星系螺旋结构三维密度波的流体动力学理论
——整体模式解及厚度效应

徐　建　军
（中国科学院力学研究所）

摘　　要

本文求解了有限厚星系盘密度波的传播方程，得出了一致有效渐近解及色散方程，在此基础上，我们分析了盘厚、旋臂倾角以及共转圈上其它物理参数对螺旋图象的影响．结果表明：在其它条件不变时，盘越厚，模式解的增长率越低．由此推出对比较厚的透镜状星系，椭圆星系不可能存在螺旋结构．

一、引　　言

在文献[1]中，我们曾把扰动密度表示为：

$$\rho_1 = \hat{\rho}_1(r, z) H_m(\zeta) e^{i(\omega t - m\theta)}. \tag{1.1}$$

然后，由泊松方程及流体力学方程组推出了在厚度参数 ε 及“准单色波”参数 ε_* 一级近似下，星盘对称面上的扰动引力势：

$$\begin{cases} \psi_1|_{z=0} = \tilde{\psi}_1 H_m(\zeta) e^{i(\omega t - m\theta)},\ \tilde{\psi}_1 = \hat{\psi}_{10} = -\dfrac{z_{*1}^{(0)}}{k}(1 + \psi_{\varepsilon_0} + \psi_{\varepsilon_{*0}}), \\ \psi_{\varepsilon_{*0}} = O(\varepsilon_*),\ \left(\varepsilon_* = \dfrac{1}{k}\dfrac{d\ln k}{dr}\right);\ \psi_{\varepsilon_0} = -D_0(r)k - D_1(r), \\ D_0(r) = 4.1588 z_{*1}^{(0)} \varepsilon(r),\ \ D_1(r) = 1.8100 z_{*1}^{(0)} \dfrac{\varepsilon(r) C(r)}{\sigma_0(r)} + (8\ln 4) z_{*1}^{(0)} G(\zeta)\dfrac{d\varepsilon}{dr} \end{cases} \tag{1.2}$$

和波的传播方程

$$\begin{aligned} & G(1+\mu)\frac{dk}{dr} + F(1+\mu)k^2 + Gk\left[\frac{2k_0}{Q}D_0' - \frac{2k_0}{Q}\frac{F}{G}(1 - D_1) + R_{10}\right] - k_0^2(1-\nu^2) \\ & \quad + R_{00} + \frac{2k_0}{Q}\left[G(D_1' - \psi_{\varepsilon_{*0}}') - GR_2(1 + \psi_{\varepsilon_0} + \psi_{\varepsilon_{*0}}) + \frac{R_{30}}{k}(1 + \psi_{\varepsilon_0} + \psi_{\varepsilon_{*0}})\right] \\ & \quad - \frac{2k_0}{Q}\left[\frac{d}{dr}\beta(1 + \psi_{\varepsilon_0} + \psi_{\varepsilon_{*0}}) + G\beta k(1 + \psi_{\varepsilon_0} + \psi_{\varepsilon_{*0}}) + R_2\beta(1 + \psi_{\varepsilon_0} + \psi_{\varepsilon_{*0}})\right] \\ & = -\frac{1}{\kappa\nu}\left(\frac{2m\Omega_0}{r}\right)\left\{\frac{2k_0}{Q}\left(-\varepsilon_* + \frac{R_{3*}}{k}\right) + GkR_{1*} + R_{0*} + \frac{2k_0}{Q}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{\psi_{\varepsilon_0} + \psi_{\varepsilon_{*0}}}{k}\right)\right.\right. \end{aligned}$$

本文 1979 年 5 月 15 日收到，1980 年 3 月 15 日收到修改稿．

$$+ R_{3*}\frac{\phi_{\varepsilon_0}+\phi_{\varepsilon_{*0}}}{k} - \beta(1+\phi_{\varepsilon_0}+\phi_{\varepsilon_{*0}})\Big]\Big\}. \tag{1.3}$$

这里

$$\begin{cases} Q = \dfrac{2\kappa M_r}{\varepsilon\rho_{00}z_{*1}^{(0)}},\ k_0 = \dfrac{\kappa}{M_r},\ \mu = \dfrac{2k_0D_0}{Q},\ G = H_m'/H_m,\ F = G^2+G',\ e = \dfrac{M_r}{M_\theta}, \\ S = \dfrac{d\ln\Omega_0}{d\ln r},\ \beta = \dfrac{1}{k}\dfrac{d\ln\tilde{\phi}_1}{dr} \approx \varepsilon_* - \dfrac{W_{*1}^{(0)}}{z_{*1}^{(0)}k}\dfrac{d(\varepsilon k)}{dr},\ \varepsilon\rho_{00} = \rho_{00}^{(0)} + \varepsilon\rho_{00}^{(1)} + \cdots, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} R_{00} = -\dfrac{d^2\ln\varepsilon\rho_{00}}{dr^2} - \dfrac{d\ln\varepsilon\rho_{00}}{dr}\dfrac{d}{dr}\ln\dfrac{M_r^2r}{\kappa^2(1-\nu^2)} - \left(\dfrac{m}{er}\right)^2 + \dfrac{4m\Omega_0}{e^2r}\dfrac{\nu'}{\kappa(1-\nu^2)}, \\ R_{0*} = \dfrac{d\ln\varepsilon\rho_{00}}{dr} + \dfrac{1}{e^2}\dfrac{d}{dr}\ln\left(\dfrac{M_\theta^2\Omega_0}{\kappa^2}\right), \\ R_{10} = \dfrac{d}{dr}\ln\left(\dfrac{M_r^2r}{\varepsilon\rho_{00}\kappa^2}\right),\ R_{1*} = \left(1-\dfrac{1}{e^2}\right), \\ R_2 = \dfrac{d}{dr}\ln\left(\dfrac{\varepsilon\rho_{00}r}{\kappa^2(1-\nu^2)}\right),\ R_{30} = \left(\dfrac{m}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{4m\Omega_0}{r}\right)\dfrac{\nu'}{\kappa(1-\nu^2)}, \\ R_{3*} = \dfrac{d}{dr}\ln\left(\dfrac{\varepsilon\rho_{00}\Omega_0}{\kappa^2}\right),\ \dfrac{4m\Omega_0\nu'}{\kappa r} = -\left[\left(\dfrac{2m\Omega_0}{\kappa r}\right)S + \dfrac{4m\Omega_0}{\kappa r}\nu\left(\dfrac{d\ln\kappa}{dr}\right)\right]. \end{cases} \tag{1.5}$$

在本文中，我们采取“准单色波”近似，在方程 (1.3) 中令 $\varepsilon_* \to 0$，并且由于物理上的原因(按林家翘提出的观点)暂不考虑方程右端所表示的共转圈共振项．令 $\hat{x} = k/k_0$，便可把方程 (1.3) 改写为：

$$\frac{dx}{dr} = f\hat{x}^2 + g\hat{x} + h, \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} f = -\dfrac{F}{G}k_0,\ g = \dfrac{2Fk_0}{G}\dfrac{1-D_2}{(1+\mu)Q} - \dfrac{R_{10}+\mu R_2}{1+\mu} - \dfrac{d\ln k_0}{dr}, \\ h = \dfrac{k_0}{(1+\mu)G}(1-\nu^2) + \dfrac{2}{(1+\mu)Q}[R_2(1-D_2) - D_2'] - \dfrac{R_{00}}{(1+\mu)Gk_0} \\ \quad - \dfrac{2R_{30}}{(1+\mu)GQ}\left[\dfrac{1-D_2}{k_0\hat{x}} - D_0\right],\ D_2 = D_{2R} + iD_2I = \dfrac{G}{F}D_0' + D_1. \end{cases} \tag{1.7}$$

显然，如果从微分方程(1.6)解出函数 $k(r,\varepsilon)$ 及 $\zeta(r,\varepsilon)$，那末扰动密度波 (1.1) 就完全确定了．在文献[1]中，我们讨论了该方程的局部近似解，现在将进一步求其整体模式解，并分析盘厚对模式解的影响．

二、波传播方程的迭代方案

下面叙述对复型、非线性常微分方程(1.6)的处理方案．首先注意到方程的系数依赖参数 ε，而所求的未知量 (ζ, k, ω) 也是 ε 的函数，并且我们要找 ε 的一级近似解．在盘状星系中，一般满足关系式：$k_0 \gg 1$，从而

$$\varepsilon \ll \varepsilon k_0. \tag{2.1}$$

因此，ε 还可作进一步的简化，即只保留含参数 $\mu = O(\varepsilon k_0)$ 的项，而略去其它的 $O(\varepsilon)$ 项．在计算基态量时，可在其中置 $\varepsilon = 0$．其次注意：函数 G, F, f, g, h 均含未知量 $(\zeta, \hat{x})$，因此方程 (1.6) 并非通常的 Riccati 方程．不过为了求解，可采用迭代方案，如方框图

$$\text{令 } \hat{x} = \hat{x}_{(0)}(r) \Rightarrow \zeta = \zeta_{(0)}(r)$$

$$\Downarrow$$

$$G_{(0)} = G(\zeta_{(0)}),\ F_{(0)} = F(\zeta_{(0)}),\ f_{(0)} = f(\zeta_{(0)})$$
$$g_{(0)} = g(\zeta_{(0)}),\ h_{(0)} = h(\zeta_{(0)}, \hat{x}_{(0)})$$

$$\Downarrow$$

解 Riccati 方程:

$$\frac{d\hat{x}_{(1)}}{dr} = f_{(0)}\hat{x}_{(1)}^2 + g_{(0)}\hat{x}_{(1)} + h_{(0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{x} = \hat{x}_{(1)}(r),\ \zeta = \zeta_{(1)}(r)$$

经过多次迭代之后，则可期望得到所要的解. 而在实际上，由于系数 f, g, h 对于 x 的变化很不敏感，我们只要迭代一次就可得出问题的定性物理图象.

由上可知，问题还是与求解非线性的 Riccati 方程紧密相关. 今设

$$\hat{x}_{(0)} \equiv 1,\ \zeta_{(0)} = (kr)_{r_{\max}} + \int_{r_{\max}}^{r} k r\, dr \tag{2.2}$$

(注意: 在本文中下标 (κ) 表示第 κ 次迭代解，不要和文献[1]中的意义混淆.),

作变换

$$W(r) = \exp\left[-\int \hat{x} f dr\right],\ k = k_0 \hat{x} = \frac{G}{F}\frac{d\ln W(r)}{dr}, \tag{2.3}$$

将方程(1.6)化为二阶线性方程

$$W'' - \left(g + \frac{d\ln f}{dr}\right)W' + fhW = 0. \tag{2.4}$$

再令

$$W = u \cdot \exp\left[\frac{1}{2}\int\left(g + \frac{d\ln f}{dr}\right)dr\right], \tag{2.5}$$

将方程 (2.4) 化为标准形式

$$\frac{d^2u}{dr^2} + k_3^2(r, \omega)u = 0, \tag{2.6}$$

这里

$$\begin{cases} k_3^2(r, \omega) = fh - \dfrac{1}{4}\left(g + \dfrac{d\ln f}{dr}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dr}\left(g + \dfrac{d\ln f}{dr}\right), \\ \left(g + \dfrac{d\ln f}{dr}\right) = \dfrac{2k_0}{(1+\mu)Q}\left[\dfrac{F}{G}(1 - D_2)\right] - \dfrac{R_{10} + \mu R_2}{1+\mu} + \dfrac{d\ln F}{dr} - \dfrac{d\ln G}{dr}. \end{cases} \tag{2.7}$$

回到原先的变量，有:

$$k = \frac{G}{F}\left[\frac{d\ln u}{dr} + \frac{1}{2}\left(g + \frac{d\ln f}{dr}\right)\right]. \tag{2.8}$$

为求解方程 (2.6)，这里采用与林家翘相同的边界条件:

当 $r \to 0$ 时， $ue^{i\omega t}$ 为衰减型. (2.9)

当 $r \to \infty$ 时，$ue^{i\omega t}$ 满足辐射条件，为外行波. (2.10)

这样，我们的问题便化归为一种二阶常微分方程的特征值问题.

三、C. C. Lin's 盘的紧卷螺旋整体模式解

从局部解的讨论已得出：当 $\varepsilon \to 0$ 时，若无其它的不稳定性机制起作用，将有 $Q = 1$（参看文献 [1]）. 此意即当星盘完全坍缩成为平面盘时，必然处处处于临界 Jeans 稳定状态. 现设想，从这种平面盘状态出发，保持 M_r，σ_0 值不变（或者说，保持 Q，σ_0 值不变），而令盘中心部份的 z 方向弥散速度 M_z 逐渐增加，从而使星盘中心部份厚度逐渐增加形成一个核球. 整个星盘形状如图 1a 中所示. 这种星盘有点类似于林家翘所讨论过的中心核球加无限薄盘的星系模型，因此这里姑且称之为 C. C. Lin 盘. 不过应指出，我们这里对问题的处理与林家翘不相同，这里把整个星盘当作一种自引力物质系统，没有区分所谓盘成份，核球成份，并且没假定中心球状部份为刚性的.

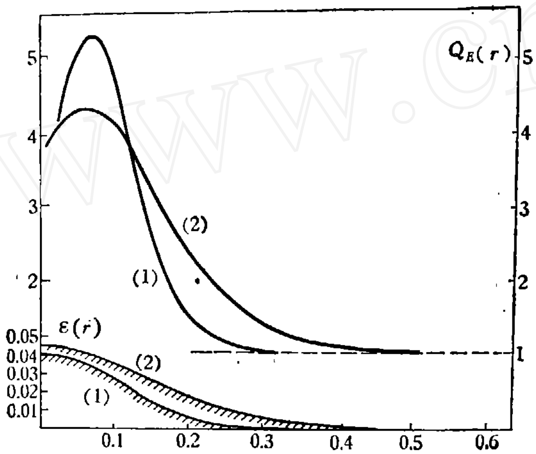

图 1a　不同的 C. C. Lin 盘的函数 $Q_E(r)$ 分布

（$1.R_H = 0.1$, $\varepsilon_0 = 0.04$;　$2.R_H = 0.15$, $\varepsilon_0 = 0.045$）

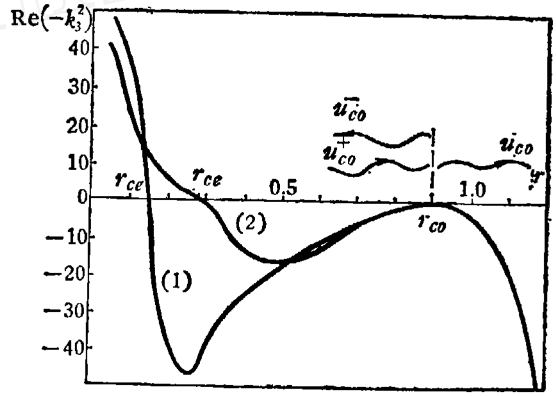

图 1b　不同的 C. C. Lin盘的函数 $\mathrm{Re}(-k_3^2)$ 的分布

对于紧卷螺旋波，有 $|\zeta| \gg 1$，作渐近展开式：

$$\begin{cases} G(\zeta) \sim i\varepsilon - \dfrac{1}{2\zeta} + i\varepsilon \dfrac{\frac{1}{4} - m^2}{2\zeta^2} + \cdots, \\ F(\zeta) \sim -1 - \dfrac{i\varepsilon}{\zeta} + \dfrac{\frac{1}{2} + m^2}{\zeta^2} + \cdots, \end{cases} \tag{3.1}$$

并取其头一项. 由 (2.7) 式，忽略其中 $O\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ 的高阶小量后得出：

$$k_3^2 \approx \frac{k_0^2}{(1+\mu)}\left[\frac{(1-D_{2R})^2}{(1+\mu)Q^2} - (1-\nu^2)\right]. \tag{3.2}$$

若引入记号：

$$Q_E = \frac{(1+\mu)^{1/2}}{(1-D_{2R})} Q, \quad k_{0c} = \frac{k_0}{(1+\mu)^{1/2}}, \tag{3.3}$$

$$k_{3c}^2 = k_{0c}^2\left[\frac{1}{Q_E^2} - 1 + \nu^2\right], \tag{3.4}$$

则方程 (2.5) 便化为

$$\frac{d^2u}{dr^2} + k_{3c}^2 u = 0. \tag{3.5}$$

此方程形式上与林家翘所讨论过的完全一样[4]，不过因为取 $Q \equiv 1$，这里的函数 $Q_E(r)$ 可以由星盘形状完全确定．在共转圈上 $(r = r_{co})$，$\varepsilon = 0$，故 $Q_E(r_{co}) = 1$． 当 r 接近中心部份时，函数 $Q_E(r)$ 的取值将随 ε 值的不断增加而增加． 作为实例，我们取 Mark 等[4] 采用的基态模型 (II) 作具体计算． 设 $[R] = 10$ 千秒差距，$[M] = 10^{10}M_\odot$，$a_1 = 1.2$，$a_2 = 0.8$，$a_s = 0.175$；$M_1 = 2.0$，$M_2 = 0.8$，$M_s = 0.54$，$z_{*1}^{(0)} = 1$，以及

$$\omega = (0.95,\ 0.05),\ \varepsilon(r) = \varepsilon_1 + \varepsilon_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_H}\right)^2\right],$$

$$x_j = \left[1 + \left(\frac{r}{a_j}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (j = 1, 2, s).$$

因此

$$\sigma_0(r) = \frac{4.5M_1}{\pi a_1^2}\frac{1}{x_1^{11}} - \frac{4.5M_2}{\pi a_2^2}\frac{1}{x_2^{11}} + \frac{M_s}{2\pi a_s^2}\frac{1}{x_s^3},$$

$$Q_0^2(r) = \frac{16}{105}\left[\frac{M_1}{4\pi a_1^3}H(x_1) - \frac{M_2}{4\pi a_2^3}H(x_2)\right] + \frac{M_s}{4\pi a_s^3}\frac{1}{x_s^3},$$

$$C(r) = \frac{4.5M_1}{\pi a_1^3}I(x_1) - \frac{4.5M_2}{\pi a_2^3}I(x_2) - \frac{M_s}{4\pi a_s^3}\left(\frac{1}{x_s^3} - \frac{3}{x_s^5}\right),$$

$$I(x) = \frac{5.5}{x^{13}} - \frac{2.5}{x^{11}} - \frac{5}{9x^9} - \frac{5}{21x^7} - \frac{5}{42x^5} - \frac{1}{18x^3},$$

$$H(x) = \frac{59.0625}{x^{11}} + \frac{26.25}{x^9} + \frac{16.875}{x^7} + \frac{11.25}{x^5} + \frac{6.5625}{x^3}.$$

由此，对于不同的星盘形状，便可作出相应的 $Q_E(r)$ 分布曲线（参看图 1a）以及相应的函数 $k_{3c}^2(r)$ 分布曲线(参看图 1b)．

这里指出：在平面盘密度波理论中，函数 $Q_E(r)$ 的分布是不确定的．消除这种不确定性在理论上有着很重要的意义，因为正如 Panatoni (1979)[5] 所指出的那样，整体模式解十分敏感地依赖于这个函数的分布．现在，我们从三维星盘模型出发，提供了解决此问题的一种方案．

由图 1b 看出，函数 $k_{3c}^2(r)$ 在 $r = r_{co}$ 处有一双零转向点，而在共转圈内某点 r_{ce} 处可以有一个单零转向点． 和 Schrödinger 波相比拟，密度波将在 $r_{ce} \leqslant r \leqslant r_{co}$ 区域内往返反射，于 r_{co} 处不断放大，形成所谓“Waser”．因此，在 C. C. Lin 盘模型下，林家翘对平面盘密度波所得到的数学结果，都可以一定方式沿用过来．他得到的量子化条件表示为：

$$\int_{r_{ce}}^{r_{co}} k_{3c}\,dr = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i}{4}\ln 2. \tag{3.6}$$

四、有限厚星盘的整体模式解

上面对 C. C. Lin 盘的处理忽略了共转圈附近星盘的厚度效应，螺旋的松卷效应以及其它的高阶效应．现我们假定： $Q = (1 + \eta)$ $(\eta \geqslant 0)$，盘厚 $\varepsilon(r_{co}) > 0$，并保留渐近展开式 (3.1) 的前三项，以考虑高阶效应．这样便有：

$$\begin{cases}\dfrac{F}{G}\sim i\epsilon-\dfrac{1}{2\zeta}-i\epsilon\dfrac{4m^2+3}{8\zeta^2}+\cdots,\ \dfrac{1}{G}\sim -i\epsilon-\dfrac{1}{2\zeta}-i\epsilon\dfrac{4m^2-3}{8\zeta^2}+\cdots,\\ \dfrac{d\ln F}{d\zeta}\sim -i\epsilon\dfrac{1}{\zeta^2}+\cdots,\ \dfrac{d\ln G}{d\zeta}\sim -i\epsilon\dfrac{1}{2\zeta^2}+\cdots\end{cases}\tag{4.1}$$

以及

$$\begin{aligned}k_3^2=k_{0c}^2\Big\{&\frac{1}{Q_E^2}\left(1+\frac{i\epsilon}{\zeta}-\frac{m^2+1}{\zeta^2}\right)-(1-\nu^2)\left(1-\frac{1}{2\zeta^2}\right)+\frac{R_{00}}{k_0^2}+\frac{2R_{30}}{k_0^2}\left(\frac{1-D_2}{Q\hat{x}_{(0)}}-\frac{\mu}{2}\right)\\ &+\frac{1}{Qk_0}\left(i\epsilon-\frac{1}{2\zeta}\right)\left[\frac{1-D_2}{1+\mu}(R_{10}+\mu R_2)+\frac{d}{dr}\ln\left(\frac{k_{0c}}{Q_E}\right)-2R_2(1-D_2)2D_2'\right]\\ &-\frac{(R_{10}+\mu R_2)^2}{4k_0^2(1+\mu)}-\frac{1+\mu}{2k_0^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{R_{10}+\mu R_2}{1+\mu}\right)\Big\},\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$k=-\left(i\epsilon+\frac{1}{2\zeta}\right)\left[\frac{k_{0c}}{Q_E}\left(i\epsilon-\frac{1}{2\zeta}\right)-\frac{R_{10}+\mu R_2}{1+\mu}+\frac{d\ln u}{dr}\right].\tag{4.3}$$

取 $k_0(r)$ 的典型值为 $\lambda(\lambda\gg 1)$，我们可把 (4.2) 式改写为：

$$k_3^2=\lambda^2\left[f_0^2+\frac{f_1}{\lambda}\right].\tag{4.4}$$

其主项为：

$$\lambda^2f_0^2=k_{0c}^2\left[\frac{1}{Q_E^2}-\left(\frac{1}{Q_E^2}\right)_{r_{co}}-1+\nu_R^2\right].\tag{4.5}$$

这是个实函数，其性质与 C. C. Lin 盘的 $k_{3c}^2(r)$ 一样，在共转圈 r_{co} 处也有一双零转向点．不过一般说来，函数 $k_3^2(r)$ 本身在 r_{co} 附近不会有双零转向点，而是有两个紧邻的单零转向点．特别地，对于中性紧卷螺旋波，由于

$$\begin{cases}Q_E(r_{co})>1,\ k_3^2(r)\approx k_{3c}^2(r)=k_{0c}^2\left(\dfrac{1}{Q_E^2}-1+\nu^2\right),\\ k_3^2(r_{co})\doteq k_{0c}^2\left(\dfrac{1}{Q_E^2}-1\right)\Big|_{r=r_{co}}<0.\end{cases}\tag{4.6}$$

函数 $k_3^2(r)$ 的这两个紧邻的单零点均在实轴上（参看图 2b）．这时我们的问题可同具有势垒渗透的 Schrödinger 波相比拟．

和 C. C. Lin 盘情形类似，假定在共转圈内某点 r_{ce} 处，主项 $\lambda^2f_0^2$ 有另一个单零点，那么函数 $k_3^2(r)$ 在 r_{ce} 点附近将有一复型单零转向点 r_{ce}'．有限厚星盘密度波的整体模式解的特性，就是由这些转向点的性质及分布决定的．往下，便应分别在 r_{co}，r_{ce} 点附近求出方程 (2.6)，(4.4) 的一致有效渐近解，然后在重叠区域内把它们光滑联结起来以构成方程的整体模式解．在文献[2]中，我们已经一般地求解了这一问题，这里只需将其中相应结果引用过来．

1. $r=r_{co}$ 附近的一致有效渐近解．在共转圈 r_{co} 附近，作如下幂级数展开式：

$$\begin{cases}\lambda^2f_0^2(r)=\lambda^2A_0^2(r-r_{co})^2+\cdots,\\ \lambda f_1(r)=\lambda^2[-d_0+d_1(r-r_{co})+d_2(r-r_{co})^2+\cdots].\end{cases}\tag{4.7}$$

从而推出

$$k_3^2=\lambda'^2[(r-r_{co}')^2-d_0'+\cdots],\tag{4.7'}$$

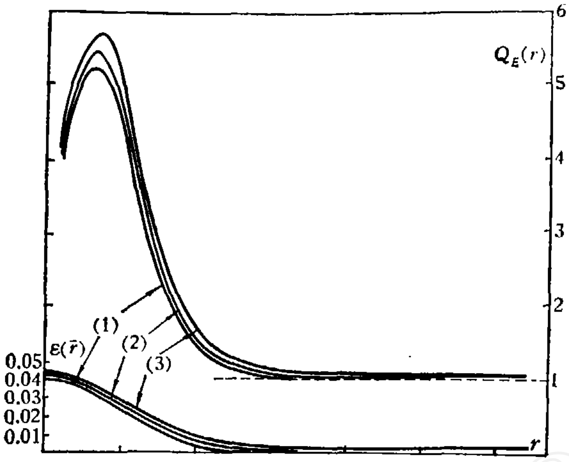

图 2a 不同的有限厚量盘的函数 $Q_E(r)$ 分布

($1. R_H = 0.1, \varepsilon_0 = 0.04, \varepsilon_1 = 0$; $2. R_H = 0.1, \varepsilon_0 = 0.04$ $\varepsilon_1 = 0.002$; $3. R_H = 0.1$, $\varepsilon_0 = 0.04$ $\varepsilon_1 = 0.004$)

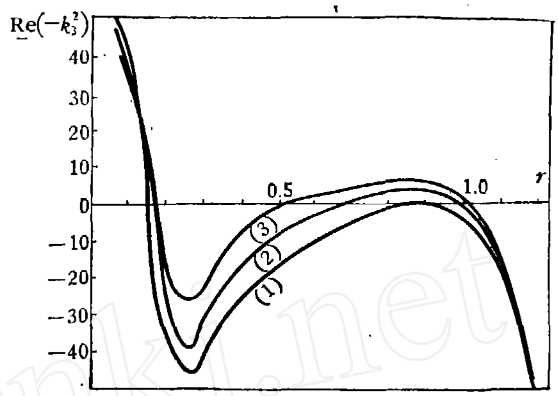

图 2b 不同的有限厚盘的函数 $\mathrm{Re}(-k_3^2)$ 的分布

其中

$$\begin{cases} \lambda'^2 = \lambda^2(A_0^2 + d_2), \; r'_{co} = r_{co} - \dfrac{d_1}{2(A_0^2 + d_2)}, \\ d'_0 = \dfrac{d_1^2}{4(A_0^2 - d_2)^2} + \dfrac{d_0}{A_0^2 + d_2} \approx \dfrac{d_0}{A_0^2} = -\dfrac{k_3^2(r_{co})}{\lambda'^2}. \end{cases} \tag{4.8}$$

由(4.7)′式推出：$k_3^2(r)$ 的两个紧邻的单零点 r_{*1}, r_{*2} 是:

$$r_{*1} = r'_{co} + \sqrt{d'_0}, \; r_{*2} = r'_{co} - \sqrt{d'_0} \quad (0 \leqslant \arg(d'_0) < 2\pi). \tag{4.9}$$

引进变换 $\xi = \xi(r)$，使得:

$$\begin{cases} \tau = -\displaystyle\int_{r_{*2}}^{r} k_3 dr = a[t\sqrt{t^2 - 1} - \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})], \\ t = \xi/\xi_{*2}, \end{cases} \tag{4.10}$$

其中函数 $k_3(r)$ 的单值分支取法见文献[2]，且:

$$\xi_{*1} = \xi(r_{*1}) = -2\sqrt{a}, \; \xi_{*2} = \xi(r_{*2}) = 2\sqrt{a}, \; a = \frac{\lambda' d'_0}{2}. \tag{4.11}$$

再作 Langer 变换:

$$\xi = \xi(r), \; v = [\xi'(r)]^{1/2} u \quad \left(\xi' = k_3(r) \Big/ \left(\frac{\xi^2}{4} - a\right)^{1/2}\right), \tag{4.12}$$

则作为最低阶近似，方程(2.6)可化作如下抛物柱方程:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \left(\frac{\xi^2}{4} - a\right) v = 0. \tag{4.13}$$

由此便得出方程(2.6)在 r_{co} 附近的一致有效渐近解:

$$u = k_3^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi^2}{4} - a\right)^{\frac{1}{4}} \{E(a, \xi); \, E_*(a, \xi)\}, \tag{4.14}$$

其中 $E(a, \xi)$; $E_*(a, \xi)$ 是抛物柱函数. 当 $|\xi| \gg 1$ 时，其展开式为:

$$E(a,\xi)\sim\sqrt{\frac{2}{\xi}}e^{i\Theta},\ E_*(a,\xi)\sim\sqrt{\frac{2}{\xi}}e^{-i\Theta},\ \left(|\arg(\xi)|\leqslant\frac{\pi}{4}\right),\tag{4.15}$$

$$\Theta=\frac{\xi^2}{4}-a\ln\xi+\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_2}{2},\ \phi_2=\arg\Gamma\left(\frac{1}{2}+ia\right).\tag{4.16}$$

由于

$$\lambda^2f_0^2=k_{0c}^2\left[\frac{m^2\Omega_0'^2(r_{co})}{\kappa^2}(r-r_{co})^2+\cdots\right]=\lambda^2A_0^2(r-r_{co})^2+\cdots,\tag{4.17}$$

可得:

$$\lambda'^2=\lambda^2A_0^2=\left(\frac{k_{0c}m\Omega_0'}{\kappa}\right)^2_{r_{co}}\text{ 或 }\lambda'=\left|\frac{k_{0c}m\Omega_0'}{\kappa}\right|_{r_{co}}.\tag{4.18}$$

从而推出，

$$a\doteq-\frac{1}{2}\frac{k_3^2(r_{co})}{\lambda'}=-\left(\frac{\kappa}{2m\Omega_0}\frac{k_{0c}r}{|s|}\frac{k_3^2}{k_{0c}^2}\right)_{r_{co}}.\tag{4.19}$$

对于紧卷螺旋波，由 (4.6) 式可得:

$$a=\left\{\frac{\kappa}{2m\Omega_0}\frac{k_{0c}r}{|s|}\left(1-\frac{1}{Q_E^2}+\nu_l^2\right)\right\}_{r_{co}}.$$

此时 a 值为实数，并且因为 $Q_E(r_{co})>1$，有 $a>0$. 盘越厚，a 值就越大.

解出 $u(r)$ 之后，尚需回到函数 $k(r)$ 或 $x(r)$. 这只要利用 (4.3) 式即可. 对于紧卷螺旋波，这个关系式很简单. 当

$$u\propto\exp\left[\pm i\int_{r_{*2}}^{r}k_3dr\right]\tag{4.21}$$

时，有:

$$k\approx\frac{k_{0c}}{Q_E}\pm\varepsilon k_3.\tag{4.22}$$

此外，对于密度波(1.1)其群速度 C_g 为:

$$C_g=-\varepsilon\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)=\mp\left(\frac{\partial k_3}{\partial\omega}\right)^{-1}=\mp\frac{\kappa}{k_{0c}^2}\left(\frac{k_3}{\nu}\right).\tag{4.23}$$

根据波数 $k_3(r)$ 单值分支的取法，因子 $\left(\frac{k_3}{\nu}\right)$ 的实部恒为负 $\left(\mathrm{Re}\left(\frac{k_3}{\nu}\right)<0\right)$，因此对于(4.21)式中 k_3 前面取(+)号的分支波，群速度 C_g 恒为正. 此时，若 $\varepsilon=+1$ (对应导型波)，则波数 k 将取较大的值，从而是短波分支. 如若 $\varepsilon=-1$ (对应曳型波)，则波数 k 将取较小的值，从而是长波分支. 在表 1 中标出了各个分支波的类型与走向.

由表 1 看出，对于曳波而言，长波将走向共转圈，短波则离开共转圈；对于导波而言，情况则相反.

为了满足边条件 (2.10)，并且如果和林家翘等人作法一样要求密度波在共转圈外成为外行短波(此即用短波辐射条件模拟星系密度波短波被外 Lindblad 共振圈所吸收). 那末必须取 $\varepsilon=-1$. 并且

$$u_{co}=k_3^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi^2}{4}-a\right)^{\frac{1}{4}}E_*(a,\xi e^{-i\pi}).\tag{4.24}$$

在共转圈内，因为 $\arg(\xi)\approx0$，我们有

表 1

	$\epsilon=-1$ (曳波)		$\epsilon=+1$ (导波)	
ν	<0	>0	<0	>0
$\mathrm{Re}(k_3)$	>0	<0	>0	<0
$\frac{d\ln u}{dr}=+ik_3$	$C_g>0$ (长波)	$C_g>0$ (短波)	$C_g>0$ (短波)	$C_g>0$ (长波)
$\frac{d\ln u}{dr}=-ik_3$	$C_g<0$ (短波)	$C_g<0$ (长波)	$C_g<0$ (长波)	$C_g<0$ (短波)

$$\left.\begin{aligned} u_{co} &= u_{co}^{+} + u_{co}^{-}, \\ u_{co}^{+} &= ie^{\pi a}E_{*}(a,\xi) \\ u_{co}^{-} &= -i\frac{\sqrt{2\pi}\exp\left[\frac{\pi a}{2}-i\phi_2\right]}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-ia\right)}E(a,\xi) \end{aligned}\right\}\times k_3^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi^2}{4}-a\right)^{1/4}, \tag{4.25}$$

其中 u_{co}^{+} 对应外行长曳波，u_{co}^{-} 对应内行短曳波. 对于紧卷螺旋波，由于 a 为实数及

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\pm ia\right)=\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{ch}\,(\pi a)}}\,e^{\pm i\phi_2}, \tag{4.26}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} u_{co}^{+} &= ie^{\pi a}E_{*}(a,\xi) \\ u_{co}^{-} &= -i\sqrt{1+e^{2\pi a}}E(a,\xi) \end{aligned}\right\}\times k_3^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi^2}{4}-a\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{4.25$'$}$$

这时，在共转圈附近 ($|\xi|\leqslant 2\sqrt{a}$) 形成了一个"势垒"，盘越厚，"势垒"越高. 势垒内无波. 当外行长波 u_{co}^{+} 到达势垒后，其中一部份由于"隧道效应"透过势垒成为外行短波；另一部份则从势垒上反射回来成为内行短波 u_{co}^{-} (参看图 3). 波的反射率 R，透射率 T 分别是：

$$R=\sqrt{1+e^{-2\pi a}},\quad T=e^{-\pi a}. \tag{4.27}$$

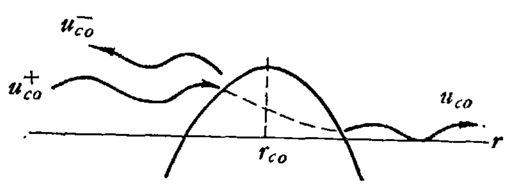

图 3 共转圈势垒附近波的传播

2. $r=r_{ce}$ 附近的一致有效渐近解. 令 $\zeta_c=\int_{r_{ce}}^{r}k_3dr$，则满足边条件 (2.9) 的解为：

$$u_{ce}=\left(\frac{\zeta_c}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}}H_{1/3}^{(1)}(\zeta_c e^{-i\pi}). \tag{4.28}$$

在 $r>r_{ce}$ 区域内，

$$u_{ce}=u_{ce}^{+}+u_{ce}^{-},\quad u_{ce}^{+}=\left(\frac{\zeta_c}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}}H^{(1)}{}_{\frac{1}{3}}(\zeta_c),\quad u_{ce}^{-}=\left(\frac{\zeta_c}{k_3}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{i\pi}{3}}H^{(2)}{}_{\frac{1}{3}}(\zeta_c). \tag{4.29}$$

3. 色散关系．在重叠区域（$r_{ce}\ll r\ll r_{co}$）内解 u_{co}，u_{ce} 均有效．若把两者光滑联结起来，便得到所要的整体模式解，并推出如下量子化条件：

$$\phi=\int_{r'_{ce}}^{r_{*2}}k_3dr=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{a}{2}(\ln a-1)-\frac{ia\pi}{4}-\frac{i}{2}\ln\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-ia\right)}{\sqrt{2\pi}}\right], \tag{4.30}$$

从此式可解出特征频率 ω.

对于紧卷螺旋波，由 (4.26) 式，推出

$$\phi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{a}{2}(\ln a-1)-\frac{\phi_2}{2}+\frac{i}{4}\ln(1+e^{-2\pi a}), \tag{4.31}$$

对于小虚部的特征频率：$\omega=\omega_R+i\omega_I$，$|\omega_I|\ll|\omega_R|$，上式还可简化为：

$$\begin{cases}\int_{r'_{ce}}^{r_{*2}}(k_3)_{\omega_R}dr=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{\phi_0-\phi_2}{2},\\ \omega_I\tau_*=\frac{1}{2}\ln\Lambda,\end{cases} \tag{4.32}$$

其中

$$\phi_0=\frac{a}{2}(\ln a-1),\ \Lambda=\sqrt{1+e^{-2\pi a}},\quad \tau_*=\int_{r'_{ce}}^{r_{*2}}\left(\frac{\partial k_3}{\partial\omega}\right)_{\omega_R}dr. \tag{4.33}$$

对于 C. C. Lin 盘，由于 $\mu(r_{co})=a=0$，$\Lambda=\sqrt{2}$，则(4.31)式便退化为(3.6)式．对于一般的有限厚星盘的紧卷螺旋波，我们引入一个 β_a 因子，其定义为：

$$\beta_a=\frac{\omega_I\tau_*}{(\omega_I\tau_*)_{a=0}}=2\frac{\ln\Lambda}{\ln 2}. \tag{4.34}$$

这样，β_a 因子便反映了盘厚对模式增长率的影响，其曲线形状可见图 4．从这里容易看出，若其它条件不变而使星盘逐渐变厚，那么共转圈附近的无波区将随之逐渐扩大(参看图 2a, b)，模

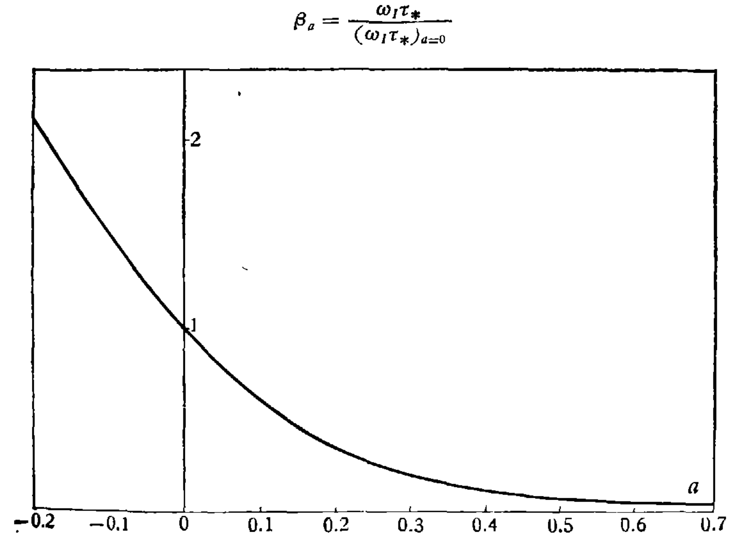

图 4　β_α 因子随参数 a 的变化

式解增长率亦逐渐变小. 因此,螺旋结构的图象亦势必变得越来越模糊,直至消失. 从这里便可推断出: 在比较厚的透镜状星系及椭圆星系中,不可能存在螺旋结构的图象. 这是完全符合观测事实的.

五、共转圈上其它物理参数对螺旋结构的影响

上节比较侧重于紧卷螺旋波的星盘厚度效应. 现更进一步地讨论松卷螺旋波. 从(4.2),(4.19)式推得:

$$a = a_R + i\epsilon a_I, \quad a_R = X + Y + Z, \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} X = \left(\dfrac{1+s/2}{1+\mu}\right)^{1/2} \dfrac{1}{i_a|s|}\left(1 - \dfrac{1}{Q_E^2} + \nu_I^2\right) > 0, \\ Y = -\left(\dfrac{1+s/2}{1+\mu}\right)^{1/2} \dfrac{i_a}{|s|}\left(2 - \dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{Q_E^2}\right) < 0, \\ Z = \dfrac{i_a \operatorname{sgn}(s)}{(1+\mu)^{1/2}(1+s/2)^{1/2}}\left(\dfrac{1}{e^2} + \dfrac{2}{Q}(1 - D_{2R}) - \mu\right) < 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} a_I = &-\left(\frac{1+s/2}{1+\mu}\right)^{1/2} \frac{1}{i_a|s|}\left\{\frac{1}{Qk_0}\frac{d}{dr}\ln\left(\frac{Q^2(1-\nu^2)}{M_r^2}\right)\right. \\ &+ \frac{1-D_{2R}}{Q^2k_0}\left[\frac{1-Q-\mu}{r} + Q\mu\frac{d}{dr}\ln\left(\frac{\varepsilon\rho_{00}k_0}{Q}\right)\right] \\ &\left. - \frac{1}{Qk_0}\left[D_{2R}\frac{d}{dr}\ln\left(\frac{Q^2(1-\nu^2)}{\varepsilon\rho_{00}}\right) + \mu' - D'_{2R}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

以上各等式右端的物理量均在 $r = r_{co}$ 处取值,并且采用了符号 $i_a = \dfrac{m}{k_0 r}$.

上面从 $k_3^2(r_{co})$ 求 a 值时,我们略去了高阶小量 $O\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)$,但是却保留了 $O\left(\dfrac{m^2}{\zeta^2}\right)$ 的项.

可以认为,在共转圈附近,$\dfrac{d}{dr}\ln\left(\dfrac{Q^2}{M_r^2}\right) \approx 0$,因此虚部 a_I 比实部 a_R 小一个数量级,其影响是更次要的可以不予考虑. 而从(5.3)式看出: (1)参数 η (Jeans 稳定性程度),μ (盘厚)将使 a_R 值增大,从而降低解的增长率;(2)参数 i_a (旋臂倾角),$|s|$ (剪切因子)将使 a_R 值减小,从而提高解的增长率. 这再一次说明"松卷效应"可以激发更大的引力不稳定性. 以前我们曾从局部解出讨论过这种松卷螺旋密度波的不稳定性,并曾称之为"松卷不稳定性"[3].

六、结 论

现将以上结果简单归纳如下:

(1) 在平面盘密度波方程中出现的不确定函数 $Q_E(r)$,可由有限厚星盘的形状确定下来.

(2) 林家翘等人在平面盘密度波理论中所提出的"Waser"机制以及关于存在增长型模式解的论断可以某种形式保持对 C. C. Lin 盘模型有效. 但是对一般的有限厚星盘而言,这种 Waser 机制将通过共转圈参数 a 受到盘厚、松卷性以及其它物理效应的影响.

(3) 参数 (η, μ) 将使共转圈势垒增高,从而使模式解增长率减少;参数 $(i_a, |s|)$ 将使共转圈势垒降低,从而使模式解增长率增加. 当其它条件不变时,星盘越厚,螺旋图象越模糊.

本工作得到谈镐生教授十分热情的关怀与指导；林家翘教授在 1979 年 8—10 月来华讲学期间，亦曾给作者十分热忱的鼓励与宝贵的指导，特此表示衷心感谢。

参　考　文　献

[1] 徐建军，科学通报，**25**(1980)，15 期；力学学报，1980，3 期.
[2] 徐建军，中国科学，1980，6，550.
[3] 徐建军，中国科学，1979，5，463.
[4] C. C. Lin & Y. Y. Lau, *SIMA. J. Appl. Math.*, **29**(1975), 352; *Adv. in Math.*, **22**(1976), 120; *Studies in Appl. Math.*, **60**(1979), 97.
[5] Panatoni, R. F., *Thesis of Ph. Dr.*, 1979.