

稳态 CO 激光的解析理论

高 智 孙文超

(中国科学院力学研究所)

1978年9月1日收到

提 要

为了分析 CO 激光的特性, 通常需要对上百个方程进行数值计算^[2,3,5,6], 因而解析的分析就成为一个很值得探讨的方面. 本文从分布函数方程和辐射强度谱分量传输方程出发, 导出稳态 CO 激光在级联跃迁发射时的增益饱和特性, 得到的强度谱分量与增益的关系式适用于均匀和非均匀加宽同时起作用的一般情况. 文中所使用的振动分布函数由一个非线性积分方程求得. 对两能级特例, 本文结果与文献[9]一致. 对均匀加宽极限的特例, 本文给出的强度和强度谱分量的关系式与文献[4]的结果一致.

一、序 言

近年来, CO 分子激光引起了人们广泛的兴趣, 对 CO 分子的振动结构、振动量子交换过程和受激发射特性均作了大量的理论和实验研究^[1]. 有激光作用时, CO 振动弛豫和受激发射的分析需要通过数值计算大量(上百个)速率方程和辐射强度谱分量传输方程组来完成, 相当繁复. 考虑到众多量子交换速率的不准确性, 近似的解析讨论显得十分必要, 但限于问题的复杂性, 目前看到的解析分析还很少. 近来文献[4]从分布函数方程^[7,8]和激光振荡的阈值条件出发, 对均匀加宽极限情况作了探讨. 解析的探讨不仅可以直观地分析参量的影响, 也可以导出多能级级联发射时的增益饱和规律.

二、基本方程

在振动-振动碰撞交换、振动-平动碰撞交换、自发辐射、受激发射和泵浦作用下, CO 振动粒子数的稳态分布函数 $F(v, y)$ 满足如下的稳态分布函数方程^[7,8]:

$$2\delta_{vv} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ q(v, v) F^2(v, y) \left[\frac{2\Delta E}{kT} - \frac{\partial^2 \ln F(v, y)}{\partial v^2} \right] \right\} + (P_{v+1, v} + A_{v+1, v}) \times F(v, y) + \frac{J_v B'_v}{ch v_v} \left[\lambda_v F(v, y) + \frac{\partial F(v, y)}{\partial v} \right] = 0, \quad (2.1)$$

其中 v ($0 \leq v < \infty$) 是振动量子数的连续变数, y 是激光传播方向的座标变数,

$$\int_0^\infty F(v, y) dv = N_{CO}, \quad (2.2)$$

$$q(v, w) = Q_{v, v+1}^{w, w} \exp(\delta_{vv} |v - w|). \quad (2.3)$$

δ_{vv} 是振动-振动碰撞交换的作用半径, 根据试验分析^[9,10], $\delta_{vv} \approx 8.4/\sqrt{T}$, ΔE 为非谐

性能量差, k 为玻耳兹曼常数, T 是介质温度, $q(v, \omega)$ 为 v 和 ω 的对称缓变函数, 当 v 与 ω 不大时, $q(v, \omega) = (v + 1)(\omega + 1)Q_{10}$.

与(2.1)式对应的分立的量子振动能级布居数 F_n 满足稳态速率方程(只考虑单量子交换):

$$\sum_{m=0}^{\infty} (Q_{n+1,n}^{m,m+1} F_m F_{n+1} - Q_{n,n+1}^{m+1,m} F_{m+1} F_n) + (A_{n+1,n} + P_{n+1,n}) F_{n+1} + \frac{J_{n+1} B'_{n+1}}{c h \nu_n} (F_{n+1} - \delta_n F_n) = \sum_{m=0}^n W_m \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)'$$

其中 $F_n = F_n(y)$ 是第 n 振动能级数密度, $\sum_{n=0}^{\infty} F_n = N_{CO}$, $Q_{n+1,n}^{m,m+1}$ 是振动-振动碰撞交换速率(单位厘米³/秒), W_m 为泵浦速率, $A_{n+1,n}$ 是自发辐射速率, $P_{n+1,n}$ 为 $(n+1)$ 能级在振动-平动碰撞交换下的损失速率, 由文献[8]可知

$$\begin{aligned} P_{n+1,n} &\approx (n+1) P_{10} \exp(n\delta_{vT}), \\ A_{n+1,n} &\approx (n+1) A_{10}, \\ Q_{n+1,n}^{m,m+1} &\approx (n+1)(m+1) Q_{10} e^{-\delta_{vT} |n-m|}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

δ_{vT} 是与气体成分和温度有关的常数. c 是光速, h 为普朗克常数 ν_n 是 $(n+1) \rightarrow n$ 能级的振动-转动跃迁频率, 即辐射频率. $J_{n+1} = J_{n+1}(\nu_n)$ 为辐射强度谱分量, B'_{n+1} 是在频率为 ν_n 的辐射作用下多普勒表观频率为 ν' 粒子的受激发射速率(单位为厘米³/秒),

$$B'_{n+1} = B_{n+1} \frac{\Delta\nu_N}{2\pi[(\nu_n - \nu')^2 + (\Delta\nu_N/2)^2]}, \quad (2.5)$$

式中 $\Delta\nu_N$ 为均匀加宽型线的半峰值全宽度. 对于振动转动 P 支跃迁,

$$\delta_n = \exp\left(-\frac{2\theta_{nr} j_n}{T}\right). \quad (2.6)$$

θ_{nr} 是转动常数, 它是振动能级 n 的缓变函数, j_n 为转动量子数. δ_v 与 λ_v 的关系为

$$\lambda_v = 1 - \delta_v. \quad (2.7)$$

辐射强度谱分量 J_v 满足如下的辐射传输方程:

$$\frac{\partial J_v}{\partial y} = \frac{B'_v}{C} \times J_v \left[\lambda_v F(v, y) + \frac{\partial F(v, y)}{\partial v} \right], \quad (2.8)$$

$$J_v = J_v^+ + J_v^-. \quad (2.9)$$

J_v^+ 和 J_v^- 分别为沿 y 正方向和负方向行进的光子能流, 在 $y = 0$ 和 L 的镜面边界上, 强度谱分量 J_v 满足如下边界条件:

$$\begin{aligned} y = 0, \quad J_{v0}^+ &= R_1 J_{v0}^-, \quad R_1 = 1 - a_1 - t_1, \\ y = L, \quad J_{vL}^- &= R_2 J_{vL}^+, \quad R_2 = 1 - a_2 - t_2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中 a_i , t_i 和 R_i ($i = 1, 2$) 分别为两镜面的损耗、透射和反射系数.

三、增益与强度谱分量的关系

为考虑增益加宽线型的贡献, 此处假定粒子的热运动遵从麦克斯韦速度分布律, 即粒子具有多普勒表观频率在 ν' 到 $(\nu' + d\nu')$ 之间的几率为

$$P(\nu')d\nu' = \frac{2}{\Delta\nu_{D\nu}} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \exp \left\{ - \left[\frac{2(\nu' - \nu_{0\nu})\sqrt{\ln 2}}{\Delta\nu_{D\nu}} \right]^2 \right\}, \quad (3.1)$$

$$\text{其中} \quad \nu' = \nu_{0\nu} \left(1 + \frac{u_y}{c} \right), \quad \Delta\nu_{D\nu} = \frac{2\nu_{0\nu}}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} \ln 2}, \quad (3.2)$$

u_y 是粒子在 y 方向的速度分量, $\nu_{0\nu}$ 是当粒子处于静止状态时所观察到的频率, 即多普勒型线的中心频率, $\Delta\nu_{D\nu}$ 是多普勒加宽型线半峰值处的全宽度, m 是 CO 分子的质量.

由分布函数方程(2.1)和辐射传输方程(2.8)以及关系式(3.1)可以求得

$$\begin{aligned} g_\nu &= \frac{1}{J_\nu} \frac{\partial J_\nu}{\partial y} = \int_0^\infty \frac{1}{J_\nu} \frac{\partial J_\nu}{\partial y} \delta(\nu' - \nu_\nu) d\nu' \\ &= \frac{2}{\Delta\nu_{D\nu}} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \int_0^\infty \left\{ h\nu_\nu \left[\frac{8\Delta E Q_{10}}{kT\delta_{\nu\nu}^3} (\nu+1)^2 F^2 \left(\lambda_\nu - \frac{1}{\nu+1} \right) - (P_{\nu+1} + A_{\nu+1}) F \right] \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[- \left(\frac{2(\nu' - \nu_{0\nu})\sqrt{\ln 2}}{\Delta\nu_{D\nu}} \right)^2 \right] \right\} / \left\{ c h \nu_\nu \frac{8\Delta E Q_{10}(\nu+1)^2 F}{kT B'_\nu \delta_{\nu\nu}^3} + J_\nu \right\} d\nu'. \end{aligned} \quad (3.3)$$

在导出上式时略去了 $\frac{\partial^2 \ln F(\nu, y)}{\partial \nu^2}$ 项, 对激光发射的条件, 该项与 $\frac{2\Delta E}{kT}$ 相比为一小量,

$\delta(\nu' - \nu_\nu)$ 为狄喇克函数, g_ν 是增益系数. 令

$$J_{\nu s} = \frac{c h \nu_\nu (\nu+1) F(\nu, y)}{B_\nu} \Phi \frac{\pi \Delta\nu_N}{2}, \quad (3.4)$$

$$G_\nu J_{\nu s} = \frac{\pi \Delta\nu_N}{2} h \nu_\nu \Phi (\nu+1) F \left[\frac{(\nu+1) F(\nu, y)}{F(0, y)} \left(\lambda_\nu - \frac{1}{\nu+1} \right) - \frac{P_{\nu+1, \nu} + A_{\nu+1, \nu}}{(\nu+1) \Phi} \right], \quad (3.5)$$

$$\text{其中} \quad \Phi = \frac{8\Delta E Q_{10} F(0, y)}{kT \delta_{\nu\nu}^3}, \quad B_\nu = (\nu+1) B_{0\nu}. \quad (3.6)$$

将(3.4)和(3.5)式代入(3.3)式得到

$$\begin{aligned} g_\nu &= \frac{1}{J_\nu} \frac{\partial J_\nu}{\partial y} = \frac{2G_\nu}{\Delta\nu_{D\nu}} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \frac{\Delta\nu_N}{\pi \Delta\nu_s} \int_{-\infty}^\infty \frac{\beta_\nu e^{-s^2}}{(\alpha_\nu - s)^2 + \beta_\nu} ds \\ &= \frac{2G_\nu}{\Delta\nu_{D\nu}} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + J_\nu/J_{\nu s})}} Z_i \left(\frac{2(\nu_\nu - \nu_0)\sqrt{\ln 2}}{\Delta\nu_{D\nu}} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\Delta\nu_N}{\Delta\nu_{D\nu}} \sqrt{(1 + J_\nu/J_{\nu s}) \ln 2} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中

$$s = \frac{2(\nu' - \nu_{0\nu})\sqrt{\ln 2}}{\Delta\nu_{D\nu}}, \quad \alpha_\nu = \frac{2(\nu_\nu - \nu_{0\nu})\sqrt{\ln 2}}{\Delta\nu_{D\nu}},$$

$$\Delta\nu_s = \Delta\nu_N \sqrt{1 + J_\nu/J_{\nu s}}, \quad \beta_\nu = \frac{\Delta\nu_s}{\Delta\nu_{D\nu}} \sqrt{\ln 2}, \quad ds = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\Delta\nu_{D\nu}} d\nu',$$

Z_i 是等离子体色散函数^[11]

$$Z(\alpha_\nu + i\beta_\nu) = \frac{2(\alpha_\nu + i\beta_\nu)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-s^2}}{s^2 - (\alpha_\nu + i\beta_\nu)^2} ds$$

$$= Z_y(\alpha_\nu + i\beta_\nu) + iZ_i(\alpha_\nu + i\beta_\nu)$$

的虚部。对均匀和非均匀加宽同时起作用的一般情况,利用数值积分或图解法可从(3.7)式求出辐射强度谱分量 J_ν 和增益系数 g_ν 。当频谱分量 ν_ν 与增益加宽型线中心频率 $\nu_{0\nu}$ 重合时,对均匀和非均匀加宽极限分别得到

$$g_\nu = \frac{2G_\nu/\pi\Delta\nu_N}{1 + J_\nu/J_{\nu s}}, \quad (3.8)$$

$$g_\nu = \frac{2G_\nu}{\Delta\nu_D} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + J_\nu/J_{\nu s}}}. \quad (3.9)$$

对两能级即 $\nu = 1$ 的特例,(3.7)至(3.9)式简化到文献[9] CO 激光的理论结果,此三式表明,在多能级级联发射条件下,以频率 ν_ν 发射的饱和方式或“烧孔”大小,既与以频率 $\nu_{\nu+1}$ 和 $\nu_{\nu-1}$ 的发射有关,又保持了两能级发射的主要特征。由于(3.7)至(3.9)式是用连续变数 ν 代替量子数的分立值导出的,因而对其中的参量要给以物理的说明: $J_{\nu s}$ 定义为频率为 ν_ν 的饱和强度谱分量, $J_{\nu s}$ 包括因子 Φ , Φ 具有速率即秒⁻¹的量纲,物理上可解释为激光上能级的“有效去活化速率”,即受激发射除外的振动-振动交换特征速率。

我们将(3.5)式改写成

$$\frac{2G_\nu J_{\nu s}}{\pi\Delta\nu_N h\nu_\nu} = (\nu + 1)\Phi F \left[\frac{(\nu + 1)F(\nu, y)}{F(0, y)} \left(\lambda_\nu - \frac{1}{\nu + 1} \right) - \frac{P_{\nu+1} + A_{\nu+1}}{(\nu + 1)\Phi} \right], \quad (3.5)'$$

此式右端项为厘米⁻³·秒⁻¹量纲,可解释为激光能级的“有效泵浦速率”,“有效泵浦速率”近似与分布函数二次方成比例,这说明 CO 分子的激光发射,其能级间的非辐射交换的主要途径是振动-振动近共振交换(当 ν 不太大时正确)。而在弱发射即 $J_\nu \ll 1$ 的条件下,由(2.1)式可以导出

$$\frac{1}{F(0, y)} \frac{\partial F}{\partial \nu} = - \frac{1}{(\nu + 1)^2} \left[\frac{(\nu + 1)F}{F(0, y)} + \frac{P_{\nu+1} + A_{\nu+1}}{\Phi} \right], \quad (3.5)''$$

比较(3.5)'和(3.5)''式可知,分布函数对 ν 的导数包含在“有效泵浦速率”中,因而增益-强度谱分量的关系式(3.7)至(3.9)已经包含了级联跃迁增强激光发射的效应,即包含了相邻能级发射的影响。

四、辐射强度和功率

对辐射强度谱分量积分得到总辐射强度

$$J = \int_{l_1}^{l_2} J_\nu d\nu. \quad (4.1)$$

l_1 和 l_2 分别为 CO 分子在级联跃迁作用下产生激光发射的最小和最大振动量子数, 定义下述平均量

$$I_\nu = \frac{1}{L} \int_0^L J_\nu dy, \quad I = \int_{l_1}^{l_2} I_\nu d\nu = \frac{1}{L} \int_0^L J dy, \quad f(\nu) = \frac{1}{L} \int_0^L F(\nu, y) dy, \quad (4.2)$$

由(2.9)和(2.10)式能够导出

$$\begin{aligned} K = K_\nu &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{J_\nu} \frac{\partial J_\nu}{\partial y} dy = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{B'_\nu}{c} \left(\lambda_\nu F + \frac{\partial F}{\partial \nu} \right) dy \\ &= \frac{B'_\nu}{c} \left[\lambda_\nu f(\nu) + \frac{\partial f(\nu)}{\partial \nu} \right] = -\frac{1}{2L} \ln R_1 R_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.3) 式即是激光振荡的阈值条件, 它表示平均增益系数 K 等于镜面损耗, 阈值条件与振动连续变数 ν 无关, 显然 $K = \frac{1}{L} \int_0^L g_\nu dy$.

对于均匀加宽极限且光频与型线中心频率重合的情况, 由(3.8)式可得到

$$\begin{aligned} \frac{J_\nu + J_\nu \frac{\partial J_\nu}{\partial y}}{J_\nu} &= h\nu_\nu \left\{ \frac{8 \Delta E Q_{10}}{kT \delta_{\nu\nu}^3} (\nu + 1)^2 F^2(\nu, y) \left(\lambda_\nu - \frac{1}{\nu + 1} \right) \right. \\ &\quad \left. - (P_{\nu+1} + A_{\nu+1}) F(\nu, y) \right\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

将(4.4)式对 ν 积分得到

$$\frac{\partial J}{\partial y} = h\bar{\nu}_\nu \left\{ \frac{4 \Delta E Q_{10}}{kT \delta_{\nu\nu}^3} [(\nu + 1)^2 F^2(\nu, y)] \Big|_{l_1}^{l_2} - \int_{l_1}^{l_2} (P_{\nu+1} + A_{\nu+1}) F d\nu \right\}, \quad (4.5)$$

其中 $\bar{\nu}_\nu$ 是 ν_ν 的平均值. 将(4.4)式对 y 积分得到

$$\begin{aligned} KI_\nu &= h\bar{\nu}_\nu \left\{ \frac{8 \Delta E Q_{10}}{kT \delta_{\nu\nu}^3} (\nu + 1)^2 f \left[\left(\lambda_\nu - \frac{1}{\nu + 1} \right) f - \frac{cK}{B'_\nu} \right] - (P_{\nu+1} + A_{\nu+1}) f \right\} \\ &= h\bar{\nu}_\nu (\nu + 1) f \Phi \left\{ \left(\lambda_\nu - \frac{1}{\nu + 1} \right) \frac{(\nu + 1)f}{f_0} - \frac{cK}{B'_\nu f_0} - \frac{P_{\nu+1} + A_{\nu+1}}{(\nu + 1)\Phi} \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中

$$f_0 = f(0), \quad \Phi \approx \frac{8 \Delta E Q_{10}}{kT \delta_{\nu\nu}^3} F(0, y) \approx \frac{8 \Delta E Q_{10}}{kT \delta_{\nu\nu}^3} f_0, \quad B'_\nu \approx (\nu + 1) B'_0,$$

将(4.5)式对 y 积分或(4.6)式对 ν 积分均可得到

$$KI = h\bar{\nu}_\nu \left\{ \frac{\Phi}{2f_0} [(\nu + 1)^2 f^2(\nu)] \Big|_{l_1}^{l_2} - \int_{l_1}^{l_2} (P_{\nu+1} + A_{\nu+1}) f d\nu \right\}. \quad (4.7)$$

(4.6)和(4.7)式与文献[4]的结果相同.

将(4.4)和(4.5)式对 y 积分同样可以得到

$$KI_\nu = \frac{1}{L} (J_{\nu L}^+ - J_{\nu 0}^+ - J_{\nu L}^- + J_{\nu 0}^-) = \frac{J_{\nu 0}^- (\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})(1 - \sqrt{R_1 R_2})}{L \sqrt{R_2}}, \quad (4.8)$$

$$KI = \frac{1}{L} (J_L^+ - J_0^+ - J_L^- + J_0^-) = \frac{J_0^- (\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})(1 - \sqrt{R_1 R_2})}{L \sqrt{R_2}}. \quad (4.9)$$

在 $y = 0$ 端输出的功率谱分量及总功率分别为

$$W_\nu = \tau_1 J_\nu^- = \frac{\tau_1 L \sqrt{R_2} K I_\nu}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})(1 - \sqrt{R_1 R_2})}, \quad (4.10)$$

$$W = \tau_1 J_0^- = \frac{\tau_1 L \sqrt{R_2} K I}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})(1 - \sqrt{R_1 R_2})}. \quad (4.11)$$

对于非均匀加宽极限,当平均增益与镜面损耗相等处于稳态发射时,平均增益与平均强度谱分量的一般关系同样为(3.3)式. 经过类似的处理,对光频与型线中心频率相重合的情况,可导出平均强度谱分量 I_{ν_n} 为

$$I_{\nu_n} = \frac{c h \nu_\nu \Phi}{B'_0} \left\{ \frac{B_0^2 f_0^2}{c^2 K^2} \left(\frac{2}{\Delta \nu_D} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \right)^2 \frac{(\nu + 1) f}{f_0} \left[\left(\lambda_\nu - \frac{1}{\nu + 1} \right)^2 \frac{(\nu + 1)^2 f^2}{f_0^2} - 2 \left(\lambda_\nu - \frac{1}{\nu + 1} \right) \frac{P_{\nu+1} + A_{\nu+1}}{(\nu + 1) \Phi} \frac{(\nu + 1) f}{f_0} + \frac{(P_{\nu+1} + A_{\nu+1})^2}{(\nu + 1)^2 \Phi^2} \right] - \frac{(\nu + 1) f}{f_0} \right\}, \quad (4.12)$$

其中 $B'_0 = B_0 \frac{2}{\pi \Delta \nu_N}$, $\Delta \nu_D \approx \Delta \nu_{D\nu}$, 总平均辐射强度 I_n 为

$$I_n = \frac{c h \nu_\nu \Phi}{B'_0} \left\{ \frac{B_0^2 f_0^2}{c^2 K^2} \left(\frac{2}{\Delta \nu_D} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \right)^2 \left[\int_{l_1}^{l_2} \left(\lambda_\nu - \frac{1}{\nu + 1} \right) \frac{(\nu + 1)^3 f^3}{f_0} d\nu - \frac{2}{\Phi} \int_{l_1}^{l_2} \left(\lambda_\nu - \frac{1}{\nu + 1} \right) \times \frac{(P_{\nu+1} + A_{\nu+1}) f^2}{f_0^2} d\nu + \frac{1}{\Phi^2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{(P_{\nu+1} + A_{\nu+1})^2 f}{(\nu + 1) f_0} d\nu \right] - \int_{l_1}^{l_2} \frac{(\nu + 1) f}{f_0} d\nu \right\}. \quad (4.13)$$

在 $y = 0$ 端输出的功率谱分量和总功率的表达式与(4.10)和(4.11)式一致,只要将 I_ν 和 I 分别用 I_{ν_n} 和 I_n 代替即可.

五、CO 稳态振动分布函数的确定

利用上述公式计算激光的强度和功率特性时,必须知道分布函数的具体形式,从(2.1)式和(3.7)至(3.9)式出发,利用(2.4)式可以导出辐射作用下分布函数满足的非线性积分方程式:

$$f(\nu) = \frac{d(l_1 + 1)}{\nu + 1} - \frac{P_{10} f_0 (e^{\nu \delta_{\nu T}} - e^{l_1 \delta_{\nu T}})}{(\nu + 1) \Phi \delta_{\nu T}} - \frac{A_{10} f_0 (\nu - l_1)}{(\nu + 1) \Phi} - \int_{l_1}^{\nu} \Psi(f, K, \nu, \xi) d\xi, \quad (5.1)$$

其中

$$\Psi = \frac{f_0 \Phi^{-1}}{(\xi + 1)^2 f(\xi)} \frac{K J_\xi}{h \nu_\xi} e^{\int_{\nu}^{\xi} \frac{d\xi}{i+1}} = \frac{f_0}{(\xi + 1)(\nu + 1) f(\xi) \Phi} \frac{K J_\xi}{h \nu_\xi}. \quad (5.2a)$$

对于均匀和非均匀加宽同时起作用、频谱分量 ν_n 与相应多普勒型线中心频率 ν_{0n} 相重合的情况,

$$\Psi = \frac{f_0}{h\nu_\xi(\nu+1)(\xi+1)f(\xi)\Phi} \frac{2G_\xi}{\Delta\nu_{D\xi}} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \frac{J_\xi}{\sqrt{\pi(1+J_\xi/J_{\xi s})}} \times Z_i \left(i \frac{\Delta\nu_N}{\Delta\nu_{D\xi}} \sqrt{\left(1 + \frac{J_\xi}{J_{\xi s}}\right) \ln 2} \right), \quad (5.2b)$$

其中 G_ξ , J_ξ , $J_{\xi s}$ 与 $F(\xi)$ 的关系见 (3.4), (3.5) 和 (3.7) 式. 对均匀加宽极限 $\Delta\nu_N/\Delta\nu_{D\nu} \rightarrow \infty$, Ψ 简化为

$$\Psi = \frac{1}{\nu+1} \left[\left(\lambda_\xi - \frac{1}{\xi+1} \right) (\xi+1)f(\xi) - \frac{cK}{b'_0} - \frac{(P_{10}e^{\xi\delta\nu\tau} + A_{10})f_0}{\Phi} \right]. \quad (5.2c)$$

对非均匀加宽极限 $\frac{\Delta\nu_N}{\Delta\nu_{D\nu}} \rightarrow 0$, Ψ 简化为

$$\Psi = \frac{f_0 cK}{b'_0(\nu+1)(\xi+1)f(\xi)} \left\{ \frac{b_0^2 f_0^2}{c^2 K^2} \left(\frac{2}{\Delta\nu_{D\xi}} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \right)^2 \frac{(\xi+1)f(\xi)}{f_0} \left[\left(\lambda_\xi - \frac{1}{\xi+1} \right)^2 \times \frac{(\xi+1)^2 f^2(\xi)}{f_0^2} - 2 \left(\lambda_\xi - \frac{1}{\xi+1} \right) \frac{(\xi+1)f(\xi)}{f_0} \frac{P_{10}e^{\xi\delta\nu\tau} + A_{10}}{\Phi} + \frac{(P_{10}e^{\xi\delta\nu\tau} + A_{10})^2}{\Phi^2} \right] - \frac{(\xi+1)f(\xi)}{f_0} \right\}, \quad (5.2d)$$

式中 $b'_\nu = B'_\nu \exp \left(-\frac{\Delta E_{\nu+1, \nu-1}}{kT} \right)$.

非线性积分方程 (5.1) 具有物理意义的解必须满足 $f(\nu) > 0, \Psi(f, K, \nu, \xi) \geq 0$ 的限制条件. 对于均匀加宽极限, (5.1) 式简化为

$$f(\nu) = \frac{d(l_1+1)}{\nu+1} + \frac{cK(\nu-l_1)}{b'_0(\nu+1)} - \int_{l_1}^{\nu} \left(\lambda_\xi - \frac{1}{\xi+1} \right) \frac{\xi+1}{\nu+1} f(\xi) d\xi. \quad (5.1)'$$

辐射场不存在, 即 $\left(\lambda_\nu f(\nu) + \frac{\partial f(\nu)}{\partial \nu} \right) = 0$ 时, 积分方程 (5.1) 和 (5.1)' 简化为

$$f(\nu) = \frac{d(l_1+1)}{\nu+1} - \frac{P_{10}f_0(e^{\nu\delta\nu\tau}e^{l_1\delta\nu\tau})}{(\nu+1)\Phi\delta_{\nu l_1}} - \frac{A_{10}f_0(\nu-l_1)}{(\nu+1)\Phi} \quad (\nu \geq l_1). \quad (5.3)$$

一旦由 (5.1) 式求得辐射作用下振动分布函数的解, 辐射强度谱分量、功率谱及辐射总强度等量即可根据上文及下文给出的表达式求出, 并对它们作出解析的讨论. 这样就 把振动弛豫和多频共振辐射相互作用过程的近百个联立积分-微分 Stiff 方程组的繁重计算问题, 简化并归结为求解一个非线性积分方程式 (5.1) 的问题.

积分常数 d 的确定: 共振辐射能级范围 (l_1, l_2) 内的分布函数解即 (5.1) 式的解, 在 $\nu = l_1$ 处应与 $\nu \leq l_1$ 的无辐射分布函数相重合, 从物理的考虑还可以提出更多的要求, 如 $\nu = l_1$ 处 (5.1) 式解的左导数应与 $\nu \leq l_1$ 的无辐射分布函数解的右导数相等. $\nu \leq l_1$ 的无辐射分布函数解可能出现两种情况: 一是 $l_1 \leq n^*$ 的情况, 对低振动能级, $P_{\nu+1, \nu}$, $A_{\nu+1, \nu}$ 与 $Q_{\nu+1, \nu}^m F_m$ 项相比很小, 故可以忽略. 从原始方程 (2.1)' 中只考虑振动-振动交换就可得到无辐射分布函数解, 即 Treanor 分布^[1]:

$$f(\nu) = f_T(\nu) = f(0) \exp \left\{ -\nu \left[\frac{E_1}{k\theta_1} - \frac{(\nu-1)\Delta E}{kT} \right] \right\} \quad \nu \leq n^*, \quad (5.4)$$

其中

$$n^* = \frac{E_1 T}{2\theta_1 \Delta E} + \frac{1}{2}, \quad k\theta_1 = E_1 / \ln \frac{f(0)}{f(1)};$$

二是 $l_1 > n^*$ 的情况, 此时分布函数解为

$$f(v) = \begin{cases} f_T(v) & v \leq n^*, \\ \frac{d'(n^*+1)}{v+1} - \frac{P_{10}f_0(e^{v\delta_{vT}} - e^{n^*\delta_{vT}})}{(v+1)\Phi\delta_{vT}} - \frac{A_{10}f_0(v-n^*)}{(v+1)\Phi} & l_1 \geq v \geq n^*, \end{cases} \quad (5.5)$$

其中 $d' = f_T(n^*) = f(0)\exp\left[-(n^*)^2 \frac{\Delta E}{kT} - \frac{1}{2}\right]$. 由 (5.1) 和 (5.4) 或 (5.5) 式求出积分常数 d 为

$$d = \begin{cases} f(0)\exp\left\{-l_1\left[\frac{E_1}{k\theta_1} - \frac{(l_1-1)\Delta E}{kT}\right]\right\} & l_1 < n^*, \\ \frac{d'(n^*+1)}{l_1+1} - \frac{P_{10}f_0(e^{l_1\delta_{vT}} - e^{n^*\delta_{vT}})}{(l_1+1)\Phi\delta_{vT}} - \frac{A_{10}f_0(l_1-n^*)}{(l_1+1)\Phi} & l_1 \geq n^*. \end{cases} \quad (5.6)$$

可见积分常数 d 与 T 和 θ_1 有关, θ_1 为第一振动能级的振动温度, 给定 T , 则 θ_1 的大小与振子振动能的贮藏有关.

我们能够证明, 在 $\infty > v > l_1$ 的量子能级范围内, 振动量子的净损失率为

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \int_{l_1}^{\infty} \left[(P_{v+1} + A_{v+1})F + \frac{J_v B'_v}{ch\nu_v} \left(\lambda_v F + \frac{\partial F}{\partial v} \right) \right] dv = - \int_{l_1}^{\infty} \frac{\Phi}{2F(0, y)} \frac{\partial}{\partial v} \\ &\quad \times [(v+1)^2 F^2] dv = \frac{\Phi}{2} (l_1+1)^2 \frac{F^2(l_1, y)}{F(0, y)} \approx \frac{\Phi d^2}{2F(0, y)}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

故

$$\dot{H} \approx \int_{n^*}^{\infty} [(P_{v+1} + A_{v+1})F + \frac{J_v B'_v}{ch\nu_v} \left(\lambda_v F + \frac{\partial F}{\partial v} \right)] dv \approx \frac{\Phi d^2}{2F(0, y)}. \quad (5.8)$$

(5.7) 和 (5.8) 式的物理意义是: 振动量子的净损失因平动-振动去活化、自发辐射和受激发射所引起, 且为 Treaner 分布极小 $v \approx n^*$ 处的近共振振动-振动传输所补偿. 不论激光发射是否存在, 在稳态条件下 (5.4) 和 (5.3) 式均成立. 可见对“相应”泵浦和气温所维持的稳态分布, d 与激光发射功率的大小无关, $v < l_1$ 范围的分布函数特性同样不受激光发射的影响^[4]. 因而能够利用上面导出的振动分布函数对强度、功率谱分量和总功率作出计算.

激光发射的最小和最大量子数 l_1 和 l_2 , 可由 $I_{l_1} = I_{l_2} = 0$ 的关系求得. 对均匀加宽极限由 (4.6) 式得出

$$\left(\lambda_v - \frac{1}{v+1} \right) \frac{(v+1)f}{f_0} - \frac{cK}{B'_0 f_0} - \frac{P_{v+1} + A_{v+1}}{(v+1)\Phi} = 0. \quad (5.9)$$

对非均匀加宽极限由 (4.12) 式得出

$$\begin{aligned} \frac{B'_0 f'_0}{c^2 K^2} \left(\frac{2}{\Delta\nu_D} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \right)^2 \left[\left(\lambda_v - \frac{1}{v+1} \right)^2 \frac{(v+1)^2 f^2}{f_0^2} - 2 \left(\lambda_v - \frac{1}{v+1} \right) \frac{(P_{v+1} + A_{v+1})f}{f_0 \Phi} \right. \\ \left. + \frac{(P_{v+1} + A_{v+1})^2}{(v+1)^2 \Phi^2} \right] = 1, \end{aligned} \quad (5.10)$$

若 $l = l_1$, 则自发辐射和振动-平动交换可以忽略, 于是对均匀加宽极限得到

$$l_1 \approx \frac{1}{\lambda - \frac{cK}{B_0'd}} - 1. \quad (5.11)$$

对非均匀加宽极限得到

$$l_1 \approx \frac{1}{\lambda - \frac{cK\Delta\nu_D}{2B_0'd} \sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}}} - 1. \quad (5.12)$$

在导出(5.11)和(5.12)式时, 已令 $\lambda_\nu = \lambda^{[4]}$, $\theta_{nr} = \theta_r$.

在每一振动带 $(\nu + 1, \nu)$ 中可只考虑单一转动线 P 支跃迁, 因为与小信号增益系数最大值相应的 P 支跃迁能量约占振动带反转能量的 95% 以上, 事实上 $\frac{\Delta E_{\nu+1, \nu}(j_\nu^*)}{\Delta E_{\nu+1, \nu}} \approx 1 - 2 \frac{\theta_r}{\theta_\nu} (j_\nu^* + 1)$, θ_ν 为振动基频特征温度, j_ν^* 是小信号增益系数最大所对应的转动量子数。因而 j_ν^* 的值可利用小信号增益系数为最大的关系导出^[4]

$$j_\nu^{*3} - j_\nu^{*2} \left[j_0(f) + \frac{1}{2} \right] - \frac{T}{\theta_{vr}} j_\nu^* + \frac{T j_0(f)}{2\theta_{vr}} = 0, \quad (5.13)$$

式中

$$j_0(f) = - \frac{T}{2\theta_{vr}} \frac{\partial \ln f}{\partial \nu}.$$

六、算 例

利用上节得到的公式, 对均匀和非均匀加宽极限计算了振动分布函数和功率谱分量, 见图 1、图 2、图 3 和图 4。图 1 和图 3 分别给出了均匀和非均匀加宽极限下, 有激光辐射与无激光辐射时的振动分布函数曲线。图 2 和图 4 分别给出了均匀和非均匀加宽极限

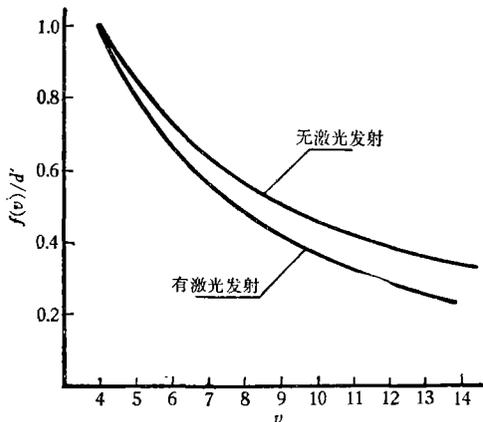


图 1 均匀加宽极限下的振动分布函数曲线

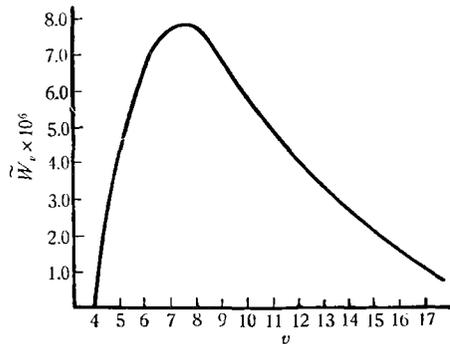


图 2 均匀加宽极限下的功率谱分量
 $(E_1/k\theta_1 = 2, \Delta E/kT = 1/5, T \approx 93.5\text{K},$
 $\Phi/f_0 = 6 \times 10^{-11} \text{ 厘米}^3/\text{秒}, N_{\text{He}}/N_{\text{CO}} = 9/1)$

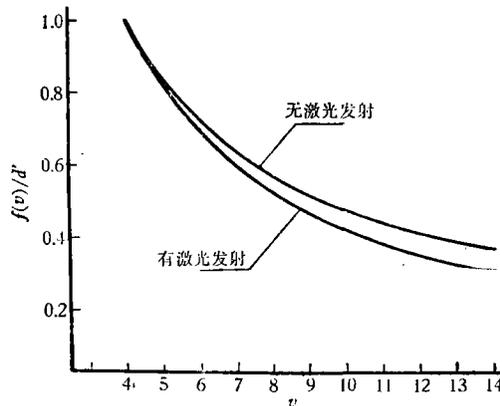
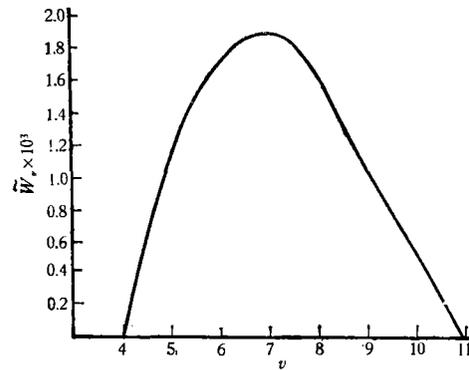


图3 非均匀加宽极限下的振动分布函数曲线

图4 非均匀加宽极限下的功率谱分量
($E_1/k\theta_1 = 2$, $\Delta E/kT = 1/5$, $T \approx 93.5\text{K}$)

下功率谱分量的相对值 \tilde{W}_v 及其随量子数 v 的变化特性。对均匀加宽极限

$$\tilde{W}_v = \frac{W_v(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})(1 - \sqrt{R_1 R_2})}{t_1 L \sqrt{R_2} h \nu_v \Phi f_0} = \frac{(v+1)f(v)}{f_0} \left[\left(\lambda_v - \frac{1}{v+1} \right) \times \frac{(v+1)f(v)}{f_0} - \frac{cK}{B'_0 f_0} - \frac{P_{v+1,v} + A_{v+1,v}}{(v+1)\Phi} \right]; \quad (6.1)$$

对非均匀加宽极限

$$\tilde{W}_v = \frac{W_v(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})(1 - \sqrt{R_1 R_2})}{t_1 K L \sqrt{R_2} \frac{c h \nu_v}{B'_0} \Phi} = \frac{(v+1)f(v)}{f_0} \left\{ \frac{B'_0 f_0^2}{c^2 K^2} \left(\frac{2}{\Delta \nu_D} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \right)^2 \times \left[\left(\lambda_v - \frac{1}{v+1} \right)^2 \frac{(v+1)^2 f^2(v)}{f_0^2} - 2 \left(\lambda_v - \frac{1}{v+1} \right) \frac{P_{v+1,v} + A_{v+1,v}}{(v+1)\Phi} \frac{(v+1)f(v)}{f_0} + \frac{(P_{v+1,v} + A_{v+1,v})^2}{(v+1)^2 \Phi^2} \right] - 1 \right\}, \quad (6.2)$$

计算中使用的 CO 非谐性振子的分子参数为 $E_n = E'_0 n [1 - \delta'(n+1)]$, $\delta' = 0.00598$, $E'_0 = 4.31 \times 10^{-13}$ 尔格, $\Delta E = E'_0 \delta'$, $\theta_n = \theta_r = 2.778\text{K}$, $\delta_{\nu\nu} = \frac{8.4}{\sqrt{T}}$. $P_{v+1,v}$ 和 $A_{v+1,v}$ 的数据及计算见文献[2,12]. 图2给出的结果与试验^[1]和精确数值解^[2-4]基本相符.

参 考 文 献

- [1] M. M. Man, *AIAA J.*, 14(5) (1976), 549.
- [2] N. S. Smith *et al.*, *AIAA Paper*, 75.
- [3] J. A. Lordi *et al.*, *AIAA Paper*, 74-563.
- [4] А. П. Напартович и др., *ПМТФ.*, 4 (1977); *Кван. элек.*, 4 (10) (1977), 2125.
- [5] Н. Г. Басов и др., *Кван. элек.*, 4 (4) (1977), 776.
- [6] W. B. Lacina *et al.*, *IEEE J.*, QE-II (1975), 235.
- [7] C. A. Bram, *Physica*, 86(1972). 533.

- [8] Б. Ф. Гордиен и др., *ЖИМТФ.*, **3** (1974), 13.
[9] W. B. Lacina, AD-729235 (1971).
[10] Y. Nachshon *et al.*, *IEEE J.*, QE-II (1975), 654.
[11] B. D. Fried *et al.*, "The Plasma Dispersion Function", (1961).
[12] S. D. Rockwood *et al.*, *IEEE J.*, QE-9 (1973), 120.

ANALYTICAL THEORY OF STEADY CO LASER

GAO ZHI SUN WEN-CHAO

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In order to predict the characteristics of CO laser, usually nearly a hundred stiff differential equations must be solved numerically. Thus it is of interest to make an analytical approach to this subject. Starting from basic governing equations for vibrational-distribution function and radiative intensities, we have deduced the gain-saturation relation of a steady CO laser, we consider the general case in which both homogeneous and inhomogeneous broadening exist simultaneously for the radiative transition. The effects of multilevel cascade emission is elucidated. For two special cases of two-level emission and homogeneous broadening limit, the present results are in agreement with the theories presented in references [9] and [4], respectively.