

共转圈上星系密度波的“隧道效应”及 Waser 机制的开关特性

徐 建 军

(中国科学院力学研究所)

摘 要

本文处理了在星系动力学中提出的一类非线性复特征值问题。求得了一致有效渐近解及量子化条件,分析了波在共转圈附近的传播特性,从而阐明了密度波在共转圈势垒中的“隧道效应”以及 Waser 机制的一种“开关特性”。这些物理特性在星系螺旋结构的动力学理论中具有十分重要的意义。

星系螺旋结构的维持与起源以及三维密度波在星盘对称面上的传播特性的研究,最终均引出一种二阶常微分方程的非线性特征值问题。其方程形式是:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dr^2} + k_3^2(r, \omega) u = 0 & (1) \\ k_3^2(r, \omega) = \lambda^2 [f_0^2(r)(\omega - Q(r))^2 + f_1(r)], & (2) \end{cases}$$

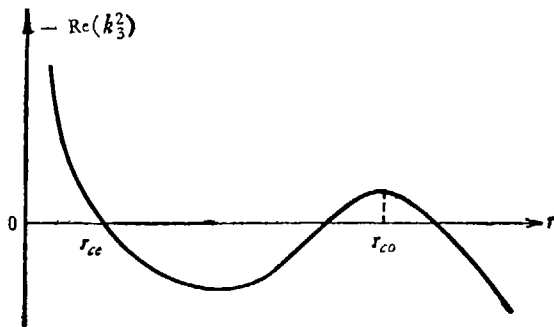


图1 $-\text{Re}(k_3^2)$ 曲线示意图

$\text{Re}\{k_3^2(r)\}$ 的典型特征可参看图1(以下将 k_3 简记作 k)。而边界条件可合理地取为:

1) 当 $r \rightarrow 0$ 时, u 迅速衰减; (3)

2) 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $ue^{i\omega t}$ 为外行波。(4)

(2) 式中 λ 是个大参数, ω 为复频率, $Q(r) > 0$, $Q'(r) < 0$, $f_0(r)$ 都是已知实函数; $f_1(r) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ 可以是复型函数。通常假定波数 $k^2(r)$ 在 $r = r_{cc}$ 处有一个单零转向点, 而且 r_{cc} 点与共转点 $r_{co}(Q(r_{co}) = \omega_R)$ 充分远。

对于 $f_1(r) \equiv 0$ 的特征情形 [Lin & Lau (1976)^[1-3] 已充分研究过], 显然此时波数 $k^2(r)$ 在 r_{co} 处有一个双零转向点; 对于 $f_1(r) \neq 0$ 的情形, 李启斌等人(1976)^[4] 亦处理过, 不过该文的结果只对 $f(r_{co}) = 0$ 的情形有效。(当 $f(r_{co}) \neq 0$ 时, 文中公式(3.9)的积分具有对数型的发散性。)在这种特殊情形下, 结果表明: $f_1(r)$ 的存在对波的传播特性影响不大。最近, Nishimoto (1979)^[5] 对于 k^2 的主项为三次多项式的情形给出了问题的量子化条件。

本文1979年12月6日收到。

本文对一般情形下的问题(1)–(4)进行了处理,求出了问题的一致有效渐近解及色散关系,并对解的特性进行了讨论。这里指出,当 $f(r_{co}) \approx 0$ 时,将会出现复杂情况。这时 $k^2(r)$ 在 r_{co} 附近具有紧邻的两个单零转向点,非零的小量项 $f_1(r)$ 的出现将对整个波的传播造成重大影响。共转圈上的参数 $f_1(r_{co})$ 将引起密度波的“隧道效应”及 Waser 机制的一种开关特性。

一、 $r=r_{co}$ 附近的一致有效渐近解

我们在复平面(r)上研究方程(1)。这样,解析函数 $\Omega(r)$, $f_0(r)$ 在实轴上均取实值。为确定波数 $k(r)$ 的分支,我们先考察一下其分支点的位置。先设 $f_1(r) \equiv 0$,对于小虚部增长型模式有:

$$\omega = \omega_R + i\omega_I, \quad |\omega_I| \ll |\omega_R|, \quad \omega_I < 0.$$

这样,在分支点 r_* 上,

$$\omega - \Omega(r_*) = 0.$$

又因 $\Omega(r_{co}) = \omega_R$, $\Omega(r_*) = \Omega(r_{co}) + \Omega'(r_{co})(r_* - r_{co})$, 故得:

$$r_* = r_{co} + i \frac{\omega_I}{\Omega'(r_{co})}, \quad (r_*)_R = r_{co}, \quad (r_*)_I = \frac{\omega_I}{\Omega'(r_{co})} > 0.$$

由此可见,对于 $f_1(r) \equiv 0$ 情形下的增长模式, $k^2(r)$ 的双重零点 r_* 位于实轴的上方。当 $f_1(r) \approx 0$ 时,我们将 $k^2(r)$ 改写为:

$$k^2(r) = \lambda^2 [A_0^2(r)(r - r_*)^2 + f_1(r)]. \quad (5)$$

并在 $r = r_*$ 邻域内,将 $A_0^2(r)$, $f_1(r)$ 展成幂级数:

$$\begin{cases} A_0^2(r) = A_0^2 + O(r - r_*), \\ f_1(r) = -d_0 + d_1(r - r_*) + d_2(r - r_*)^2 + \dots, \end{cases} \quad (6)$$

这里当然有

$$A_0 = O(1), \quad d_N = \frac{1}{N!} f_1^{(N)}(r_*) = O\left(\frac{1}{N! \lambda}\right).$$

由此推出,在 r_{co} 附近, $k^2(r)$ 的近似式为:

$$\begin{aligned} k^2(r) &= \lambda^2 [A_0^2(r - r_*)^2 - d_0 + d_1(r - r_*) + d_2(r - r_*)^2 + \dots] \\ &= \lambda^2 [(r - r'_*)^2 - d'_0 + \dots], \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} \lambda'^2 = \lambda^2(A_0^2 + d_2) = O(\lambda^2), \\ r'_* = r_* - \frac{d_1}{2(A_0^2 + d_2)}; \quad d'_0 = \frac{d_1^2}{4(A_0^2 + d_2)^2} + \frac{d_0}{A_0^2 + d_2}. \end{cases} \quad (8)$$

由(7)式看出,由于 $f_1(r) \approx 0$,波数 $k^2(r)$ 的双重零点 r_* 将分裂为两个紧邻的单重零点,

$$r_{*1} = r'_* + \sqrt{d'_0}; \quad r_{*2} = r'_* - \sqrt{d'_0} \quad (0 \leq \arg(d'_0) < 2\pi). \quad (9)$$

只要 $|f_1(r)|$ 充分小, r'_{*1} , r_{*1} , r_{*2} 都将保持在 r_* 的紧邻,并同样位于实轴上方。为选取波数 $k(r)$ 的单值分支,我们在复平面(r)上作切割线: $r_{*2} \rightarrow r_{*1}$ 及其延长线。当 $|f_1|$ 十分小时,此切割线不会与实轴相交。这时可选实轴作为积分回路作解析延拓。设 r_{co} 附近 $k(r)$ 的主项取为:

$$k(r) \approx -\lambda'(r - r_{*1})^{1/2}(r - r_{*2})^{1/2}. \quad (10)$$

其分支可这样选定: 令当 $r \ll r_{co}$ 时, $\text{Re}(k) > 0$ (或 $\arg(k) \approx 0$), 然后沿实轴进行延拓. 这样, 当 $r \gg r_{co}$ 时, 必有 $\text{Re}(k) < 0$ (或 $\arg(k) \approx \pi$). 当然, 若 $|f_1(r)|$ 逐渐增大, (r'_*, r_{*1}, r_{*2}) 诸点位置将连续变动以至有可能进入实轴下方, 复平面 (r) 上的切割线也就可能与实轴相交. 这时函数 $k(r)$ 的解析延拓路径, 便由实轴连续地演变为一在 (r_{*1}, r_{*2}) 下方通过的积分回路 (c) (参看图 2).

确定了函数 $k(r)$ 之后, 我们引入一种由 (r) 平面到 (ξ) 平面的变换 $\xi(r)$:

$$\begin{cases} \tau = - \int_{r_{*2}}^r k dr = \int_{\xi_{*2}}^{\xi} \left(\frac{\xi^2}{4} - a \right)^{1/2} d\xi = a [t \sqrt{t^2 - 1} - \text{ch}^{-1} t] \\ = a [t \sqrt{t^2 - 1} - \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})], \\ t = \xi / \xi_{*2}. \end{cases} \quad (11)$$

这里要求

$$\xi_{*1} = \xi(r_{*1}), \quad \xi_{*2} = \xi(r_{*2}). \quad (12)$$

显然, 在 (ξ) 平面上, 这时将相应切割线: $\xi_{*2} \rightarrow \xi_{*1}$ 及其延长线 (参看图 2).

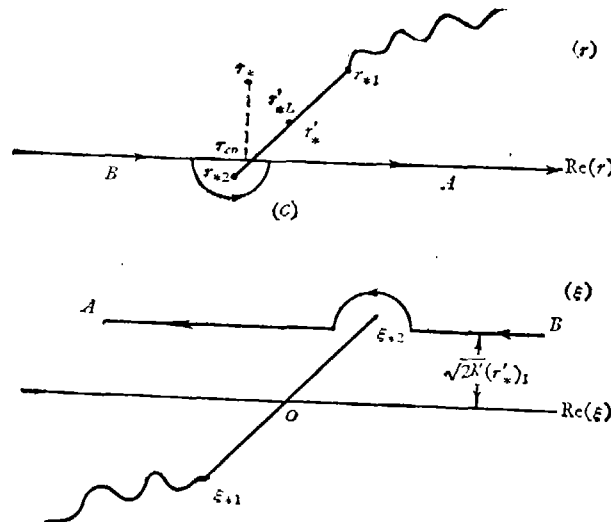


图 2 确定 $k(r)$ 函数单值分枝时间的 (r) , (ξ)

由于在 $|r - r_{co}| \ll 1$ 时, (10) 式成立. 从 (10), (11) 式便可推出: 在 r_{co} 附近, 有:

$$-\lambda'(r - r_{*1})^{1/2}(r - r_{*2})^{1/2} \approx \left(\frac{\xi^2}{4} - a \right)^{1/2} \left(\frac{d\xi}{dr} \right) \approx -\lambda' [(r - r'_*)^2 - d_0']^{1/2}.$$

从而

$$\begin{cases} a = \frac{\lambda' d_0'}{2}, \quad \xi_{*1} = -2\sqrt{a}, \quad \xi_{*2} = 2\sqrt{a}, \\ \xi(r) \approx -\sqrt{2\lambda'(r - r'_*)}. \end{cases} \quad (13)$$

在表 1 中, 我们列出了相应量的位相关系.

现在转而讨论方程 (1). 作 Langer 变换:

$$\xi = \phi(r), \quad v = \phi(r)u, \quad (14)$$

表 1

	$r \ll r_{co}$	$r \gg r_{co}$
$\arg(r - r_{*i}) \approx$	$-\pi$	0
$\arg(\xi) \approx$	0	π
$\arg(k) \approx$	0	π
$\arg(\tau) \approx$	0	2π

(1) 式便化为:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{1}{\phi'^2} \left(\phi'' - \frac{2\phi'\phi'}{\phi} \right) \frac{dv}{d\xi} + \frac{1}{\phi'^2} \left[k^2 - \phi \left(\frac{\phi'}{\phi^2} \right)^2 \right] v = 0, \quad (15)$$

再取

$$\psi = [\phi'(r)]^{1/2} \quad \text{及} \quad \phi(r) = \xi(r), \quad (16)$$

则得

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \left[\frac{k^2}{\xi'^2} - \hat{Q}(\xi) \right] v = 0, \quad (17)$$

其中

$$\hat{Q}(\xi) = \frac{\phi'^2}{\phi^2} \frac{1}{\phi^3} = \frac{1}{4} \frac{\xi''^2}{(\xi')^{9/2}}. \quad (18)$$

由 $\xi(r)$ 的定义(即(11)式), 可得

$$\xi'(r) = k(r) / \left(\frac{\xi^2}{4} - a \right)^{1/2}. \quad (19)$$

由此式可知, 在 r_{co} 点附近 $\xi(r)$ 是个正则函数, 既无极点又无零点, 而且 $\xi' = O(\lambda'^{1/2})$. 由此推出

$$\frac{k^2}{\xi'^2} = \left(\frac{\xi^2}{4} - a \right), \quad \hat{Q}(\xi) = O(\lambda'^{-5/4}) \ll 1. \quad (20)$$

作为最低一级近似, 可忽略 $\hat{Q}(\xi)$ 不计, 从而得:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \left(\frac{\xi^2}{4} - a \right) v = 0. \quad (21)$$

这是人们熟知的抛物柱方程. 它的两个线性无关复型解为: $\{E(a, \xi); E_*(a, \xi)\}$. 相应地, 方程(1)在 r_{co} 点附近的一致有效渐近解为:

$$u = k^{-1/2} \left(\frac{\xi^2}{4} - a \right)^{1/4} \cdot \{E(a, \xi); E_*(a, \xi)\}. \quad (22)$$

根据 Weber 函数理论, 我们有如下公式(参看文献[4], p693):

$$\begin{cases} E(a, \xi) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi a}{4} + \frac{i\pi}{8} + \frac{i\phi_2}{2}} U\left(ia, ze^{-\frac{i\pi}{4}}\right), \\ E_*(a, \xi) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi a}{4} - \frac{i\pi}{8} - \frac{i\phi_2}{2}} U\left(-ia, ze^{i\frac{\pi}{4}}\right), \\ U(a, z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)}{2\pi i} e^{-\frac{\pi i}{4}} \int_a^{\infty} e^{\pi s - \frac{i}{2} s a - \frac{1}{2} s} ds \end{cases} \quad (23)$$

由函数 $U(a, z)$ 的联结公式 (参看文献 [4], p687), 便不难导出关于 $E(a, z)$, $E_*(a, z)$ 的联结公式如下:

$$\begin{cases} E_*(a, -z) = ie^{\pi a} E_*(a, z) - i \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{\pi a}{2} - i\phi_2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right)} E(a, z), \\ E(a, z) = i \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{\pi a}{2} + i\phi_2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + ia\right)} E_*(a, z) - ie^{\pi a} E(a, z). \end{cases} \quad (24)$$

另外, 当 $|\arg(z)| < \frac{\pi}{4}$ 时, 还有渐近公式:

$$E(a, z) \sim \sqrt{\frac{2}{z}} e^{i\Theta}, \quad E_*(a, z) \sim \sqrt{\frac{2}{z}} e^{-i\Theta}, \quad (25)$$

其中

$$\begin{cases} \Theta = \frac{z^2}{4} - a \ln z + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2}, \\ \phi_2 = \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + ia\right). \end{cases} \quad (26)$$

为满足边界条件 (4), 使解在 $r \gg r_{co}$ 区域对应外行波, 我们考察 (11) 式. 当

$$|t| = |\xi/\xi_{*2}| \gg 1$$

时, 有

$$\tau(\xi) \sim \frac{\xi^2}{4} - a \ln \xi + \frac{a}{2} (\ln a - 1). \quad (27)$$

由此可得:

$$\Theta \sim \tau + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} - \frac{a}{2} (\ln a - 1). \quad (28)$$

前面已指出, 当 $r \gg r_{co}$ 时, $\arg(\xi) \approx \pi$. 因此, 解式

$$E_*(a, \xi e^{-i\pi}) \sim e^{i \int_{r_{*1}}^r k dr}.$$

恰好对应外行波.

当 $r \ll r_{co}$ 时, $\arg(\xi) \approx 0$, 利用联结公式 (24) 可得:

$$E_*(a, \xi e^{-i\pi}) = ie^{\pi a} E_*(a, \xi) - i \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{\pi a}{2} - i\phi_2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right)} E(a, \xi).$$

这样, 我们可把 r_{co} 点附近的一致有效渐近解表示为:

$$\begin{aligned} u_{co} &= u_{co}^+ + u_{co}^- \\ u_{co}^+ &= ie^{\pi a} E_*(a, \xi) \\ u_{co}^- &= -i \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{\pi a}{2} - i\phi_2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right)} E(a, \xi) \times k^{-1/2} \left(\frac{\xi^2}{4} - a\right)^{1/4}. \\ u_{co} &= E_*(a, \xi e^{-i\pi}) \end{aligned} \quad (29)$$

不难证明,其中 u_{co}^+ 对应外行波; u_{co}^- 对应内行波。

值得注意的是,以上引入的变换式 (11) 中的积分下限是一个分支点 r_{*2} 。我们也可选用另一点 r'_{*L} 作为该积分的下限。这里 r'_{*L} 点位于 r_{*2} 点的由 $r_{*2} \rightarrow r_{*1}$ 的切割线的左侧。这时定义:

$$\tau_* = - \int_{r'_{*L}}^r k dr = \tau - \tau_0,$$

而

$$\begin{cases} \tau_0 = - \int_{r_{*2}}^{r'_{*L}} k dr = a [t_0 \sqrt{t_0^2 - 1} - \ln(t_0 + \sqrt{t_0^2 - 1})], \\ t_0 = 0, \quad t_0 - 1 = e^{-i\pi}. \end{cases}$$

从而

$$\tau_0 = \frac{i\pi a}{2}, \quad \Theta \sim \tau_* + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} - \frac{a}{2} (\ln a - 1) + \frac{ia\pi}{2}. \quad (30)$$

为了了解波在共转点 r_{co} 附近的相互作用特性,这里考察一种特殊情形,设 $r'_* = r_{co}$,且 a 为实数。由于公式

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} \pm ia\right) \right| = \sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi a)}}, \quad \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right) = -\phi_2. \quad (31)$$

我们得:

$$\left. \begin{aligned} u_{co}^+ &= ie^{\pi a} E_*(a, \xi) \\ u_{co}^- &= -i \sqrt{1 + e^{2\pi a}} E(a, \xi) \\ u_{co} &= E_*(a, \xi e^{-i\pi}) \end{aligned} \right\} \times k^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi^2}{4} - a\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (32)$$

如果 $a > 0$, 我们取 r_{*2} 为积分下限,从而有:

$$\tau = - \int_{r_{*2}}^r k dr, \quad \text{且 } r_{*2} \text{ 为实数.}$$

这时,当 $r < r_{*2}$ 时, τ 为实数,从而 Θ 亦为实数。如果 $a < 0$, 我们取 $r'_{*L} = r_{coL}$ 作为积分下限,从而有:

$$\tau_* = - \int_{r'_{*L}}^r k dr.$$

这时, τ_* 为实数。利用 (30) 式,取 $a = |a| e^{i\pi}$, 便推出

$$\Theta \sim \tau_* + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} - \frac{a}{2} (\ln |a| - 1),$$

仍然是实数。这样,入射波 u_{co}^+ 传到共转圈后,即反射出一个内行波 u_{co}^- , 并透射出一个外行波 u_{co} 。其反射率 R , 透射率 T 分别为:

$$\begin{cases} R = \left| \frac{u_{co}^-}{u_{co}^+} \right| = \sqrt{1 + e^{-2\pi a}}, \\ T = \left| \frac{u_{co}}{u_{co}^+} \right| = e^{-\pi a}. \end{cases} \quad (33)$$

可见,当 $a > 0$ 时,随着 $|a|$ 的增加,波的反射率迅速趋于 1,透射率则趋于零。当 $a < 0$ 时,情况则相反。随着 $|a|$ 的增加,反射率与透射率均迅速趋于无穷(参看图 3)。

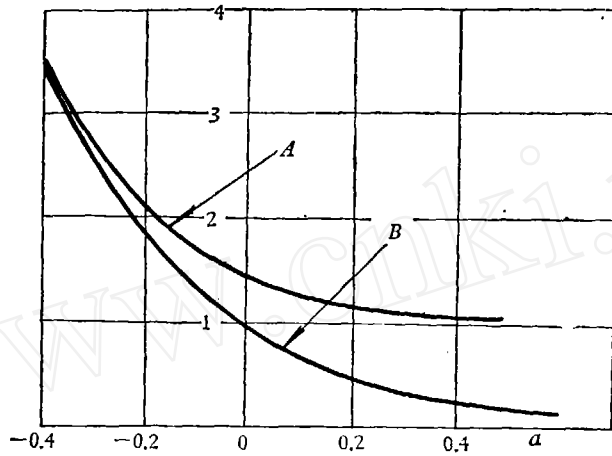


图 3 反射率、透射率随实参数 a 的变化 (A 为 $R = |u_{co}^-/u_{co}^+|$, B 为 $T = |u_{co}/u_{co}^+|$)

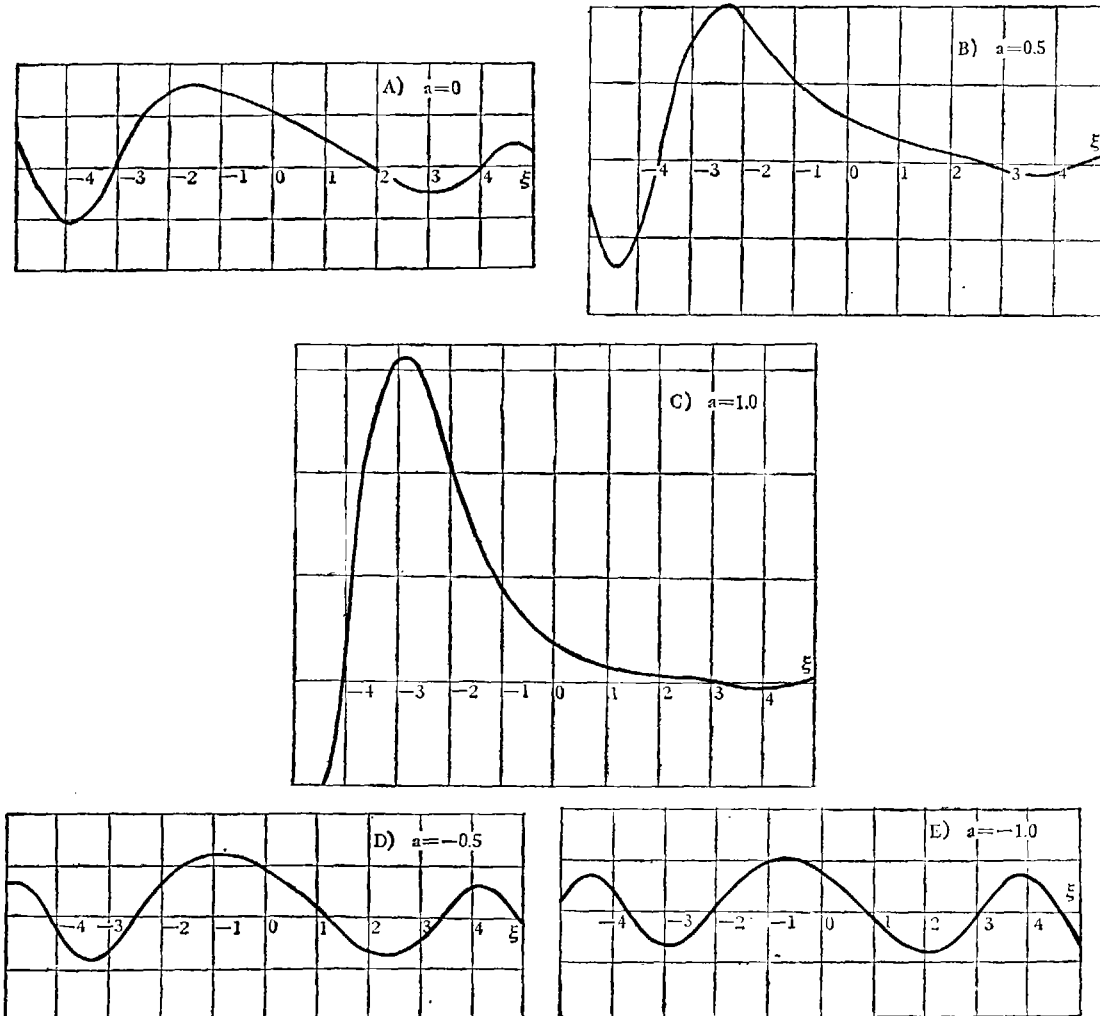


图 4 共振圈附近的波形曲线 ($\text{Re}\{E_*(a, \xi)\}$)

再看解的特性. 当 a 为实数时, 有公式:

$$\begin{cases} E(a, x) = k_*^{-1/2} W(a, x) + i k_*^{1/2} W(a, -x), \\ E_*(a, x) = \overline{E(a, x)} = k_*^{-1/2} \dot{W}(a, x) - i k_*^{1/2} W(a, -x), \\ k_* = \sqrt{1 + e^{2\pi a} - e^{\pi a}} \end{cases} \quad (34)$$

(参看文献 [4], p.693).

对于 $a = 0, \pm 0.5, \pm 1$, 我们分别作出了解 $W(a, x)$ 的曲线 (参看图 4), 这些曲线反映了波形 $\text{Re}\{E_*(a, x)\}$ 的特征. 由图 4 看出, 参数 a 的正负性对波的传播特性影响颇大. 其影响可描述如下.

1. 若 $a > 0$, 波数 k 在共转点附近有两个实零点, 这两个零点之间构成一个势垒, 解 $W(a, x)$ 在势垒内衰减, 因此势垒内没有波. 当入射波由共转圈内传到此势垒后, 由于“隧道效应”, 波可以透射到势垒另一侧. a 值越大, 势垒越高, 透射波越微弱, 反射波的增长率也就越小.

2. 若 $a < 0$, 波数 k 在共转点附近有两个共轭的纯虚的零点. 解 $W(a, x)$ 在整个区域均构成波形. 这说明, 入射波将顺利地“漫过”共转点成为透射波. 我们把这种情形称为“势谷”. 显然, $|a|$ 越大, “势谷”越宽, 波的透射率, 反射率也越大 (参看图 5).

由上述情况可以推知, 对于一般的复参数 $a = |a|e^{i\theta}$, 如果固定 $|a|$ 不变, 而令位相角 θ 值不断增大, 那末便可看到, 当 $\theta = 0$ 时, 共转圈对入射波成关闭状态, 反射波的增长率很小, 透射波的强度亦很小. 当 $\theta \rightarrow \pi$ 时, 则共转圈对入射波成导通状态, 反射波的增长率大为增加, 透射波强度亦很大. 当 $\theta \rightarrow 2\pi$ 时, 共转圈对入射波又回复到关闭状态. 共转圈附近波的传播特性强烈地受到参数 a 的模数及位相 θ 的调制作用, 这种重要特性可称为 Waser 机制的一种“开关特性”.

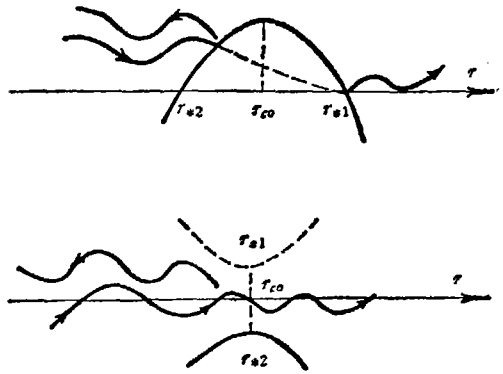


图 5 共转圈“势垒”及“势谷”附近波的传播

二、 r_{ce} 点附近的一致有效渐近解

小量项 $f_1(r)$ 的存在, 并不会影响波数 $k(r)$ 函数在 r_{ce} 点附近的单零转向点的特性. 关于一个单零转向点附近的一致有效渐近解的研究已经十分充分^[2]. 这里, 我们只需照搬文献 [2] 中的结果. 令

$$\zeta = \int_{r_{ce}}^r k dr \quad (35)$$

并取: 当 $r > r_{ce}$ 时, $\arg(\zeta) \approx 0$, 然后沿实轴作解析延拓, 则当 $r < r_{ce}$ 时, $\arg(\zeta) \approx \frac{3}{2}\pi$.

为满足边界条件 (3), 取解

$$u_{ce} = \left(\frac{\zeta}{k}\right)^{1/2} H_{1/3}^{(2)}(\zeta e^{-i\pi}) \quad (36)$$

在区域 $r > r_{cc}$ 内, 借助相应联结公式, 有

$$\begin{cases} u_{cc} = u_{cc}^+ + u_{cc}^-, & u_{cc}^+ = \left(\frac{\zeta}{k}\right)^{1/2} H_{1/3}^{(1)}(\zeta), \\ u_{cc}^- = \left(\frac{\zeta}{k}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{3}i\pi} H_{1/3}^{(2)}(\zeta). \end{cases} \quad (37)$$

三、色散关系

在复平面 (r) 上的重迭区域内, 解 u_{cc} , u_{co} 均有效, 因此

$$\begin{aligned} u &= u_{co} = A e^{-ir} + B e^{ir}, \\ &= u_{cc} = C e^{i\zeta} + D e^{-i\zeta}. \end{aligned} \quad (38)$$

由此推出

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} e^{i2\phi}, \quad \phi = \int_{r_{cc}}^{r_{*2}} k dr. \quad (39)$$

再利用 $H_{1/3}(\zeta)$, $E(a, \xi)$, $E_*(a, \xi)$ 的渐近展开式, 有:

$$\begin{cases} A = i e^{i\pi a} \sqrt{\frac{2}{\xi}} k^{-1/2} \left(\frac{\xi^2}{4} - a\right)^{1/4} e^{-i\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{2}a(\ln a - 1)\right]}, \\ B = -i \frac{\sqrt{2\pi} e^{\frac{\pi a}{2} - i\phi_2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right)} \sqrt{\frac{2}{\xi}} k^{-1/2} \left(\frac{\xi^2}{4} - a\right)^{1/4} e^{i\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{2}a(\ln a - 1)\right]}, \\ C = \left(\frac{\zeta}{k}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)}, \quad D = \left(\frac{\zeta}{k}\right)^{1/2} e^{-\frac{i\pi}{3} + i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)}. \end{cases} \quad (40)$$

由此得出

$$e^{i2\phi} = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right) e^{\frac{\pi a}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{ia(\ln a - 1)},$$

或

$$\phi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{a}{2}(\ln a - 1) - \frac{ia\pi}{4} - \frac{i}{2} \ln \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right)}{\sqrt{2\pi}} \right], \quad (41)$$

这就是我们所需要的色散关系.

作为数值例子, 我们设

$$k = -\lambda r^{1/2} [(r - \hat{\omega})^2 - d]^{1/2}, \quad \hat{\omega} = C - \omega. \quad (42)$$

这时,

$$r_{*1} = \hat{\omega} + d^{1/2}, \quad r_{*2} = \hat{\omega} - d^{1/2}, \quad r_{cc} = 0, \quad \lambda' = \lambda \hat{\omega}^{1/2} \quad (43)$$

所以, 有

$$\phi = \int_0^{r_{*2}} k dr = \lambda r_{*1} r_{*2} \int_0^1 t^{1/2} (1-t)^{1/2} (1-tz)^{1/2} dt, \quad (44)$$

这里

$$z = \frac{r_{*2}}{r_{*1}}. \quad (45)$$

由超几何函数积分表示式, 可得出

$$\phi = \lambda r_{*1}^{1/2} r_{*2}^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(b)\Gamma(\hat{c} - \hat{b})}{\Gamma(\hat{c})} F(d, \hat{b}, \hat{c}, z),$$

其中

$$\hat{a} = -\frac{1}{2}, \quad \hat{b} = \frac{3}{2}, \quad \hat{c} = 3, \quad |z| \approx 1,$$

利用公式(参看文献 [4], p.559, 15·3·11):

$$F(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, z) = \frac{\Gamma(\hat{m})\Gamma(\hat{c})}{\Gamma(\hat{a} + \hat{m})\Gamma(\hat{b} + \hat{m})} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\hat{a})_n(\hat{b})_n}{n!(1-m)_n} (1-z)^n - \frac{\Gamma(\hat{c})}{\Gamma(\hat{a})\Gamma(\hat{b})} (z-1)^m.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\hat{a} + m)_n(\hat{b} + m)_n}{n!(n+m)!} (1-z)^n \cdot [\ln(1-z) - \psi(n+1) - \psi(n+m-1) + \psi(\hat{a} + n + m) + \psi(\hat{b} + n + m)],$$

$$\hat{c} = \hat{a} + \hat{b} + m, \quad \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

以及, 此处

$$\begin{cases} 1-z \approx 2\left(\frac{d^{1/2}}{\hat{\omega}}\right)\left(1-\frac{d^{1/2}}{\hat{\omega}}\right), \\ r_{*1}^{1/2} r_{*2}^2 \approx \hat{\omega}^{5/2} \left[1 - \frac{25}{8} \left(\frac{d}{\hat{\omega}^2}\right)\right], \quad d = \frac{2a}{\lambda \hat{\omega}^{1/2}}, \end{cases} \quad (46)$$

便得出:

$$\phi \approx \lambda \frac{4}{15} \hat{\omega}^{5/2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{d^{1/2}}{\hat{\omega}} + \dots\right)$$

及色散关系:

$$\hat{\omega}^{5/2} + \sqrt{\frac{9a}{2\lambda}} \hat{\omega}^{5/4} = \frac{15}{4\lambda} \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + R + iW \right],$$

从而解出:

$$\hat{\omega}^{5/4} = -\sqrt{\frac{9a}{8\lambda}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{9a}{8\lambda} + \frac{15}{4\lambda} \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + R + iW \right]}, \quad (47)$$

而

$$R + iW = \frac{a}{2} (\ln a - 1) - \frac{ia\pi}{4}$$

$$- \frac{i}{2} \ln \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right)}{\sqrt{2\pi}} \right]. \quad (48)$$

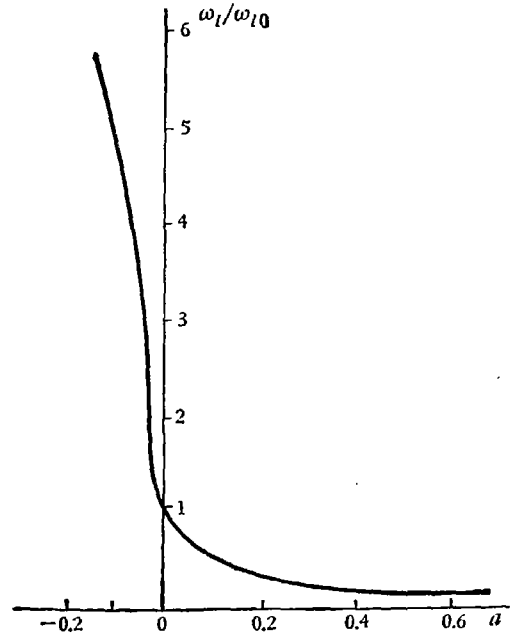


图 6 增长率 ω_1/ω_{10} 随实参数 a 的变化

我们对 $\lambda = 10, 20, C = 20, 2$ 及 $a = |a|e^{i\theta}$ 为不同值时, 计算了公式 (47), 得出特征频率 ω . 注意由 (47) 式可算出 5×2 个不同的复根 $\hat{\omega}$, 从而可得出 5×2 个不同的 ω 值. 但是我们要要求支点 $r_{*}^1 = \hat{\omega} = (C - \omega)$ 在 r_{cc} 的右方, 以及 $(r_{*}^1)_R \gg (r_{*}^1)_I$, 在这 10 个 ω 值中只有两个是有用的. 下面我们将给出相对 $\lambda = 10, C = 20$ 时的部分计算结果.

在图 6 中, 我们画出了模式增长率 ω_1/ω_{10} 随实参数 a 的变化曲线(图中 $\omega_{10} = \omega_1|_{a=0}$). 由图可见, 当 $a > 0$ 时, 的确随 $|a|$ 的增大, 增长率将下降, 而当 $a < 0$ 时, 情况恰恰相反. 在图 7 中, 我们对固定的 $|a|$ 值, 将 θ 从 $0 \rightarrow 2\pi$, 画出了 ω_1/ω_{10} 的相应变化曲线. 由图 7 看出,

随着 θ 的增加, 模式解的增长率会出现明确的 (2π) 周期变化, 这就是前面论述的“开关特性”。

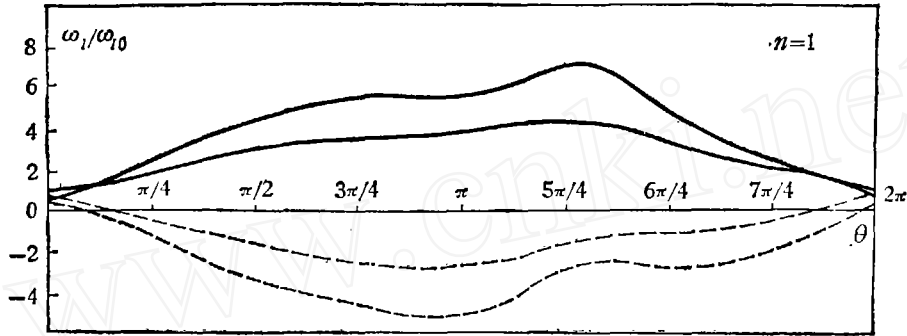


图 7 增长率 ω_1/ω_{10} 随 θ 的变化

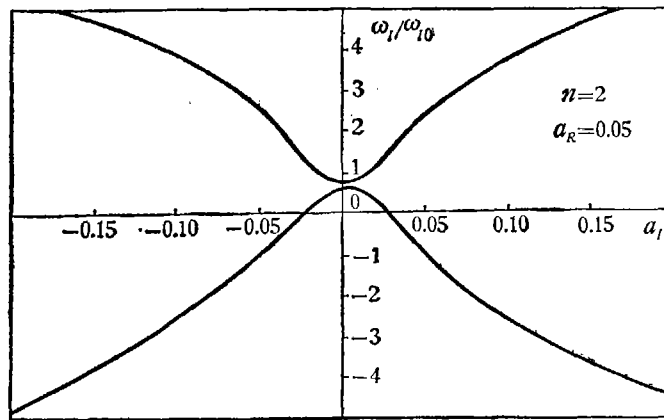


图 8 增长率 ω_1/ω_{10} 随 a_1 的变化

在图 7, 8 中还可以看到, 除去增长率较大的模式外, 对每一个 n 值还存在另一个增长率较小模式, 这个模式的增长率对 θ 的依赖关系 (由图 7 中虚线表示) 和前者恰好相反. 只有当 $a = 0$ 时, 这两个模式才合而为一. 这种由于 $|a| \approx 0$ 所引起的特征频率谱分裂现象, 是一个值得重视的十分有趣的研究课题.

本文是在谈镐生教授的热忱指导与大力帮助下完成的; 1979 年 8—10 月, 林家翘教授来华讲学, 曾亲自组织与指导了一个研究小组的工作 (参加小组的还有: 施学瑜, 蒲富全, 李家春, 戴世强, 唐泽眉, 蔡大用, 柏瑞, 肖秋凡, 瞿宗凯, 陆金甫等同志), 在组内曾对作者进行了十分热情的鼓励, 并对本文提出了极其宝贵意见, 特此一并致谢.

参 考 文 献

- [1] Lin, C. C., *SIMAJ. Appl. Math.*, **14** (1976), 876.
- [2] Lin, C. C. & Lau, Y. Y., *Adv. in Math.*, **22** (1976), 120.
- [3] Lau, Y. Y., Lin, C. C. & Mark, J. W.-K., *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* **73** (1976), 1379.
- [4] Li, C. B., Han, N. K. & Lin, C. C., *Scientia Sinica*, **19** (1976), 665.
- [5] Toshihiko Nishimoto, *Studies in Applied Mathematics*, 1979, 60, 11—26.
- [6] Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (ed), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover, Pub. Inc., New York, 1965.