}\right]e^{-(\alpha\gamma+\beta)t}\right\}, \quad (16)$$

其中

$$E_p=\frac{k\alpha\gamma\left(\gamma-\frac{1}{k}\right)}{\alpha\gamma-\beta},\qquad G_p=\frac{-k\gamma\left(\frac{\alpha}{k}-\beta\right)}{\alpha\gamma-\beta}, \quad (17)$$

$$E_R=\frac{(k\gamma-1)\alpha\gamma}{\alpha\gamma-\beta},\qquad G_R=\frac{(k\gamma-1)\beta}{\alpha\gamma-\beta}. \quad (18)$$

当 $t\to\infty$ 时,方程(15)和(16)式分别有下述渐近解:

$$\lim_{t\to\infty}\langle v_p^2\rangle_{v_{p_0}}\equiv\langle v_p^2\rangle_\infty=\left[-\frac{g(1-\gamma)}{\alpha\gamma}\right]^2+\beta\overline{v_F^2}\left\{\frac{1}{(\alpha\gamma-\beta)^2}\left[\alpha\gamma(k\gamma-1)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\gamma^2}{\beta}(\alpha-k\beta)^2+\frac{4\gamma^2\alpha(k\gamma-1)(\alpha-\beta k)}{\alpha\gamma+\beta}\right]\right\}, \quad (19)$$

$$\lim_{t\to\infty}\langle v_R^2\rangle_{v_{p_0}}\equiv\langle v_R^2\rangle_\infty=\left[-\frac{g(1-\gamma)}{\alpha\gamma}\right]^2+\beta\overline{v_F^2}\frac{(k\gamma-1)^2}{(\alpha\gamma+\beta)}. \quad (20)$$

当颗粒在水平方向上运动时,有 $f_e=0$. 因此,将方程(11)—(20)式中含 $g(1-\gamma)$ 项去掉,就可以得到颗粒在水平方向上运动的解.

三、结果讨论

利用上面的公式,我们讨论湍流脉动对颗粒带动程度与湍流特征量及颗粒参数的关系.

1. 由方程(15)和(16)式可以看出, $t\to\infty$ 意味着 $t\gg\frac{1}{2\alpha\gamma}$ 和 $t\gg\frac{1}{\alpha\gamma+\beta}$. 在通常激光测速条件下,我们总有 $\alpha\gamma\gg\beta$, 所以 $t\to\infty$ 意味着 $t\gg\frac{1}{\alpha\gamma}$. 颗粒初始速度的影响将在 $t\gg\frac{1}{\alpha\gamma}$ 之后消失. 由(2)式可以看到,颗粒尺寸和密度越大,初速影响时间越长,介质粘度越大,影响时间越短.

2. 颗粒竖直运动时,重力对带动程度的影响,可由方程(20)看出. 我们令

$$Q=\frac{\beta\overline{v_F^2}\,\frac{(k\gamma-1)^2}{\alpha\gamma+\beta}}{\left[-\frac{g(1-\gamma)}{\alpha\gamma}\right]^2}=\frac{\beta\overline{v_F^2}\alpha^2\gamma^2(k\gamma-1)^2}{g^2(1-\gamma)^2(\alpha\gamma+\beta)}, \quad (21)$$

当 $Q\gg1$ 时,重力影响可以忽略;当 $Q\ll1$ 时,湍流效应可以忽略. 对 $\gamma\ll1$ (空气中的固体和液体悬浮颗粒,一般都满足这个条件),

$$Q\doteq\frac{\overline{v_F^2}}{g^2}\alpha\beta\gamma\left(1+\frac{1}{B}\right)^{-1}, \quad (22)$$

其中 $B_r=\frac{\alpha\gamma}{\beta}$. 这就说明,湍流强度越大,湍流微尺度与颗粒直径越小,重力效应就越不重要.

3. 颗粒水平运动,或 $Q\gg1$ 忽略重力作用时,对 $\gamma\ll1$, 我们引进无量纲参量

$$B_r = \frac{\alpha\gamma}{\beta} \doteq \frac{18\nu\gamma}{\beta d^2}, \tag{23}$$

作为“带动程度”的统计判据.

当 $B_r \ll 1$ 时，对 $t \gg \frac{1}{\alpha\gamma}$ 时，有 $\langle v_R^2 \rangle_\infty = \overline{v_F^2}$ 即湍流脉动对颗粒“完全不能带动”.

当 $B_r \gg 1$ 时，对 $t \gg \frac{1}{\alpha\gamma}$ 时，有 $\langle v_R^2 \rangle_\infty \ll \overline{v_F^2}$ 即湍流脉动对颗粒“完全带动”.

对均匀各向同性湍流 $\beta = \frac{5\nu}{\lambda^2}$，此时 $B_r \doteq \rho_F \lambda^2 \Big/ \rho_p \left(\frac{d}{2}\right)^2$，因此，对大雷诺数各向同性平稳气体湍流中的固体和液体颗粒运动的完全带动条件是:

$$\sqrt{\rho_p}\left(\frac{d}{2}\right) \ll \sqrt{\rho_F}\lambda. \tag{24}$$

致谢：本工作得到谈镐生教授的指导和帮助，作者表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] Hidy, G. M. & Brock, J. R., *The Dynamics of Aerocolloidal Systems*, Pergamon Press, 1970.
[2] 岳曾元、李荫亭、关德相、张彬，中国科学，1974，3: 148—157.
[3] Hinze, J. O., *Turbulence*, McGraw-Hill, 1959.
[4] Фукс, Н. А., 气溶胶力学(顾震潮等译)，科学出版社，1960.
[5] Lin, C. C. & Reid, W. H., *Handbuch der Physik* (Hugge, S. ed.), VIII(1963), 2.