

# 有限厚星系盘内域的泊松方程近似解析解

徐建军

(中国科学院力学研究所)

在星系密度波的渐近理论中,泊松方程的近似解析解有着十分重要的意义。对于无限薄盘,徐遐生<sup>[1]</sup>、Bertin 等<sup>[2]</sup>以旋臂倾角参数  $i_0 = \frac{m}{kr}$  为小参数先后求得相应泊松方程的一、二级渐近解,这些解可以很好地用于比较紧卷的螺旋结构,在平面盘密度波理论中起过重要作用;对于有限厚盘,彭秋和等人<sup>[3]</sup>也曾得到相应泊松方程的一种解,不过此解需假定物质密度分布具有如下特定形式:

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta, 0)e^{-\alpha|z|},$$

在盘对称面上,这种分布曲线会出现尖点  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_{z=0} \neq 0$ 。所以,此解不能用于自洽引力场情形。

本文将采用厚度参数  $\varepsilon_0$ , 以及另一种小参数  $\varepsilon_*$  求解有限厚星盘的泊松方程。参数  $\varepsilon_0$  的意义是最大盘厚;参数  $\varepsilon_*$  的意义可以是密度波波长沿径向的变化率,也可以是特征波长。我们在文中求得了关于  $\varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_*$  的直至二级近似解,并且还可依次求出更高阶近似解。这些解不但适用于紧卷螺旋,而且可用于相当松卷螺旋,它们在三维有限厚星盘密度波理论中将占有重要地位,其简化形式在文献[4]中已应用过。

## 一、解法

当采用“星盘坐标系”后,一个边界比较平坦的三维星盘所对应的泊松方程可化为如下无量纲形式<sup>[5,6]</sup>:

$$\varepsilon(r) \left[ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - \rho_1 \right] + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \varepsilon(r), \quad \varepsilon_0 = \varepsilon(0), \quad (2)$$

这里  $\rho_1$ ,  $\psi_1$  分别为扰动密度与相应引力势,  $\varepsilon(r)$  为星盘形状函数。不失一般性,我们把扰动密度波表示为如下形式:

$$\rho_1 = \hat{\rho}_1(r, z) H_m(\zeta) e^{i(\omega t - m\theta)}, \quad (3)$$

其中

$$\zeta = \zeta_* + \int_0^r k dr = (kr)_m + \int_{rm}^r k dr, \quad k = \frac{d\zeta}{dr}, \quad (4)$$

$\zeta$ ,  $k$  可以是  $r$  的任意复函数,  $H_m(\zeta)$  为 Hankel 函数。我们假定函数  $\zeta(r)$  满足条件:

本文 1980 年 1 月 16 日收到。

$$\left| \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{k} \right) \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} (\lambda) \right| \ll 1, \quad (\lambda = \frac{2\pi}{k}), \quad (5)$$

从而可引入一个小参数  $\varepsilon_*$ , 它是函数  $\left( \frac{1}{k^2} \frac{dk}{dr} \right)$  的典型值. 这个参数就称为“准单色波参数”.

现将扰动引力势表示为:

$$\psi_1 = \hat{\psi}_1(r, z) H_m(\zeta) e^{i(\omega t - m\theta)}, \quad (6)$$

其中  $\hat{\psi}_1(r, z)$  待求. 由此式我们可写出:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= (G + \beta) k \psi_1, & \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} &= \left[ (G + \beta)^2 k^2 + \frac{d}{dr} k (G + \beta) \right] \psi_1, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= -m^2 \psi_1, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中

$$\beta = \frac{1}{k} \frac{\partial \ln \hat{\psi}_1}{\partial r}, \quad G = \frac{H'_m(\zeta)}{H_m(\zeta)}, \quad (8)$$

再将 (7) 式代入方程 (1) 式, 并利用 Bessel 方程

$$H_m'' + \frac{1}{\zeta} H_m' + \left( 1 - \frac{m^2}{\zeta^2} \right) H_m = 0, \quad (9)$$

以及下列定义

$$\Delta = G(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{kr} \right) - m^2 \left( \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) - \frac{G}{k^2} \frac{dk}{dr}, \quad (10)$$

$$\chi = \beta^2 + 2G\beta + \frac{1}{k} \frac{d\beta}{dr} + \beta \frac{1}{k^2} \frac{dk}{dr}, \quad (11)$$

便可得出

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}_1}{\partial z^2} - \varepsilon^2 k^2 (1 + \Delta + \chi) \hat{\psi}_1 = \varepsilon^2 \hat{\rho}_1, \quad (12)$$

这是关于  $\hat{\psi}_1(r, z)$  的一个非线性常微分方程. 注意到  $\Delta = O(\varepsilon_*)$ ,  $\chi = O(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$ , 我们将方程 (12) 式改写成

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}_1}{\partial z^2} - \varepsilon^2 k^2 \hat{\psi}_1 = \varepsilon^2 [\hat{\rho}_1 + (\Delta + \chi) k^2 \hat{\psi}_1], \quad (13)$$

在边条件

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \hat{\psi}_1(r, z) = 0, \quad (14)$$

下, 其形式解为

$$\hat{\psi}_1 = -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon k |z-z_1|} \varepsilon \hat{\rho}_1 dz_1 - \frac{\varepsilon k}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon k |z-z_1|} (\Delta + \chi) \hat{\psi}_1 dz_1. \quad (15)$$

现我们寻找积分方程 (15) 式的关于参数  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_*$  的级数解. 假设星盘比较薄, 并远小于密度波的波长, 因此有

$$\varepsilon_0 \ll 1, \quad \varepsilon_* \ll 1, \quad \varepsilon_0/\varepsilon_* \ll 1, \quad (16)$$

我们把各物理量按  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_*$  作级数展开. 由于  $\zeta$ ,  $k$  均是任意函数, 它们虽可能包含参数  $\varepsilon_0$ , 我们也可不把它们按  $\varepsilon_0$  展开 (这样做可以使过程简化). 我们令:

$$\Delta = \varepsilon_* \bar{\Delta}, \quad \varepsilon_* k = \bar{k}, \quad \varepsilon_* \zeta = \bar{\zeta}, \quad (17)$$

以及.

$$\varepsilon(r)\rho_1 = \rho_1^{(0)} + \varepsilon\rho_1^{(1)} + \dots, \quad (18)$$

$$e^{-\varepsilon k|x-z_1|} = 1 - \varepsilon k|x-z_1| + \dots \quad (\text{当 } z, z_1 \text{ 均在星盘区域内}), \quad (19)$$

对于扰动投影面密度

$$\sigma_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \hat{\rho}_1 dz = \hat{\sigma}_1 H_m(\zeta) e^{i(\omega t - m\theta)}, \quad (20)$$

也作展开,从而有:

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_1^{(0)} + \varepsilon \hat{\sigma}_1^{(1)} + \dots \left( \hat{\sigma}_1^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}_1^{(n)}(r, z) dz \right). \quad (21)$$

最后,我们令

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1 = \phi_{(0)}^{(0)} + \varepsilon_* \phi_{(1)}^{(0)} + \varepsilon_0 \phi_{(0)}^{(1)} + \dots, \\ \beta = \beta_{(0)}^{(0)} + \varepsilon_* \beta_{(1)}^{(0)} + \varepsilon_0 \beta_{(0)}^{(1)} + \dots, \\ \chi = \chi_{(0)}^{(0)} + \varepsilon_* \chi_{(1)}^{(0)} + \varepsilon_0 \chi_{(0)}^{(1)} + \dots, \end{cases} \quad (22)$$

并把各展开式代入(15)式,便依次得到各级近似解,结果如下:

1. 零级近似. 由于

$$\beta_{(0)}^{(0)} = 0, \quad \chi_{(0)}^{(0)} = 0, \quad \frac{\varepsilon k}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon k|x-z_1|} dz_1 = 1, \quad (23)$$

便推出

$$\phi_{(0)}^{(0)} = 0, \quad (24)$$

2. 一级近似. 这只需考察(15)式的第一项

$$\Phi(r, z) = -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon k|x-z_1|} (\varepsilon \hat{\rho}_1) dz_1 = \varepsilon_* \Phi_{(1)}^{(0)} + \varepsilon_0 \Phi_{(0)}^{(1)} + \dots, \quad (25)$$

先设  $z$  在星盘内,当积分变量  $z_1$  亦位于星盘区域内时,展开式(19)将成立;当  $z_1$  位于远离星盘区域时,展开式(19)虽失效,但由于这时密度函数  $(\varepsilon \hat{\rho}_1)$  按指数迅速趋零,我们仍然有:

$$e^{-\varepsilon k|x-z_1|} (\varepsilon \hat{\rho}_1) \approx [1 - \varepsilon k|x-z_1| + \dots] (\varepsilon \hat{\rho}_1). \quad (26)$$

由此,我们便得出:

$$\phi_{(1)}^{(0)} = \frac{-\hat{\sigma}_1^{(0)}}{2\bar{k}}; \quad \phi_{(0)}^{(1)} = \frac{\hat{\varepsilon}(r)}{2} F_0(z), \quad (27)$$

这里

$$F_0(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z-z_1| \hat{\rho}_1^{(0)}(z_1) dz_1 = 2 \left[ \int_0^{\infty} z_1 \hat{\rho}_1^{(0)} dz_1 + z \int_0^z \hat{\rho}_1^{(0)} dz_1 - \int_0^z z_1 \hat{\rho}_1^{(0)} dz_1 \right], \quad (28)$$

而当  $z$  远离星盘时,

$$\phi_{(1)}^{(0)} = 0, \quad F_0(z) = 0. \quad (29)$$

由(27)式,又推出

$$\beta = \frac{\varepsilon_*}{\bar{k}} \frac{d \ln \phi_{(1)}^{(0)}}{dr} + \frac{\varepsilon_0}{\bar{k}} \frac{d}{dr} \left( \frac{\phi_{(0)}^{(1)}}{\phi_{(1)}^{(0)}} \right) + \dots, \quad (30)$$

$$\chi_{(1)}^{(0)} = -\frac{2G(\zeta)}{\bar{k}^2} \frac{d\bar{k}}{dr}; \quad \chi_{(0)}^{(1)} = -\frac{2G(\zeta)}{\bar{k} \hat{\sigma}_1^{(0)}} \frac{d(\hat{\varepsilon} \bar{k})}{dr} F_0(z), \quad (31)$$

3. 二级近似. 首先算得: 当  $z$  在星盘区域时

$$I(z) = \frac{\varepsilon \bar{k}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon \bar{k} |z-z_1|} F_0(z) dz_1 = I_{(0)}^{(0)}(z) + \varepsilon_0 I_{(0)}^{(1)} + \varepsilon_* I_{(1)}^{(0)} + \dots, \quad (32)$$

其中

$$I_{(0)}^{(0)} = -2W_{*1}^{(0)} \rho_{10}^{(0)} + 2\hat{\sigma}_1^{(0)} z; \quad W_{*1}^{(0)} \rho_{10}^{(0)} = \int_0^{\infty} z_1 \rho_{10}^{(0)} dz_1, \quad (33)$$

另外

$$\begin{cases} \chi_{(1)}^{(0)} \phi_{(0)}^{(1)} = -\frac{G\hat{\varepsilon}}{\bar{k}^2} \frac{d\bar{k}}{dr} F_0(z); & \chi_{(0)}^{(1)} \phi_{(1)}^{(0)} = \frac{G}{\bar{k}^2} \frac{d(\hat{\varepsilon}\bar{k})}{dr} F_0(z), \\ (\Delta + \chi_{(1)}^{(0)}) \phi_{(0)}^{(1)} = \frac{G\hat{\sigma}_1^{(0)}}{\bar{k}^3} \frac{d\bar{k}}{dr} - \frac{\hat{\sigma}_1^{(0)}}{2\bar{k}} \Delta, \end{cases} \quad (34)$$

由(15)式,便推出

$$\begin{cases} \phi_{(1)}^{(1)} = -\frac{\hat{\varepsilon}\hat{\sigma}_1^{(1)}}{2\bar{k}} + \frac{G(\zeta)}{\bar{k}} \frac{d\hat{\varepsilon}}{dr} (2W_{*1}^{(0)} \rho_{10}^{(0)} - 2\hat{\sigma}_1^{(0)} z), \\ \phi_{(2)}^{(0)} = \left( \frac{G\hat{\sigma}_1^{(0)}}{\bar{k}^3} \frac{d\bar{k}}{dr} - \frac{\hat{\sigma}_1^{(0)}}{2\bar{k}} \Delta \right) (2W_{*1}^{(0)} \rho_{10}^{(0)} - 2\hat{\sigma}_1^{(0)} z), \\ \vdots \end{cases} \quad (35)$$

当  $z$  远离星盘区域时,同样  $\phi_{(1)}^{(1)} = \phi_{(2)}^{(0)} = \dots = 0$ .

因此,我们得到

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1 = -\frac{\hat{\sigma}_1^{(0)}}{2\bar{k}} (1 + \phi_{\varepsilon_0} + \phi_{\varepsilon_*} + \dots); & \phi_{\varepsilon_*} = I_{(0)}^{(0)}(z) \left( 2\frac{G}{\bar{k}^2} \frac{d\bar{k}}{dr} - \Delta \right); \\ \phi_{\varepsilon_0} = \frac{\hat{\sigma}_1^{(1)}}{\hat{\sigma}_1^{(0)}} \varepsilon - \frac{F_0(z)}{\hat{\sigma}_1^{(0)}} \varepsilon \bar{k} + 2I_{(0)}^{(0)}(z) G \frac{d\varepsilon}{dr} / \hat{\sigma}_1^{(0)}. \end{cases} \quad (36)$$

特别在盘对称面上有

$$\hat{\phi}_{10} = \hat{\phi}_1|_{z=0} = -\frac{\hat{\sigma}_1^{(0)}}{2\bar{k}} (1 + \phi_{\varepsilon_0} + \phi_{\varepsilon_*}), \quad (37)$$

其中

$$\begin{cases} \phi_{\varepsilon_0} = \varepsilon \left( \frac{\hat{\sigma}_1^{(1)}}{\hat{\sigma}_1^{(0)}} \right) - 2\frac{W_{*1}^{(0)}}{\hat{\sigma}_1^{(0)}} \rho_{10}^{(0)} \left[ \varepsilon \bar{k} + 2G(\zeta) \frac{d\varepsilon}{dr} \right] + o(\varepsilon_0), \\ \phi_{\varepsilon_*} = 2W_{*1}^{(0)} \rho_{10}^{(0)} \left[ \Delta - \frac{2G}{\bar{k}^2} \frac{d\bar{k}}{dr} \right] + o(\varepsilon_*), \end{cases} \quad (38)$$

而引力势

$$\phi_{10} = \phi_1|_{z=0} = -\frac{\hat{\sigma}_1^{(0)}}{2\bar{k}} (1 + \phi_{\varepsilon_0} + \phi_{\varepsilon_*}) H_m(\zeta) e^{i(\omega t - m\theta)}, \quad (39)$$

这就是我们所需要的渐近解式。

## 二、讨 论

上面我们取  $\bar{k} = \frac{\bar{k}}{\varepsilon_*}$  求得了  $\hat{\phi}_1$  的各级近似解。当固定  $\bar{k} = O(1)$  时,  $\varepsilon_* \rightarrow 0$  意味着  $\bar{k} \rightarrow \infty$ 。因此上述解,首先可看作在短波长条件 ( $\bar{k} \gg 1$ ) 下的各级渐近解(如果需要,我们可求出更高级近似)。这时,(38)、(39)式中的  $G(\zeta)$ 、 $H_m(\zeta)$  函数还可用其渐近展开式代替。但是我们强调指出,我们无须假定  $\bar{k} \gg 1$  (或  $\bar{k} = O(1)$ ),只要条件(5)式满足,我们就可取

$$\hat{\phi}_1 = -\frac{\hat{\sigma}_1^{(0)}}{2k} (1 + \phi_{\epsilon_*}), \quad \phi_1 = \hat{\phi}_1 H_m(\zeta) e^{i(\omega t - m\theta)}, \quad (40)$$

作为一种很好的近似解式。因为由(38)式我们看到：这样引起的相对误差  $\phi_{\epsilon_*}$  仍然是个小量。事实上，若设  $S = \frac{1}{k^2} \frac{dk}{dr}$ ，则可推出

$$\Delta = \frac{1}{\zeta k r} \int_{r_m}^r k^2 S dr \left[ G(\zeta) - m^2 \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{k r} \right) \right] - G(\zeta) S. \quad (41)$$

只要  $\epsilon_* \rightarrow 0$ ；即使  $k = O(1)$ ，我们仍然有  $\phi_{\epsilon_*} \rightarrow 0$ 。正因为这样，我们把条件(5)式称为“准单色波近似”而把解式(40)式称为准单色波引力势近似解析解。显然，此解包括了短波长渐近解，并且当  $k = O(1)$  时， $G(\zeta)$ 、 $H_m(\zeta)$  不应取其渐近式代替。作为特例，假定  $\epsilon = 0$  (无限薄盘情形)，则我们得到

$$\begin{aligned} \phi_{10} &= -\frac{\hat{\sigma}_1^{(0)}}{2k} H_m(\zeta) e^{i(\omega t - m\theta)}, \\ \frac{\partial \phi_{10}}{\partial r} &= G k \phi_{10}, \end{aligned} \quad (42)$$

这就是我们在文献[4]中曾引用过的结果。如果还同时设  $k = \text{常数}$ ，则(42)式是方程(1)式的精确解。

最后，为说明在具体问题中参数  $\epsilon_*$  的实际大小，我们试以 Lin & Mark

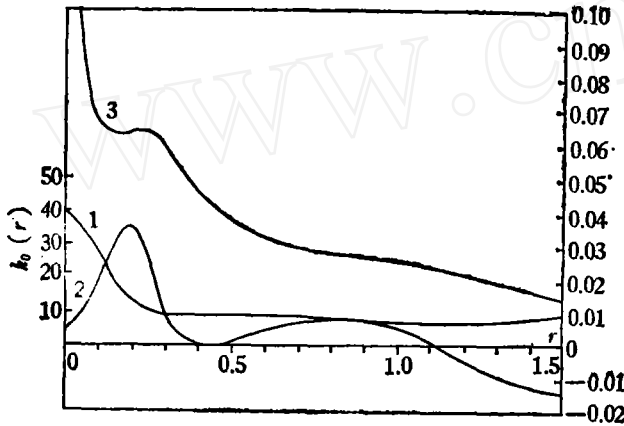


图1 参数  $i_a$ 、 $\epsilon_*$  随  $r$  的变化 (取 Lin & Mark 等人采用的基态模型 (II))

$$1. k_0(r); \quad 2. \epsilon_* = \frac{1}{k_0} \frac{dk_0}{dr}; \quad 3. i_a = \frac{m}{k_0 r}$$

等人常用的基态模型 (II) 为例<sup>[7]</sup>。取特征量  $[M] = 10^{10} M_{\odot}$ ， $[R] = [10 kpc]$ ， $M_1 = 2.0$ ， $M_2 = 0.8$ ， $M_S = 0.54$ ， $a_1 = 12.0$ ， $a_2 = 8.0$ ， $a_S = 0.175$ 。再取扰动态中的函数  $k(r) = k_0(r)$  ( $k_0$  为特征波数，其定义见文献[4])。我们在图1中画出了相应的  $i_a = \frac{m}{k r}$ ； $\epsilon_* = \frac{1}{k^2} \frac{dk}{dr}$  分布曲线，由图看出，在整个星盘范围内，准单色波参数  $\epsilon_*$  均比倾角参数  $i_a$  小得多，尤其对于接近中心的区域更是如此。这说明解式(40)更应用于相当松卷的螺旋结构。

### 参 考 文 献

- [1] 徐灏生, *Ap. J.*, **160** (1970), 99.
- [2] Bertin, G. & Mark, J. M.-K., *Ap. J.*, **64** (1978), 389.
- [3] 彭秋和等, *中国科学*, 1979, 3: 274.
- [4] 徐建军, *中国科学* 1979, 5: 463.
- [5] 徐建军, *天文学报*, **20** (1979), 3: 246.
- [6] 徐建军, *力学学报*, 1980, 3: 232.
- [7] Lin, C. C. & Lau, Y. Y., *Studies in Appl. Math.*, **60** (1979), 97-163.