微分方程公式的机器推导（I）

刘 尊 全　　　秦 朝 斌
（中国科学院应用数学研究所）（中国科学院力学研究所）

摘　　要

本文阐述了微分方程公式推导程序系统的算法，这个系统已经实现，并成功地用于极限环的研究工作．作为一个具体例子和验证，文中给出了右方为二次多项式方程的机器结果，并指出了 H. H. Баутин 所发表结果中的符号错误．

本文是微分方程公式推导研究成果的第一部分．

运用高速计算机，进行微分方程的公式推导，是数学研究工作的重要进展．在常微分方程的研究工作中，有许多关键性的研究与判定需要大量的公式推导．例如在 Hilbert 第 16 问题中[1]，为了研究极限环的个数，需要考虑从奇点跳出极限环的个数[2,3]．这个问题又与中心和焦点的判定相联系[4]．在研究运动稳定性的问题中，需要作出相应的 Ляпунов 函数[5]，所有这些关键性的问题都需要进行极其复杂的公式推导．

虽然从原则上说，这些工作都有固定的方法可以遵循，但是由于计算复杂，工作量大，所以具体化的结果却很少．例如方程式的右方是不高于二次的多项式的情形，其一般形式的中心与焦点的判定量、有关的 Ляпунов 函数至今没有在文献中出现过．特殊的形式，如 H. H. Баутин 的工作[6] 推导中出现的符号错误，长期没有被人们所复验过．这种符号之差直接影响到稳定性与不稳定性的区分，也关系到极限环可能出现的个数．只有到最近由于极限环个数的研究[3]，通过特殊数值计算才发现这一事实．由此可见，原则上可行的途径，由于推导过于复杂，加上人为的出错可能性极大，以至可能性长期没有转化为现实性．

大型高速电子计算机的出现，为将这种可能性转化为现实性开辟了道路[7]．本文及今后一系列的文章，将报道这一新方向的具体成果，为有关的研究工作者（理论工作者和应用工作者）提供大量可供应用的公式．

一、机器推导的算法[8]

设给定文字方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + X_2(x,y) = y + L_2x^2 + L_3xy + L_4y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + Y_2(x,y) = -x + L_5x^2 + L_6xy + L_7y^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

本文 1979 年 10 月 18 日收到．

要求 Ляпунов 函数

$$F \equiv F(x, y) = \sum_{j=2}^{N} F_j(x, y), \tag{1.2}$$

其中

$$F_2(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

$$F_j(x, y) = \sum_{k=0}^{j} f_{j,k} x^{j-k} y^k.$$

将 $F(x, y)$ 沿方程组(1.1)的积分曲线对 t 求微分，有

$$\begin{aligned}
\frac{dF(x, y)}{dt} &= \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= \left(\sum_{j=2}^{N} \frac{\partial F_j(x, y)}{\partial x}\right)\Big(y + X_2(x, y)\Big) + \left(\sum_{j=2}^{N} \frac{\partial F_j(x, y)}{\partial y}\right)\Big(-x + Y_2(x, y)\Big) \\
&= (xy - yx) \\
&\quad + \left(\frac{\partial F_3(x, y)}{\partial x} y - \frac{\partial F_3(x, y)}{\partial y} x + \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} X_2(x, y)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} Y_2(x, y)\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{\partial F_j(x, y)}{\partial x} y - \frac{\partial F_j(x, y)}{\partial y} x + \frac{\partial F_{j-1}(x, y)}{\partial x} X_2(x, y)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial F_{j-1}(x, y)}{\partial y} Y_2(x, y)\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{\partial F_N(x, y)}{\partial x} y - \frac{\partial F_N(x, y)}{\partial y} x + \frac{\partial F_{N-1}(x, y)}{\partial x} X_2(x, y)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial F_{N-1}(x, y)}{\partial y} Y_2(x, y)\right).
\end{aligned}$$

现在命上式中每一个括号项为零，依次求解出 $F_j(x, y)$.

这里有两种情形，即 j 为奇数或为偶数，它们有本质的区别. j 为奇数，$F_j(x, y)$ 一定有解，j 为偶数，则只有方程组(1.1)的系数 $L_2, \cdots\cdots, L_7$ 满足一定的条件时，$F_j(x, y)$ 才有解. 我们进行公式推导的目的，就是要找出这些条件，以及相应的 $F_j(x, y)$.

已知 $F_2(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$，可以依次求解 $F_3, F_4, \cdots\cdots$. 一般如已知 $F_{j-1}(x, y)$ $(j \geqslant 3)$，要求 $F_j(x, y)$，即要求

$$\frac{\partial F_j(x, y)}{\partial x} y - \frac{\partial F_j(x, y)}{\partial y} x = -\frac{\partial F_{j-1}}{\partial x} X_2 \frac{\partial F_{j-1}}{\partial y} Y_2$$

或

$$\sum_{k=0}^{j-1} (j-k) f_{j,k} x^{j-k-1} y^{k+1} - \sum_{k=1}^{j} k f_{j,k} x^{j-k+1} y^{k-1} = \sum_{k=0}^{j} h_{j,k} x^{j-k} y^k,$$

右方 $h_{j,k}$ 为已知，左方 $f_{j,k}$ 为待求的.

当 i 为奇数时，$f_{j,k}(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, j)$ 为 $j+1$ 个，即偶数个，它们自动分为两组，即

$$f_{j,1}, f_{j,3}, f_{j,5}, \cdots\cdots, f_{j,j} \text{ 和 } f_{j,0}, f_{j,2}, f_{j,4}, \cdots\cdots, f_{j,j-1}.$$

每一组又自相联系，具体有

$$\begin{aligned} -f_{j,1} \qquad\qquad\qquad\qquad &= h_{j,0}, \\ (j-1)f_{j,1} \quad - 3f_{j,3} \qquad\qquad &= h_{j,2}, \\ \cdots\cdots \qquad\qquad & \\ 2f_{j,j-2} - jf_{j,j} &= h_{j,j-1} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} f_{j,j-1} \qquad\qquad\qquad\qquad &= h_{j,j} \\ -(j-1)f_{j,j-1} + 3f_{j,j-3} \qquad &= h_{j,j-2}, \\ \cdots\cdots \qquad\qquad & \\ -2f_{j,2} + jf_{j,0} &= h_{j,1}. \end{aligned}$$

上面两组方程都是三角矩阵，可以依次解出

$$f_{j,1}, f_{j,3}, \cdots\cdots, f_{j,j} \text{ 和 } f_{j,j-1}, f_{j,j-3}, \cdots\cdots, f_{j,0}.$$

当 i 为偶数时，$f_{j,k}(k=0, 1, \cdots\cdots, j)$ 有 $j+1$ 项，即有奇次项。这时也分为两组，即

$$f_{j,0}, f_{j,2}, \cdots\cdots, f_{j,j} \text{ 和 } f_{j,1}, f_{j,3}, \cdots\cdots, f_{j,j-1}.$$

前一组是 $\frac{j}{2}+1$ 个量满足 $\frac{j}{2}$ 个方程，故一定有解，例如取 $f_{j,j}=0$，则可依次解出

$$f_{j,j-2}, f_{j,j-4}, \cdots\cdots, f_{j,2}, f_{j,0}.$$

问题在于后面一组，它有 $\frac{j}{2}$ 个量，但要满足 $\frac{j}{2}+1$ 个方程．因此，如要有解，即方程组不矛盾，则必须对 $h_{j,k}$ 加上一定的条件，也就是要对 $L_m(m=2, 3, \cdots\cdots, 7)$ 加上条件，这种条件，即为所求的判定条件．具体作法，例如由前 $\frac{j}{2}$ 个方程依此解出 $f_{j,1}, f_{j,3}, \cdots\cdots, f_{j,j-1}$，则最后一个方程

$$f_{j,j-1} = h_{j,j}$$

即所求的条件．记 $V_{2n-1} = f_{2n,2n-1} - h_{2n,2n}$.

这样作了以后，对于偶数 $2n \geqslant 4$，即有

$$F(x, y) = \sum_{j=2}^{2n} F_j(x, y), \quad F_2(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = V_3 y^4 + V_5 y^6 + \cdots\cdots + V_{2n-1} y^{2n} + \cdots\cdots.$$

这里 V_j 都是 $L_m(m=2, 3, \cdots\cdots, 7)$ 的齐次多项式，不难用数学归纳法得出 $f_{2j,k}$ 是 L_m 的 $2(j-1)$ 次多项式，因此 V_{2k-1} 也是 L_m 的 $2k-2$ 次多项式．

这里 $F(x, y) =$ 常数．在原点附近是封闭曲线族，它们可以作为求解运动稳定性的 Ляпунов 函数．

具体判定法如下：

$V_3 > 0$，不稳定；$V_3 < 0$，渐近稳定．

$V_3=0$，$V_5>0$，不稳定；$V_5<0$，渐近稳定.

$V_3=V_5=0$，$V_7>0$，不稳定；$V_7<0$，渐近稳定.

$V_3=V_5=V_7=0$，根据 H. H. Баутин 的结果，这是中心型稳定，但不是渐近稳定.

二、一个具体情形的结果

为了不失普遍性，不妨用旋转变换

$$\xi=x\cos\theta-y\sin\theta,\quad \eta=x\sin\theta+y\cos\theta.$$

将方程组 (2.1) 化为 (ξ,η) 的方程，只要取 θ，使

$$(L_2+L_4)\sin\theta+(L_5+L_7)\cos\theta=0,$$

则可将方程(2.1)中的方程化为特别形式. 即使方程(1.1)中的两个系数 $L_5+L_7=0$，故可减少一个参数，而不失普遍性，即参数降为五个：L_2, L_3, L_4, L_5, L_6.

现将这种特别方程写成下面的形式：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-L_3x^2-(2L_2+L_5)xy+L_6y^2=X,\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-x-L_2x^2+(2L_3+L_4)xy+L_2y^2=Y.\end{cases}\tag{2.1}$$

这种写法的好处在于，求

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\equiv-2L_3x-(2L_2+L_5)y+(2L_3+L_4)x+2L_2y\equiv L_4x-L_5y.$$

只要 $L_4=L_5=0$，则 $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}\equiv0$，即得中心，可以简化验算.

经机器计算(详见后面之附录)，结果如下：

$$V_3=-\frac{1}{3}L_3L_5+\frac{1}{3}L_5L_6=-\frac{1}{3}L_5(L_3-L_6).$$

V_5 有 17 项，按 L_5 的升幂排列有

$$\begin{aligned}V_5=&\left\{\frac{1}{3}L_2L_4L_6^2-\frac{2}{3}L_2L_4L_3L_6+\frac{1}{3}L_2L_4L_3^2+\frac{1}{15}L_2L_4^2L_3-\frac{1}{15}L_2L_4^2L_6\right\}\\&+L_5\left\{\frac{14}{9}L_3L_6^2-\frac{7}{9}L_3^2L_6-\frac{11}{45}L_3^2L_4+\frac{8}{15}L_3L_4^2\right.\\&\left.+\frac{64}{45}L_3L_4L_6-\frac{8}{15}L_4^2L_6-\frac{53}{45}L_4L_6^2-\frac{7}{9}L_6^3\right\}\\&+L_5^2\left\{-\frac{1}{3}L_2L_3+\frac{1}{3}L_2L_6\right\}+L_5^3\left\{-\frac{1}{15}L_3+\frac{1}{15}L_6\right\}\\=&\frac{1}{15}L_2L_4(L_3-L_6)(L_4+5L_3-5L_6)\\&+\frac{L_5(L_3-L_6)}{3}\left\{-\frac{1}{5}L_5^2-L_5L_2-\frac{7}{3}(L_3-L_6)L_6\right.\\&\left.+\frac{8}{5}L_4^2+\frac{1}{15}L_4(-11L_3+53L_6)\right\},\end{aligned}$$

故

$$V_5 = \frac{1}{15} L_2L_4(L_3 - L_6)(L_4 + 5L_3 - 5L_6) + V_3(*),$$

$(*)$为 L_m 的二次齐次式．或记

$$V_3 = \tilde{v}_3 = -\frac{1}{3} L_2(L_3 - L_6), \quad V_5 = \tilde{v}_5 + \tilde{v}_3(*),$$

$$\tilde{v}_5 = \frac{1}{15} L_2L_4(L_3 - L_6)(L_4 + 5L_3 - 5L_6).$$

再其次是 V_7，它有 74 项，其中含 L_5 的有 55 项，不含 L_5 的有 19 项．

含 L_5 的 55 项，利用 $V_3 = 0$，即利用 $L_3L_5 = L_5L_6$，均自动消去(注意：

$$L_5L_3^m = (L_5L_6)L_3^{m-1} = L_6(L_5L_3^{m-1}) = \cdots\cdots = L_5L_6^m).$$

故只要研究不含 L_5 的项，这时利用 $\tilde{v}_5 = 0$，则有

$$L_2L_4^2(L_3 - L_6) = -5L_2L_4(L_3 - L_6)^2.$$

用此式可将 L_4 降到最低次，即 $L_2L_4^m(L_3 - L_6) = (-5)^{m-1}L_2L_4(L_3 - L_6^m), m \geqslant 2$.

V_7 中不含 L_5 的项有 19 项，按 L_4 之降幂排列，并用 $\tilde{v}_5 = 0$，将 L_4 的方次降低．含 L_4^4 的二项

$$\frac{1}{315} L_2L_4^4(47L_6 - 47L_3) = -\frac{47}{315} L_2L_4^4(L_3 - L_6) = \frac{-47}{315}(-5)^3L_2L_4(L_3 - L_6)^4$$

$$= \frac{1}{315} L_2L_4(L_3 - L_6)^2[5875L_3^2 - 11750L_3L_6 + 5875L_6^2].$$

含 L_4^3 的 3 项

$$\frac{1}{315} L_2L_4^3(-96L_6^2 - 166L_3^2 + 262L_3L_6)$$

$$= \frac{1}{315} L_2L_4^3(L_3 - L_6)(-166L_3 + 96L_6)$$

$$= \frac{1}{315} (-5)^2L_2L_4(L_3 - L_6)^3(-166L_3 + 96L_6)$$

$$= \frac{1}{315} L_2L_4(L_3 - L_6)^2(-4150L_3^2 + 6550L_3L_6 - 2400L_6^2).$$

含 L_4^2 的 6 项

$$\frac{1}{315} L_2L_4^2(18L_2^2L_3 - 18L_2^2L_6 + 408L_3^3 - 1388L_3^2L_6 + 1562L_3L_6^2 - 582L_6^3)$$

$$= \frac{18}{315} L_2^3L_4^2(L_3 - L_6) + \frac{1}{315} L_2L_4^2(L_3 - L_6)(408L_3^2 - 980L_3L_6 + 582L_6^2)$$

$$= \frac{18 \times (-5)}{315} L_2^3L_4(L_3 - L_6)^2 + \frac{(-5)}{315} L_2L_4(L_3 - L_6)^2(408L_3^2 - 980L_3L_6 + 582L_6^2)$$

$$= \frac{1}{315} L_2L_4(L_3 - L_6)(-90L_2^2 - 2040L_3^2 + 4900L_3L_6 - 2910L_6^2).$$

含 L_4^1 的 8 项

$$\frac{1}{315} L_2L_4\{L_2^2(180L_3^2 - 360L_3L_6 + 180L_6^2)$$

$$+315L_3^4-420L_3^3L_6-490L_3^2L_6^2+980L_3L_6^3-385L_6^4\}$$

$$=\frac{1}{315}L_2L_4(L_3-L_6)^2\{180L_2^2+315L_3^2+210L_3L_6-385L_3^2\}.$$

合并上述 19 项得到，在 $\tilde{v}_3=\tilde{v}_5=0$ 条件下，

$$\tilde{v}_7=\frac{1}{315}L_2L_4(L_3-L_6)^2(90L_2^2-90L_3L_6+180L_6^2)$$

$$=-\frac{2}{7}L_2L_4(L_3-L_6)^2(L_3L_6-L_2^2-2L_3^2),$$

而

$$V_7=\tilde{v}_7+(*)\tilde{v}_5+(**)\tilde{v}_3.$$

这里(*)为 L_m 的二次齐次式，(**) 为 L_m 的四次齐次式.

总结得到

$$\tilde{v}_3=-\frac{1}{3}L_5(L_3-L_6),$$

$$\tilde{v}_5=\frac{1}{15}L_2L_4(L_3-L_6)(L_4+5L_3-5L_6),$$

$$\tilde{v}_7=-\frac{2}{7}L_2L_4(L_3-L_6)^2(L_3L_6-L_2^2-2L_3^2).$$

$$\tilde{v}_3=V_3,\quad \tilde{v}_5=V_5|_{\tilde{v}_3=0},\quad \tilde{v}_7=V_7|_{\tilde{v}_3=\tilde{v}_5=0}.$$

现在可以和 Н. Н. Баутин 的结果对比，Н. Н. Баутин 所用的方程化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda_1x-y-\lambda_3x^2+(2\lambda_2+\lambda_5)xy+\lambda_6y^2,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+\lambda_1y+\lambda_2x^2+(2\lambda_3+\lambda_4)xy-\lambda_2y^2.\end{cases}$$

$\lambda_1=0$ 时有中心焦点的判别问题，以 $-y$ 代 y 即为方程 (2.1)，稳定性的性质不变.

化为极坐标有 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$,

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{\rho^2H_3(\varphi)}{1+\rho K_3(\varphi)},$$

$$H_3(\varphi)=-\lambda_3\cos^3\varphi+(3\lambda_2+\lambda_5)\cos^2\varphi\sin\varphi+(2\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6)\cos\varphi\sin^2\varphi-\lambda_2\sin^3\varphi,$$

$$K_3(\varphi)=\lambda_2\cos^3\varphi+(3\lambda_3+\lambda_4)\cos^2\varphi\sin\varphi+(-3\lambda_2-\lambda_5)\cos\varphi\sin^2\varphi-\lambda_6\sin^3\varphi.$$

求初值为 $\varphi=0$, $\rho=\rho_0$ 的级数解

$$\rho=\rho(\varphi;\lambda_j;\rho_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_0^n v_n(\varphi,\lambda_j),$$

其中 $\rho_0=\rho(0;\lambda_j;\rho_0)$.

当 $\lambda_1=0$, Н. Н. Баутин 得到

$$v_1(2\pi;\lambda_j)=1,\quad v_2(2\pi;\lambda_j)=0,$$

$$v_3(2\pi;\lambda_j)=\bar{v}_3,\quad v_4(2\pi;\lambda_j)=\bar{v}_3\theta_4^{(3)},$$

$$v_5(2\pi;\lambda_j)=\bar{v}_5+\bar{v}_3\theta_5^{(3)},\quad v_6(2\pi;\lambda_j)=\bar{v}_5\theta_6^{(5)}+\bar{v}_3\theta_6^{(3)},$$

$$v_7(2\pi;\lambda_j)=\bar{v}_7+\bar{v}_5\theta_7^{(5)}+\bar{v}_3\theta_7^{(3)},$$

$$\bar{v}_3=-\frac{\pi}{4}\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6),$$

$$\bar{v}_5=\frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6),$$

$$\bar{v}_7=\frac{25\pi}{32}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_5-2\lambda_6^2-\lambda_2^2)$$

的稳定性,即 t 增加时的行为,亦即 θ 增加时的行为,故有判据:

$\bar{v}_3>0$, 不稳定;

$\bar{v}_3<0$, 渐近稳定.

$\bar{v}_3=0$, $\bar{v}_5>0$, 不稳定; $\bar{v}_5<0$, 渐近稳定.

$\bar{v}_3=0$, $\bar{v}_5=0$, $\bar{v}_7>0$, 不稳定; $\bar{v}_7<0$, 渐近稳定.

$\bar{v}_3=\bar{v}_5=\bar{v}_7=0$, 为中心,稳定,但非渐近稳定. 将上述两结果对比,如表 1.

表 1

	Н. Н. Баутин 结果	本 文 结 果
3	$\bar{v}_3=\frac{-\pi}{4}\lambda_5(\lambda_3-\lambda_6)$	$\tilde{v}_3=-\frac{1}{3}L_5(L_3-L_6)$
5	$\bar{v}_5=\frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6)$	$\tilde{v}_5=\frac{1}{15}L_2L_4(L_3-L_6)(L_4+5L_3-5L_6)$
7	$\bar{v}_7=\frac{25\pi}{32}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_5-2\lambda_6^2-\lambda_2^2)$	$\tilde{v}_7=-\frac{2}{7}L_2L_4(L_3-L_6)^2(L_3L_5-2L_6^2-L_2^2)$

由表 1 看出,$\bar{v}_j$ 与 $\tilde{v}_j$ 应同号. 表中 $\bar{v}_3$ 与 $\tilde{v}_3$ 同号, $\bar{v}_5$ 与 $\tilde{v}_5$ 同号, 但 $\bar{v}_7$ 与 $\tilde{v}_7$ 反号, 因此二者符号必有一错. 实际上 $\bar{v}_7$ 错了符号, 应该加上一个负号. 这一现象, 最初是在特定的数值计算中发现的[2,3]. 现在,我们从公式的机器推导中,用文字的推导将它揭示出来. 这个符号的差别,联系到无限远的稳定性情况,可以相差一个极限环的存在性[3],因此,不能不加以改正.

机器推导的其它结果,以及有关的 Ляпунов 函数将在以后各文陆续报道.

本工作是在秦元勋教授指导下进行的,徐伟宣、史松龄同志参加了初期的讨论;另外,冯济舟、张德福、赵振纪同志在计算过程中给予了大力支持,特此一并致谢.

附录: 机器推导的 V_3, V_5, V_7 输出结果

```
V3=
+(
1/-3  .L1**0  .L2**0  .L3**1  .L4**0  .L5**1  .L6**0  .L7**0
1/ 3  .L1**0  .L2**0  .L3**0  .L4**0  .L5**1  .L6**1  .L7**0
).x**0  .y**4

V5=
+(
-1/ -3  .L1**0  .L2**1  .L3**2  .L4**1  .L5**0  .L6**0  .L7**0
```

−1/−15	.L1**0	.L2**1	.L3**1	.L4**2	.L5**0	.L6**0	.L7**0
1/−15	.L1**0	.L2**1	.L3**0	.L4**2	.L5**0	.L6**1	.L7**0
1/ 3	.L1**0	.L2**1	.L3**0	.L4**1	.L5**0	.L6**2	.L7**0
2/ −3	.L1**0	.L2**1	.L3**1	.L4**1	.L5**0	.L6**1	.L7**0
−1/ 3	.L1**0	.L2**1	.L3**1	.L4**0	.L5**2	.L6**0	.L7**0
1/ 3	.L1**0	.L2**1	.L3**0	.L4**0	.L5**2	.L6**1	.L7**0
−7/ 9	.L1**0	.L2**0	.L3**2	.L4**0	.L5**1	.L6**1	.L7**0
−11/ 45	.L1**0	.L2**0	.L3**2	.L4**1	.L5**1	.L6**0	.L7**0
8/ 15	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**2	.L5**1	.L6**0	.L7**0
−64/−45	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**1	.L5**1	.L6**1	.L7**0
−14/ −9	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**0	.L5**1	.L6**2	.L7**0
−1/ 15	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**0	.L5**3	.L6**0	.L7**0
8/−15	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**2	.L5**1	.L6**1	.L7**0
53/−45	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**1	.L5**1	.L6**2	.L7**0
−7/ 9	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**0	.L5**1	.L6**3	.L7**0
1/15	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**0	.L5**3	.L6**1	.L7**0

).x**0 .y**6

$V_7=$

+(

−4/ 3	.L1**0	.L2**1	.L3**3	.L4**1	.L5**0	.L6**1	.L7**0
28/ −3	.L1**0	.L2**2	.L3**2	.L4**0	.L5**1	.L6**1	.L7**0
1388/−315	.L1**0	.L2**1	.L3**2	.L4**2	.L5**0	.L6**1	.L7**0
1562/−315	.L1**0	.L2**1	.L3**1	.L4**2	.L5**0	.L6**2	.L7**0
−8/ 7	.L1**0	.L2**3	.L3**1	.L4**1	.L5**0	.L6**1	.L7**0
20/ 21	.L1**0	.L2**2	.L3**1	.L4**1	.L5**1	.L6**1	.L7**0
262/ 315	.L1**0	.L2**1	.L3**1	.L4**3	.L5**0	.L6**1	.L7**0
−28/ −9	.L1**0	.L2**1	.L3**1	.L4**1	.L5**0	.L6**3	.L7**0
1/ 1	.L1**0	.L2**1	.L3**4	.L4**1	.L5**0	.L6**0	.L7**0
−8/ −3	.L1**0	.L2**2	.L3**3	.L4**0	.L5**1	.L6**0	.L7**0
136/ 105	.L1**0	.L2**1	.L3**3	.L4**2	.L5**0	.L6**0	.L7**0
−4/ −7	.L1**0	.L2**3	.L3**2	.L4**1	.L5**0	.L6**0	.L7**0
−8/ 35	.L1**0	.L2**2	.L3**2	.L4**1	.L5**1	.L6**0	.L7**0
−166/ 315	.L1**0	.L2**1	.L3**2	.L4**3	.L5**0	.L6**0	.L7**0
−14/ 9	.L1**0	.L2**1	.L3**2	.L4**1	.L5**0	.L6**2	.L7**0
2/ 35	.L1**0	.L2**3	.L3**1	.L4**2	.L5**0	.L6**0	.L7**0
2287/−315	.L1**0	.L2**1	.L3**2	.L4**0	.L5**2	.L6**1	.L7**0
1313/ 945	.L1**0	.L2**1	.L3**3	.L4**0	.L5**2	.L6**0	.L7**0
−179/ 105	.L1**0	.L2**1	.L3**2	.L4**1	.L5**2	.L6**0	.L7**0
47/−315	.L1**0	.L2**1	.L3**1	.L4**4	.L5**0	.L6**0	.L7**0
192/ 35	.L1**0	.L2**1	.L3**1	.L4**1	.L5**2	.L6**1	.L7**0
1097/ 105	.L1**0	.L2**1	.L3**1	.L4**0	.L5**2	.L6**2	.L7**0
−773/630	.L1**0	.L2**1	.L3**1	.L4**2	.L5**2	.L6**0	.L7**0
32/ 3	.L1**0	.L2**2	.L3**1	.L4**0	.L5**1	.L6**2	.L7**0
493/ 630	.L1**0	.L2**2	.L3**1	.L4**2	.L5**1	.L6**0	.L7**0
58/−315	.L1**0	.L2**3	.L3**1	.L4**0	.L5**2	.L6**0	.L7**0
−37/ 90	.L1**0	.L2**2	.L3**1	.L4**0	.L5**3	.L6**0	.L7**0
−11/ 90	.L1**0	.L2**1	.L3**1	.L4**0	.L5**4	.L6**0	.L7**0
−194/ 105	.L1**0	.L2**1	.L3**0	.L4**2	.L5**0	.L6**3	.L7**0
−4/ −7	.L1**0	.L2**3	.L3**0	.L4**1	.L5**0	.L6**2	.L7**0

−76/ 105	.L1**0	.L2**2	.L3**0	.L4**1	.L5**1	.L6**2	.L7**0
−32/ 105	.L1**0	.L2**1	.L3**0	.L4**3	.L5**0	.L6**2	.L7**0
−11/ 9	.L1**0	.L2**1	.L3**0	.L4**1	.L5**0	.L6**4	.L7**0
2/ −35	.L1**0	.L2**3	.L3**0	.L4**2	.L5**0	.L6**1	.L7**0
47/ 315	.L1**0	.L2**1	.L3**0	.L4**4	.L5**0	.L6**1	.L7**0
−397/ 105	.L1**0	.L2**1	.L3**0	.L4**1	.L5**2	.L6**2	.L7**0
865/−189	.L1**0	.L2**1	.L3**0	.L4**0	.L5**2	.L6**3	.L7**0
−773/630	.L1**0	.L2**1	.L3**0	.L4**2	.L5**2	.L6**1	.L7**0
−4/ 1	.L1**0	.L2**2	.L3**0	.L4**0	.L5**1	.L6**3	.L7**0
493/−630	.L1**0	.L2**2	.L3**0	.L4**2	.L5**1	.L6**1	.L7**0
−58/−315	.L1**0	.L2**3	.L3**0	.L4**0	.L5**2	.L6**1	.L7**0
37/ 90	.L1**0	.L2**2	.L3**0	.L4**0	.L5**3	.L6**1	.L7**0
−11/ −90	.L1**0	.L2**1	.L3**0	.L4**0	.L5**4	.L6**1	.L7**0
−2/ 3	.L1**0	.L2**0	.L3**3	.L4**0	.L5**1	.L6**2	.L7**0
−79/ 105	.L1**0	.L2**0	.L3**3	.L4**1	.L5**1	.L6**1	.L7**0
1247/315	.L1**0	.L2**0	.L3**2	.L4**2	.L5**1	.L6**1	.L7**0
2507/315	.L1**0	.L2**0	.L3**2	.L4**1	.L5**1	.L6**2	.L7**0
152/ 27	.L1**0	.L2**0	.L3**2	.L4**0	.L5**1	.L6**3	.L7**0
−67/ 42	.L1**0	.L2**0	.L3**2	.L4**0	.L5**3	.L6**1	.L7**0
−4/ 3	.L1**0	.L2**0	.L3**4	.L4**0	.L5**1	.L6**1	.L7**0
1/ 45	.L1**0	.L2**0	.L3**4	.L4**1	.L5**1	.L6**0	.L7**0
41/ 35	.L1**0	.L2**0	.L3**3	.L4**2	.L5**1	.L6**0	.L7**0
−433/−1890	.L1**0	.L2**0	.L3**3	.L4**0	.L5**3	.L6**0	.L7**0
3629/−1890	.L1**0	.L2**0	.L3**2	.L4**3	.L5**1	.L6**0	.L7**0
218/ −315	.L1**0	.L2**0	.L3**2	.L4**1	.L5**3	.L6**0	.L7**0
1/ 3	.L1**0	.L2**0	.L3**5	.L4**0	.L5**1	.L6**0	.L7**0
9469/−630	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**2	.L5**1	.L6**2	.L7**0
−211/ 15	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**1	.L5**1	.L6**3	.L7**0
14857/−1890	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**3	.L5**1	.L6**1	.L7**0
−751/ 630	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**4	.L5**1	.L6**0	.L7**0
1027/ 630	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**1	.L5**3	.L6**1	.L7**0
−101/ −630	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**2	.L5**3	.L6**0	.L7**0
−151/ 27	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**0	.L5**1	.L6**4	.L7**0
257/ 105	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**0	.L5**3	.L6**2	.L7**0
1/ −105	.L1**0	.L2**0	.L3**1	.L4**0	.L5**5	.L6**0	.L7**0
99/ 10	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**2	.L5**1	.L6**3	.L7**0
−718/−105	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**1	.L5**1	.L6**4	.L7**0
−802/−135	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**3	.L5**1	.L6**2	.L7**0
−751/−630	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**4	.L5**1	.L6**1	.L7**0
−197/ 210	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**1	.L5**3	.L6**2	.L7**0
−101/ 630	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**2	.L5**3	.L6**1	.L7**0
44/ 27	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**0	.L5**1	.L6**5	.L7**0
−146/ 135	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**0	.L5**3	.L6**3	.L7**0
−1/−105	.L1**0	.L2**0	.L3**0	.L4**0	.L5**5	.L6**1	.L7**0

).x**0. y**8

参 考 文 献

[1] Hilbert, D., *Archiv der Math. u Phys.* (3), **1** (1901), 44—63, 213—237.

[2] 秦元勋、蒲富全，数学学报，**9**(1959)，213—226.

[3] 史松龄，中国科学，1979，11，1051.

[4] Poincaré, H., *Jour. Math. Pures et Appl.* (3), **7** (1881), 375—422.

[5] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости двежения, Изд. Акад. Наук, 1948.

[6] Баутин, Н. Н., Матем. сбор., **30** (1952), 72, 181—195.

[7] 刘尊全，数学研究与应用，1979，4，1—17.

[8] 秦元勋，微分方程所定义的积分曲线，科学出版社，1959，82—84，367—384.