

边界层研究进展^{*1)}

中国科学院力学研究所 卞荫贵

自从本世纪初边界层理论问世以来,七十多年的发展历程充分表明它在近代流体力学中所起的重要作用。边界层理论现已广泛应用于航空、航天、航海、叶轮机、化学工程以及气象学、环境科学及对流传热传质学等方面,并且在应用中又不断得到充实和提高。在这期间人们写过不少专论和述评性文章,对边界层的研究工作进行了总结和评论。最近十年内就有 Goldstein (1969), Smith (1970), Schlichting (1974), Tani (1977) 等人的一些很好的总结报告。由于边界层这个课题牵涉面很广,若干年来文献又很多,所以笔者除了对边界层理论早期发展过程作极为简要的说明外,重点介绍最近十五年内边界层研究进展较为突出的方面。

一、边界层研究的简要历程

边界层理论的发展过程可以分成三个阶段来叙述。从本世纪初的1904年开始到30年代中期的第一个三十年为初始阶段。这是创造新理论,开展基本研究的阶段。在这之前,描述带有粘性的真实流体的纳维尔-斯托克斯方程(以下简称N-S方程)建立了已有半个多世纪。人们普遍认为这种非线性的偏微分方程组的求解当时几乎是不可能的。Prandtl以他特有的才能以及对问题的透彻理解,对N-S方程进行了合理的,大幅度的简化,如下式所示(以二维定常不可压缩流为例):

* 1980年2月22日收到。

1) 本文曾在第二届全国流体力学学术会议(1979年11月9—16日,无锡)全体会上报告。

运转可能有些参考价值。反过来,我们也期望着中国大型设备的研究成果。

日本的大型风洞及其设备应用于研制实际飞机或火箭的实验研究中。当然,这些设备的运转、控制和数据处理都用电子计算机进行。

在实际飞机的设计中,风洞实验结果和数值计算结果结合起来进行设计,因此风洞实验就作为这种设计的一部分。

在比较小型的高速风洞、激波管、炮风洞,还有低密度风洞中流动进行三维物体绕流的超声速流、激波和边界层的干扰、带有物形变化的高焓流动、稀薄气体流动等研究。

利用这些小型装置进行基础研究时,也要实现实验的计算机化。所谓实验的计算机化就是利用传感器(Sensor)和小型计算机采集数据,送到中央大型计算机处理。我们叫做“检出器的智能化(Intelligent)”。计算机采集数据,在中央处理;传感器传递的数据,经处理后存在计算机中。这就是一般所说的“计算机利用法的阶层化(Hierarchy)”。

(金哲学根据今井功报告和钱福星口译录音整理)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

下面划有一横杠的均是由于简化而被忽略的各项。在提出这组方程的同时, Prandtl 已经考虑到如何用一个压力为常值的简单平板问题进行求解。后来由他的学生 Blasius 于 1907 年完成了这项计算工作, 见 Blasius (1908)。现在熟悉流体力学的人容易看出, 边界层厚度 δ 可由几个有量纲的变量组成, 即 $\delta \sim \sqrt{\nu x / U_\infty}$, 取用相似变数 $\eta = y / \delta = y \sqrt{U_\infty / \nu x}$, 并引进流函数 $\psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta)$, 这样就可以把平板问题的偏微分方程组换成三阶常微分方程, 即 Blasius 方程

$$ff'' + 2f''' = 0$$

同时需要满足三个边界条件:

$$f(0) = f'(0) = 0; \quad f'(\infty) = 1$$

Blasius 给出这个方程的解以后, 立刻就可以求得重要的壁面摩擦:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = f''(0) \mu U_\infty \sqrt{U_\infty / \nu x}$$

或者摩擦系数:

$$C_f = F / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = 0.664 / \sqrt{R_x}$$

其中 $f''(0) = 0.332$, $R_x = \rho U_\infty x / \mu$ 。这个相似性解及重要结果直到现在仍然很有用。总之, 边界层概念已经被证明是卓有成效的。人们认为边界层理论在流体力学史上创立了新纪元, 对理解粘性流体流动开辟了广阔的道路。它不但能够给解决实用问题提供分析的理论基础, 同时也可以用来解释过去难以理解的一些物理现象。然而流体力学中这样一个很突出的理论在它诞生的初期并不是很快地为人们所知晓。据 Dryden (1955) 统计, 在头十年中只发表过七篇有关边界层的文章, 在第二个十年中也只不过有六篇。到第三个十年期间才逐渐达到平均每年五、六篇。这说明边界层理论在初期发展很缓慢, 但其影响却不断地在迅速增长, 参见图 1。在第一个阶段的三十年期间, 开展基本研究的课题已经相当广, 诸如边界层方程的求解, 层流不稳定性以及湍流边界层等方面的研究。这段期间的工作总结最好用 Goldstein (1938) 编写的一部书的内容作为参考。这是一本在当时很受欢迎而且对边界层理论的推广起着重要作用的名著。从 30 年代中期到 60 年代中期约三十年为第二阶段。这边是边界层理论得到迅速发展, 在工程上有了广泛应用的全盛时代, 这也是航空工业突飞猛进的时代。特别在第二次大战以后更为突出, 从而推动了象空气动力学及边界层等学科的应用研究。

下面根据几个主要课题把这两个阶段中研究内容极其扼要地综述如下。这些课题包括: 边界层方程的解法; 高速边界层; 层流稳定性; 湍流边界层。

§1. 边界层方程的解法

边界层方程虽然比原 N-S 方程简化了很多, 方程性质从椭圆型转为抛物型, 但是它们都

还是非线性偏微分方程,求解时依然有很大难度,多年来发展起来的求解方法主要有以下几种。

1. 相似性解 前面已提到边界层方程最初的相似性解创始于 Blasius 的平板解。利用相似变数,每个截面上的速度剖面变为相似剖面,而原来边界层方程简化为常微分方程。通常具有压力梯度的流动,满足相似条件的是屈指可数的几种特殊情况。在低速边界层理论中,如果流函数的形式取为

$$\psi = U(x)f(\eta), \quad \eta = y/g(x)$$

Goldstein (1939) 曾证明 $U(x)$ 和 $g(x)$ 必须是幂次方形式或指数形式。Falkner & Skan (1930) 最早建立了具有压力梯度的相似性解。他取外缘速度为 $U = U_0 x^m$, 给出 $f(\eta)$ 所满足的方程

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

其中 $\beta = 2m/(m+1)$ 。后来 Hartree (1937) 对此方程取用不同 β 的值进行数值计算。对于不能完全满足相似条件的流动而局部区域可以近似地采用这种方法称为局部相似性解。

2. 积分方法 这是工程界应用最广的近似方法。最初由 Pohlhausen (1921) 利用 Karman (1921) 给出的动量积分方程,选取单参数多项式的速度剖面,将积分后的常微分方程作为初值问题求解。方法简便而且也有足够高的精度。多年来这种方法又有几种新的演变。其中有高阶矩积分方程,即将边界层方程乘以 y^n 而后积分,如 Loitsionskii (1949), 或乘以 u^n 而后积分,如 Lees & Reeves (1964)。也有将方程乘以 u 的函数而分成若干条带进行积分,如 Dorodnitsyn (1960)。60年代以来用积分方法求解在逆压梯度下出现分离的复杂流动并取得一些进展。这将在最后一节介绍分离流时再予以补充。

3. 级数解 在有压力梯度的流动中,相似条件很难满足,多数用级数展开方法求解边界层方程。这种方法的精确度往往受到工作量的限制。最早是 Blasius (1908) 为了求解二维圆柱绕流问题而采用的。在驻点附近,让边界层外缘速度用级数表示成

$$U(\xi) = U_0 \xi (1 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots), \quad \xi = x/l$$

并将流函数 $\psi = \sqrt{U_0 \nu l} f(\xi, \eta)$ 中的 $f(\xi, \eta)$ 也展开成级数 ($\eta = y\sqrt{U_0/\nu l}$)

$$f(\xi, \eta) = f_0(\eta)\xi + a_1 f_1(\eta)\xi^2 + \dots$$

代入原边界层方程,并将 ξ 同次方的系数分开即得到 $f_0(\eta), f_1(\eta), \dots$ 所满足的线性常微分方程组。而后利用相应的边界条件依次求解 $f_0(\eta), f_1(\eta)$ 等。主要有 Howarth (1934), Hortree (1939), Gortler (1952) 等人的工作。

另外,由于边界层方程是属于抛物型方程,因此,如果在初始截面上给出速度剖面,同时给定外缘压力分布及壁面边界条件,则下游各个截面上的参数可以用数值方法一步一步地向前计算出来。然而在分离点附近由于出现奇点而算不下去。象这样带有根本性的问题直到现在还没有得到很好的解决。Goldstein (1930) 很早就分析了分离点特性,具有

$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \sim (x_0 - x)^{\frac{1}{2}}$ 的奇点,曾用级数研究过在什么条件下可以避免这种奇点的出现。Howarth (1948) 用级数解求得分离点位置。同时 Goldstein (1948) 将坐标进行转换,用级数分析了奇点,求得平板后缘下游的著名尾流解。

4. 匹配渐近展开法——边界层的高阶效应 这个方法的名称不一,早期在边界层理论中的提法有:内外层展开,双重渐近展开。现在统称为奇异摄动法,见 Van Dyke (1975)。

其实边界层方程本身便是 N-S 方程在高雷诺数 (小粘性系数) 下渐近展开的一级近似。Lagerstrom & Cole (1955) 利用渐近展开分析了边界层的高阶效应。对一般没有分离以及平滑物体绕流的低速流动来说, 二级近似 (一阶效应) 的边界层所确定的壁面摩擦系数已经足够精确, 即使雷诺数很低 ($= 10$ 或 5) 也行。但对超声速和高超声速来说高阶效应显得很重要。对于可压缩气体边界层, 现在研究得比较成熟的只是二阶效应。这些二阶效应计有:

曲率方面: 纵向曲率, 横向曲率。

与外流相互作用: 位移厚度, 熵梯度, 焓梯度。

壁面条件: 速度滑流, 温度跳跃。

举平板上位移厚度效应为例, Maslen (1952) 对超声速平板边界层的二阶效应研究表明, 亚声速范围内的摩擦系数和传热系数均不受二阶效应的影响, 而在超声速的情况下, 摩擦系数为

$$C_f = R_x^{-\frac{1}{2}} \left[A + B \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} R_x^{-\frac{1}{2}} + \dots \right]$$

其中 A, B 两个因子与气体性质有关, 而与 M 数无关。在高超声速范围内, 位移厚度受 M 数的影响更为显著。上式第二项将正比于 $M^{2+\omega}$, 其中 ω 为气体粘性系数与温度变化的指数。所以

$$C_f = R_x^{-\frac{1}{2}} \left[A + BM^{2+\omega} R_x^{-\frac{1}{2}} \right]$$

其中 $M^{2+\omega} R_x^{-\frac{1}{2}}$ 为相应的 Knudsen 数。

5. 差分方法 远在四十年前就有人使用差分方法对边界层方程进行数值计算, 见 Rosenhead (1963) 书中 281 页。原先用的是一种差分-微分形式, 60 年代初期 Smith & Clutter (1965) 充分利用并发展了这种形式。设 x 坐标表示流线方向, 差分-微分格式就是将 x 的微分项改用差分形式, 把边界层方程改为具有两点边值的常微分方程, 而后沿 y 方向将这组常微分方程当做初值问题求解, 从壁面开始进行迭代计算直到满足外边界条件为止。同时 60 年代初期, 已有不少作者把边界层方程全部改用各种差分格式。有些是将边界层方程进行变换后再采用差分, 如用 Von Mises 变换或用 Crocco 变换, 这种做法的好处是消除了因连续方程引起的麻烦。但不久就有人直接从物理坐标对边界层方程进行求解。然而用显式差分格式因稳定性要求过严, 处理连续方程仍有问题。Flügge-Lotz & Blottner (1963) 采用 Crank-Nicolson 的六点隐式格式, 比较成功地求解可压缩边界层方程, 并且用到具有化学反应的高温反应气体边界层, 见 Blottner (1964)。用差分方法解高阶 (主要是二阶) 边界层的有 Davis, R.T. & Flügge-Lotz (1964), 解粘性激波层 (边界层的推广) 的有 Davis, R.T. (1970 年)。关于差分方法在边界层中应用的一篇总结性的报告见 Blottner (1970)。

§2. 高速边界层

1. 可压缩边界层 由于飞行器的飞行速度增加, 必须考虑空气的可压缩效应。最早在边界层理论中引进可压缩效应的是 Busemann (1931)。所谓 Crocco-Busemann 关系式就是在这段时间内提出来的。当密度不再是常数时, 需要引进温度变数, 因此增加同时求解能量方程的复杂性。在这期间不少人对平板层流可压缩边界层做了大量计算工作, 其中有 Bus-

emann (1935), 卡门-钱学森[见 Karman - Tsien (1938), Crocco (1946) 以及 Chapman & Rubesin (1949)]。相当大的一部分的工作是利用不可压缩边界层已有的分析方法来处理可压缩的问题。于是就有好几种转换公式将可压缩边界层方程换成不可压缩边界层方程。这里有 Dorodnitsyn (1942) 和 Howarth (1948) 对平板边界层的横向坐标进行转换。继而又由 Illingworth (1949) 以及 Stewartson (1949) 在有压力梯度的一般情况下, 将横向与纵向坐标同时进行转换。这些变换公式的应用大大简化了可压缩边界层的分析计算。同时也说明人们为什么还要花很大气力对理想化了的不可压缩边界层进行深入细致研究的重要意义。Rosenhead (1963) 的一本有 687 页的书是继 Goldstein (1938) 之后又一本关于边界层的重要著作, 总结了五十多年来不可压缩层流边界层的主要研究成果, 引用了近 900 篇参考文献。后来 Van Dyke (1964) 在评论这本书时曾经把书中引用的文献按年度进行统计如图 1。从此图可以看出边界层研究在其五十周年之际为全盛时期。当然, 那个时候也预计不到在 60 年代后期由于电子计算机的出现, 边界层的研究活动又有大幅度的回升。

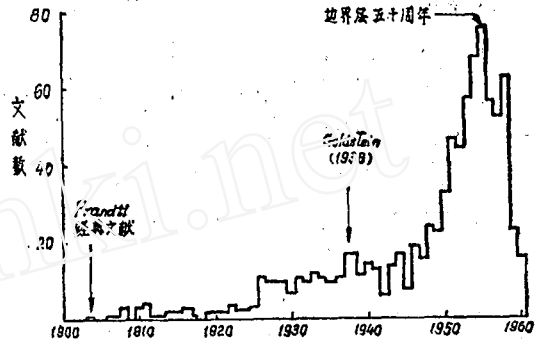


图 1 Rosenhead (1963) 书中引用文献按年分布情况

Rubesin & Johnson (1949) 以及 Eckert (1956) 总结了这个时期对可压缩边界层做的大量分析计算工作和实验结果。为了在工程应用上的方便, 他们分别提出了参考焓的方法。只要把与温度有关的气体性能参数, 密度 ρ 与粘性系数 μ 取用参考焓 (或温度) 下的数值, 则原来不可压缩平板边界层的摩阻公式仍可使用, 结果是

$$C_f = 0.664 R_x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\rho^* \mu^* / \rho \cdot \mu}$$

其中 ρ^* , μ^* 应在参考焓下取值, 参考焓为

$$h^* = h_e + 0.5 (h_w - h_e) + 0.22 (h_h - h_e), \quad h_h = h_e + \sqrt{\text{Pr}} u_e^2 / 2$$

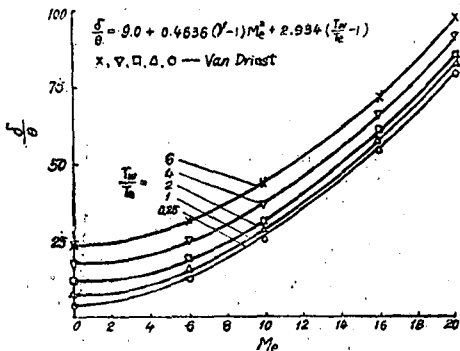


图 2 (a) 平板边界层厚度, $\text{Pr} = 0.75$, $\nu = 1.4$, $T_e = 218^\circ\text{K}$

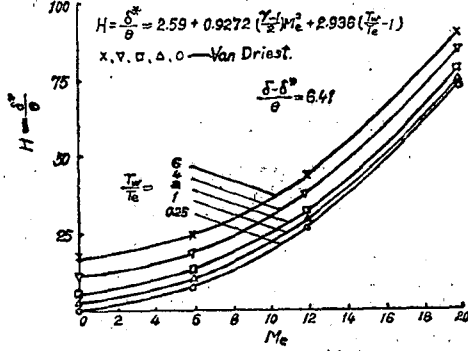


图 2 (b) 平板边界层形状因子

可压缩边界层厚度关系随来流 M 数的变化也很大,从Wilson(1965)的图可见一斑(图2)。

2. 高速边界层传热 随着飞行器速度进一步提高,气动加热成为必须考虑的因素。当人造地球卫星之类的高速飞行器再入大气层时,速度高达7.9公里/秒左右,其动能相当于约7500大卡/公斤。这些动能因大气的摩擦作用逐渐被消耗而产生热量。如此巨大的热量为一般结构材料所难以承受。因此在设计高速飞行器时,热防护问题显得非常突出。一般钝头体以上述速度在大气中飞行时,周围边界层内气体被加热到极高温度,驻点附近可达 6000°K 以上。这些被加热的气体分子内部各个能级(平动、转动、振动和电子)受到激发,从而产生离解甚至电离等反应。同时热能在边界层内以对流方式传输到飞行器表面。严重的气动加热足以引起表面材料的熔化或升华,同时材料本身在高温气流的作用下可能发生分解或燃烧。这种升华、分解和燃烧会吸收一部分热量,烧蚀产物进入边界层后随气流又带走一部分热量,从而减少从边界层传入物体表面的热流,对边界层传热起了一种屏蔽作用。这就是火箭技术中行之有效的烧蚀防热的原理。60年代初期,高速边界层传热课题的研究是在这种背景下兴起的。高速边界层由于高温气流而出现一些新的物理现象,比之低速边界层大大地复杂化了。一方面,高温气体介质不再象低速空气动力学中那样,假设气体性能参数为常值的理想空气,而是由分子、原子、离子和电子组成的多组分的反应气体。另一方面,烧蚀气体产物进入边界层后,不仅改变边界层的流场结构,而且可能与来流空气发生进一步的化学反应。这些新的物理现象给边界层传热分析增添了很大的麻烦。这里有高温气体的热物理特性问题,包括热力学特性,输运特性和热化学特性;有表面材料烧蚀过程中的物理化学问题;也有异相介质的传质传热问题。

超声速理想气体的边界层传热的研究工作到50年代中期已比较成熟。Cohen & Reshotko(1956)利用Stewartson的转换,考虑了壁面传热及压力梯度的效应,在相似解的条件下,详细计算了可压缩层流边界层的主要参数,壁面摩阻系数及壁面传热系数。这项工作常常被后来的作者们所引用。关于高超速声速反应气体边界层传热研究,开创于Lees等人。Lees(1956)首先研究了平衡流及冻结流的两种极限情况。Fay & Riddell(1958)等人较详细地求解高温平衡气体钝头驻点的传热问题,同时得到Rose & Stark(1958)相应的实验验证。非平衡边界层传热研究有Chung, P.M.等人(1960)的工作。湍流边界层传热方面的有Dorrance, W.H.(1961)以及Denison, M.R.(1961)的工作。与此有关的热力学性质及输运特性方面的研究有Scala(1959, 1960)等人的工作。这些开创性的工作已为高速边界层传热的大量应用研究奠定了基础。Dorrance(1962)及时地总结了当时关于这方面的研究内容。

§3. 层流稳定性

在高雷诺数下,多数流动将从层流转捩到湍流。层流稳定性问题早在上世纪末就有人开始研究。O.Reynolds, Lord Rayleigh是这方面工作的开创者。为了数学上的简化,早期稳定性的研究都是线性理论。本世纪初,Heisenberg(1924)研究了在两个平板之间的Poiseuille流动,用线性速度剖面得出了肯定的结果,不论是什么雷诺数,也不管是什么样的扰动波波长,认为这种类型的流动总是稳定的。Prandtl(1921)也考虑过粘性对稳定性影响的问题。二维层流边界层稳定性问题是由Tollmien, Schlichting等人在1924—1935期间进行研究的。Tollmien(1924)用Blasius速度剖面研究了平板层流边界层稳定性问题,并考虑

了粘性对扰动波的影响。他发现,当以来流速度和位移厚度为雷诺数超过临界值 420 时,就出现不稳定扰动波。Schlichting (1933) 推广了 Tollmien 的工作。Tollmien-Schlichting 的稳定性理论在当时是比较成功的。尽管边界层的实验研究到了 30 年代逐渐做出较重要的贡献,但对 Tollmien-Schlichting 理论在很长一段时间得不到实验的证明。直到 1940 年, Dryden 以及他的同事 Schubauer 和 Skramstad 第一次观察到 Tollmien-Schlichting 扰动波,正式文献见 Schubauer & Skramstad (1947)。他们是在新建的风洞(湍流度达到 0.02% 到 0.04%) 中很出色地做出这个闻名的实验的。因为只有当风洞中湍流度小于 0.1% 才能观察到在转捩之先出现 Tollmien-Schlichting 扰动波。在这些实验研究以及前人的理论工作基础上,林家翘 [Lin, C.C. (1945)] 对稳定性的数学理论进行了全面深入的分析,澄清了过去存在的分歧,对低速层流稳定性的研究,获得满意的结论。可压缩边界层的稳定性研究从 Lees & Lin (1949) 开始,而后有 Dunn & Lin (1955) 以及 Mack, L.M. (1965) 等人的工作。这些分析工作说明几个重要事实。可压缩边界层流动的稳定性受壁面温度的影响,冷却壁面增加稳定性 [Lees, L. (1947)]。另外,不稳定性能的扰动波包含多种谐波的模式,其最低频率的模式对应于不可压缩流动的 Tollmien 波。考虑可压缩影响的稳定性问题,即使在线性分析的范围内,要比低速的更加复杂。除了速度与压力的脉动外还必须考虑密度与温度的脉动,结果只有借助于电子计算机才能求解一组复杂的稳定性方程。Mack 等人做了大量的分析计算。

稳定性的研究只是说明在什么情况下,小扰动将随时间而增长,然而小扰动的增长并不就是层流将转变为湍流,而只是转捩的前奏。随着扰动波幅度的不断加大,线性稳定性理论已不适用。考虑非线性效应的稳定性以及边界层转捩这样的专题已非本文所能涉及。这里介绍几本关于稳定性方面的专著和论文供参考。Lin, C.C. (1955), Stuart [见 Rosenhead (1963) 第九章], Chandrasekha (1961), Betchev & Criminale (1967), Tani (1967, 1969), Stuart (1971), Reshotko (1976)。

§4. 湍流边界层(60年代前)

湍流边界层在 60 年代前的主要工作可以从三个方面作简要介绍:(1) 关于雷诺应力的半经验关系式;(2) 边界层结构,如速度分布的分析和实验研究;(3) 湍流边界层参数的计算,特别是摩阻系数和传热系数的计算。

研究湍流边界层的关键是湍流模式,也就是如何处理雷诺应力的问题。建立湍流模式的研究可以追溯到 100 年以前 Boussinesq (1877) 的工作。他引进湍流粘性系数 μ_t , 把湍流应力与局部平均速度梯度联系起来,就象层流的表达形式那样。但是 μ_t 与层流粘性系数不同,它不是流体性能参数而是决定于当地的湍流结构。引进 μ_t 远远不是湍流模式的建立,但是对建立湍流模式起着很重要的作用。如何把 μ_t 用已知参数或者可以计算出来的量表示,依然是一个艰巨的任务。Prandtl (1925) 对此做出了重要贡献,提出混合长概念,把湍流粘性系数用密度,平均速度梯度的数值以及特征长度平方的乘积来表示,即

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$$

混合长 l_m 的代数表达式仍需结合实验数据来提供。类似的工作还有一些,如 Karman (1930) 提出来的相似律假设,把混合长表示成为平均速度的一阶导数与二阶导数的比值,如

$$l_m = \kappa_1 \left| \frac{\partial u}{\partial y} / \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|$$

但 κ_1 也需要由实验确定,而且这个公式的适用范围很小,特别是具有拐点的速度剖面如湍流射流将出现 l_m 为无穷大的不合理局面。稍后,Prandtl(1945)对他原来的混合长设想做了改进,把原来用 $l_m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ 代表速度尺度改为用湍流动能 K 的平方根,即 $\mu_t = \rho \sqrt{K} l$,其中 l 仍然要用实验确定。不过湍流动能是从表示 K 的微分方程求解。关于用微分方程建立湍流模式的问题近来又有进展,我们将在下一节的近期发展中再加以补充。

利用雷诺应力的半经验关系再结合实验数据就可以分析边界层结构及其速度分布。但是由于湍流边界层各个区域的特征尺度不同,所以不可能有统一的速度剖面。湍流边界层的结构,根据Kovaszny(1967)的分法,可以分成四个区域:

(1) **粘性次层** 在这个区域内,粘性起着主导作用,但把它叫做层流次层是不恰当的,因为湍流脉动量与平均速度相比还是相当大的。

(2) **对数律区** 其速度分布满足对数律。

以上两个区域统属于内层,约占整个边界层的20%。内层速度剖面是内壁面剪应力 τ_w ,粘性 ν 及与壁面距离 y 三个主要参数所决定。用无量纲的形式表示为

$$u^+ = u/u_* = \varphi(y^+)$$

上式称为壁面律,其中 $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ 叫做摩擦阻速度,而 $y^+ = u_* y/\nu$ 为某种雷诺数。壁面律已有实验验证,见Ludwig & Tillmann(1949)。紧靠壁面的粘性次层, u^+ 与 y^+ 成线性关系,即

$$u^+ = y^+, \quad y^+ \leq 5$$

次层外面的速度分布用熟知的对数律

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + c, \quad y < 0.2\delta$$

其中 $\kappa = 0.41$, $c = 5.0$ 。有人把次层以外的区域再细分为缓冲区($5 \leq y^+ \leq 40$)及对数律区($40\nu/u_* < y < 0.2\delta$)。然而缓冲区并没有它的独特的速度剖面,人们往往把对数律和线性律直接联结起来。最近,包括整个壁面区而且在工程上应用很方便又有足够精确度的速度剖面是Spalding(1961)提出的:

$$y^+ = u^+ + e^{-\kappa u^+} \left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right]$$

见White(1974)书中475页或Hinze(1975)书中622页。

(3) **外层** 它离壁面较远,约占整个边界层的80%,这个区域内的流动是间歇的,类似尾流流动,也称尾流律区域。

(4) **超外层** 外层的边缘与非湍流无粘流交界的薄层。Corrsin & Kistler(1955)把它叫做湍流边界层的粘性超外层(Viscous Superlayer),其厚度与Kolmogorov的微尺度 η 同一量级, $\eta = (\nu^3/\epsilon_0)^{1/4}$ 。见Hinze(1975)书中567页。

在整个外层,速度与粘性系数 μ 无关,而只是壁面剪应力 τ_w 与 y 的函数,平均速度是用速度亏损律表示,即

$$\frac{u_* - u}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}, \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dp}{dx}\right)$$

在对湍流边界层外层速度分布的研究中，50年代中期 Clauser (1954) 及 Coles (1956) 的工作是有较大贡献的。外层速度分布无疑要受到压力梯度的影响。Clauser 发现如果用位移厚度 δ^* 替换 δ 组成压力梯度参数 $\beta = \frac{\delta^*}{\tau_w} \frac{dp}{dx}$ ，则当压力梯度有变化而 β 为常值的所谓平衡边界层时，实验数据就可以归并成一条曲线，速度剖面可以用一个参数表示。可惜他没有能够用简单的解析式表示出来。后来 Coles 进一步提出尾流律，利用尾流函数 $w(y/\delta)$ 将外层速度剖面表示成：

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + c + \frac{\pi}{\kappa} w(y/\delta)$$

其中 κ , c 与前面引用的一样，是与压力梯度无关的常数，而

$$w(y/\delta) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right), \quad \pi = 0.8(\beta + 0.5)^{0.75}$$

参见 Cebeci & Smith (1974) 或 White (1974)。

表 1 列出湍流边界层各个区域的特征尺度及相应的速度分布。

表 1

	内 层		外 层	
	粘性次层	对数律区	尾流律区	超外层
分层厚度	$y^+ < 5$	$\frac{y}{\delta} < 0.2$	$0.2 < \frac{y}{\delta}$	$0.4 < \frac{y}{\delta}$
特征长度	ν/u_τ	ν/u_τ	δ	$(\nu^3/\varepsilon_0)^{1/4}$ (Kolmogorov 微尺度)
特征速度	u_τ	u_τ	u_τ	$(\nu\varepsilon_0)^{1/4}$ (Kolmogorov 度速)
速度剖面	$u^+ = y^+$ (线性律)	$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + c$ (对数律)	$\frac{u_\tau - u}{u_\tau} = f\left(\frac{y}{\delta}, \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dp}{dx}\right)$ (亏损律)	
	----- <i>Spalding</i> 剖面		$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + c + \frac{\pi}{\kappa} w\left(\frac{y}{\delta}\right)$ (尾流律)	

为了适应工程应用的需要，人们对湍流边界层的摩阻系数与传热系数的计算与实验研究做了大量工作。由于所有理论采用的主要假设不完全相同，取用的实验数据也不一致，所以对这些理论作出恰当的评价也比较困难。Spalding & Chi (1963, 1964) 总结了 60 年代以前的关于平板湍流边界层近二十种理论，并把这些理论分成五大类：(1) 用 Prandtl 混合长理论；(2) 用 Karman 相似理论；(3) 用微分方程并假设 τ 为常值；(4) 用已知的速度分布；(5) 用参考焓。他们用当地摩阻系数的测量数据与计算值两者之差的均方根值为基础，对上述各种理论进行比较，认为结果较好的计算工作有 Sommen & Short (1955)，Kutateladze & Leont'ev (1961)，Wilson, R.E. (1950)，Van Driest (1955)。

在评论各种理论的基础上, Spalding & Chi (1964) 提出他们自己的半经验理论公式, 计算结果与实验比较符合得更好。

总之边界层理论的分析 and 实验研究工作在50年代前后为全盛时期。前面提到的是一些主要方面的进展, 其它如三维边界层, 非定常边界层以及边界层转捩等主要课题均有所发展。有些已载入专著, 如 Rosenhead (1963), Schlichting (1968), Stewartson (1964), Curle (1962), Kutateladze & Leont'ev (1962), Rotta (1962) 等。到了60年代中期, 由于电子计算机的出现, 推动了边界层在各个方面的研究工作, 下一节将重点介绍某些进展情况。

二、近十五年来的新进展

从60年代中期到现在约十五年为边界层研究历程的第三阶段, 是深入攻坚的阶段。这个时期的主要特点和其它应用学科一样应该是计算机时代的体现。由于高速电子计算机的出现以及新实验技术的运用, 边界层研究又加快了前进的步伐。在现代计算技术及先进实验方法的推动下, 流体力学中的两大难题, 湍流与分离流有了新的迈进势头, 而后者在国内外均被看做是迫切需要而又有可能解决的研究课题, 正在群起而围攻之, 所以可望于最近不太长的时间内有所突破。

§5. 湍流边界层的近期进展

上一节已经介绍了湍流边界层在60年代以前的大概情况。近十五年来的发展仍然围绕着前面提到的三个方面: (1) 湍流模式的建立; (2) 湍流边界层的计算; (3) 湍流边界层结构的研究。关于湍流模式的问题, 早在三十多年前 Prandtl (1945) 以及 Kolmogorov (1942) 就曾建议用微分方程来确定湍流粘性 μ_t , 直到最近借助于有效的近代计算工具, 他们的建议才能付诸实施而且有新进展。所以近期湍流模式的建立与湍流边界层的计算是密切相关的。美国斯坦福大学于1968年举行的湍流边界层计算的专题会议就是评价当时已经使用的若干计算方法, 见 Kline (1968)。在这次会议上, 有28种计算方法用来计算不可压缩湍流边界层。为了便于比较, 会议的组织者要求每个作者给出他的方法要点, 计算方案以及所有需要用到的函数和参数, 以便重复文章中的计算。同时在这次会议上也突出了用微分方程的湍流模式。主要模式计有:

1. **零方程模式** 这是最早用代数关系式给出的, 如 Prandtl 混合长理论 $\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$

以及 Karman 的相似性假设, $l_m = \left| \frac{\partial u}{\partial y} / \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|$ 均属于零方程 (即代数方程) 模式。

2. **一方程模式** Prandtl 早就意识到他的混合长理论的局限性, 所以于1945年提出用湍流动能的平方根 \sqrt{K} 作为特征速度, 而 K 由湍流动能方程求解, 即

$$\frac{dK}{dt} = \overline{uv} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[v \left(K + \frac{p}{\rho} \right) \right] - \epsilon$$

此时湍流粘性为 $\mu_t = \rho \sqrt{K} l$ 。所以除了平均流场的微分方程外, 还要加上湍流动能方程, 但 l 还必须另外给定。采用这种一方程模式的还有 Nee & Kovaszny (1969)。

3. 二方程模式 在Prandtl(1945)之前, Kolmogorov(1942)就提出更为合理的模式。除了用求解湍流能量 K 的微分方程外, 还用另一个方程求频率 f , 从而湍流特征长度 $l = \text{const} \sqrt{K}/f$ 。另外Harlow-Nakayama(1968)用了求能量 K 及能量耗损率 ϵ 两个方程, 其特征长度 $l = \text{const} K^{3/2}/\epsilon$ 。如果说一方程模式把零方程模式的半经验性质提升到理论高度, 但 l 的给定还带有半经验性质, 那么二方程模式就更为合理。所以从理论上讲, 二方程模式得到多数人的支持, 但从实用上给定 l 并不太困难, 比增加一个方程进行求解更为方便。所以一方程模式的改进和推广还值得进一步研究。

关于建立湍流模式更为全面的论述见 Launder & Spalding(1972)。

湍流结构方面的研究近十多年来发现一些新现象, 引起人们的极大兴趣。Brown & Roshko(1974)对湍流混合层的实验研究, 得到引人注目的成果。他们的实验在原理上很简单, 用两种不同气体均匀流动, 观察交界面上的混合过程。出乎意料的是, 在改变各种参数如两种气流的速度比 u_1/u_2 , 密度比 ρ_1/ρ_2 , 马赫数等的情况下, 均看到有规则的大尺度旋涡结构。他们的阴影照片已经或为说明相干结构具有说服力的示范性资料, 见Roshko(1976)。研究这种相干结构的另一途径是在美国斯坦福大学由Kline, W.C.Reynolds等人进行的。他们在简单的水槽中, 用流场显示技术研究湍流边界层的结构, 观察到所谓猝发(burst)现象。他们研究湍流边界层相干结构已有十多年的历史, 从1963年到1967年第一阶段的研究报告见Kline(1967), 报告中描述了在湍流边界层底层中观察到猝发现象三部曲的过程。首先在底层低速区出现染色流线条纹顺流而下, 并逐渐离开壁面上升到达 $y^+ = 10$ 左右的高度; 继而以纵向涡的形式突然发生周期性的振荡; 最后爆发出无规的随机运动而结束猝发过程。整个过程间歇地不断产生和消失。后来, 斯坦福大学还有Kim(1971)以及Offen & Kline(1974)等人的有关报道。另外, 在俄亥俄大学, Corino & Brodkey(1969)也进行了同样性质的有关剪切流相干结构的实验研究。Willmarth(1975)已经把这些实验结果及初步分析详细地做了总结。

相干结构的现象过去也曾出现过, 不过人们没有象现在这样去认识它。Townsend(1956)在对剪切流结构的研究中论述了大尺度涡的运动。圆柱后面的湍流尾流中靠近柱体的地方就有非常规则的, 周期性旋涡从物面脱落下来, 而且可以维持到几十个直径之远。Emmons(1951)在研究湍流成因时, 提出著名的湍流斑随之形成湍流楔的转换过程。在湍流作用下, 高速飞行器的烧蚀表面上往往形成有规则的菱形花纹等。如此种种, 一些貌似随机而实际有序的流动均可能从属于湍流相干结构的研究范畴。

本来湍流被认为是无规则的随机运动, 虽然具有统计性能, 但与确定性的相干结构在概念上是两回事。因此相干结构与湍流本身究竟是一个什么样的关系? 相干结构怎样形成以及如何定量描述? 新现象带来新问题, 有待人们进一步探索。毫无疑问, 相干结构的研究可以深入理解湍流的物理细节, 而这些往往不能单纯从统计平均的雷诺方程求得。

§6. 边界层分离流的研究现状

边界层研究的近期进展中的另一个重要方面是边界层分离流。尽管分离流动主要是由粘性效应引起的, 但分离流不一定都能归纳到边界层的范畴。而且, 在这计算机时代, 有些包括分离流在内的复杂流场已经可以直接用全N-S方程进行计算, 其中分离流方面的计算也不算少, 如Briley(1971), MacCormack(1975) Hung & MacCormack(1976, 19

78), Shang (1975)。同时流动从物面分离以后,特别是在分离区较大的情况下,边界层的近似已不适用,因此有无必要仍然从边界层角度来探讨分离流问题。事实上,我们应该充分估计到计算机的威力,好多过去不敢过问的复杂问题,现在可以处理了。所以用全 N-S 方程求解是一个重要方面,但这种大型计算毕竟还只是一种数值实验。在实际应用中,除了那些物理模型已经清楚,计算方法已经成熟的问题外,一般还不能单靠大型计算来解决实际问题。有些问题特别是象湍流和分离流等,或者因为物理模型有待研究,或者因为流场结构还不清楚,这就要借助于一般计算方法和实验手段进行分析研究。研究分离流的近似分析方法多数还是利用边界层理论。

分离流是流体力学中的一个古老的难题,而且出现在许多流动问题中,对物体所受流体的作用力有重要影响。如对钝体绕流来说,分离点位置可以影响物体的压阻。飞机的机翼或涡轮叶片在大攻角下,环流的大小受分离条件控制,因此对升力有影响,飞机失速的主要缘由就是分离引起的。其它如内部流象喷管,扩压器等器件往往因为出现分离流以致流场引起急剧变化而影响这些器件的使用效果。近十多年来由于高速分离流的再附区受热情况特别严重,因此对高超声速分离流受到高度的重视。外形比较复杂的高速飞行器有些部件如控制面与弹体交接的地方,激波与边界层的相互作用的地方,都是容易产生分离流的高压区。这些分离区受热的详细情节还很不清楚,但已有不少实验结果足够说明再附区的热流很高,如 Korkegi (1971), Hung (1977) 等报道,在激波与边界层相互作用后分离流的再附区的最高热流比原来附体流的增加到 100 倍以上。力学所激波管实验室也有热流增加到 40 多倍的实验结果。从流体力学中的边界层这个小天地来看,国内外对分离流的研究是非常活跃的。国外关于这方面的总结性报道已不少。我们可以看到的有 Hankey (1975) 的报道,介绍他们在 1964—1974 这十年期间关于分离流研究计划,进展及一些研究成果。Brown & Stewartson (1969) 以及 Williams (1977) 这两篇是不可压缩分离流的总结。Smith, J.H.B. (1975) 介绍了关于三维分离流的一些研究内容。1975 年 AGARD CP 168 的论文集代表近期的分离流研究活动,登载了 40 篇分离流的报告。

分离流有两种性质不完全一样的情况。当物体表面附近压力沿流向增加而有逆压梯度时,边界层内流体的动量受着压力和摩擦影响而渐渐消失,在某一点上粘性层从物面发生压缩性的分离。分离点下游形成一个回流区,原边界层绕过回流区在再附点又回到物面上来。也有因为物体表面几何形状突然变化,如后向台阶或底部附近产生膨胀性的分离流。压缩分离和膨胀分离的流场都有包括回流的分离区与再附区。另外一种分离流动是当飞行器在大攻角下飞行时物体背风面或机翼前缘产生脱体涡,或者某些钝体如圆柱,圆球这样形状的物体绕流的脱体涡流动。这种分离流目前需要研究的课题有:脱体涡的形成机理,这是粘性流问题;旋涡在分离区无粘流场中的运动规律及其稳定性;脱体涡分离对气动力的影响等。我们现在要讨论的是前一种有分离和再附的分离流,并且是用边界层方法进行处理,也就是说,我们着重讨论的是边界层分离流。

用边界层方程处理分离流时,首先碰到的难题就是如何消除在分离点上出现的奇点。边界层方程是和热传导方程一样的属于抛物型方程,以二维定常不可压缩层流边界层为例,方程有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

边界条件为

$$y = 0 \text{ 时, } u = v = 0$$

$$y \rightarrow \infty \text{ 时, } u \rightarrow u_\infty$$

通常进行数值计算时,除了给出上述边界条件而外,还必须提供压力梯度分布以及在初始截面上的初值,即 u 的分布。求解时是从初始截面一步一步地向前推进。任何截面上的参数在 $u > 0$ 的情况下将不受下游的影响。然而从物理含义来看,运动方程中的各项是代表三种作用力的平衡。惯性力沿着正 x 方向,摩擦力总是与流动方向相反。此时如果边界层外缘提供的是顺压梯度,摩擦阻力不可能消失,则边界层方程的解是正常的。相反,如果是逆压梯度,摩擦阻就有可能为零,边界层计算就不能继续下去。一种原因认为边界近似在分离点附近不再适用。其实,给定外缘压力分布作为边界条件,对分离流来说值得重新考虑。Goldstein (1930) 曾经指出在某种特定的压力分布条件下即可消除奇点。通常边界层计算用的压力分布是由无粘流的解所提供,但考虑到边界层位移厚度的增长效应,压力分布必然有所增加。特别是在分离点附近,这种趋势更为显著。Catherall & Mangler (1966) 就是根据这些想法,对边界层方程进行数值计算时,改变通常的做法,结果顺利地通过分离点。他们的作法是在接近分离点时,用给定位移厚度以代替给定压力梯度,压力分布是作为求解的一部分。实际上这是反问题的提法。后来 Klineberg & Steger (1974) 也成功地求得分离流的解。他们是给定壁面阻力而不是给定位移厚度,从解的结果再求压力分布,所以也是反问题。这样人们初步克服了出现奇点的困难。当 $u > 0$ 时向前推进计算并不困难,但在分离区中有 $u < 0$ 的部分,仍然用向前推进的做法就不合适。处理这种由于 u 有正有负的混合型的抛物型方程并不难,在后面讨论具体解法时再加以说明。最后需要解答的问题就是:不论给定位移厚度也好,或是给定壁面摩擦阻也好,这种反问题需要提供的条件又是从何而来?其实多年来人们已经从不同角度捉摸这个问题,那就是必须考虑边界层外缘无粘流与粘性流的相互作用。由于在相互作用下的压力变化是未知的,因此需要寻找另外的补充条件或方程,而不是给定压力分布或给定壁面摩擦阻的做法。

现在处理边界层分离流并考虑外缘无粘流与粘性流相互作用的分析计算方法可以举出三种: 1. 积分方法; 2. 差分方法; 3. 匹配渐近展开法。

1. 积分方法 这里又有两种类型: 一是 Lees-Reeves 等人的方法, 另一种是 Holt-Nielsen 积分方法。

Lees-Reeves (1964) 采用 Pohlhausen 积分方法处理分离流。通常的积分方法是在给定压力梯度的情况下,将微分方程变成积分方程,选定适当的速度剖面即可求得流场参数。但考虑相互作用时,外缘压力分布是未知数的,速度剖面中用的参数也属未知。他们采用的速度剖面参数是:

$$a = \frac{\delta}{u_\infty} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (\text{分离点前附体流})$$

$$a = y_0 / \delta \quad (y_0 \text{ 为分界流线位置})$$

因此需要增加一个关系式,他们用的是动量矩积分方程。在求解时还需要选取速度和总焓剖面。一般多项式剖面不适用于分离区流动,他们采用了具有回流特性的 Falkner & Skan

相似解的数值结果，用逼近的办法把速度剖面表示成参数 a 的多项式形式。他们用这个方法计算激波与层流边界层的相互作用，结果与实验比较相符（图 3）。

关于处理外缘无粘流与粘性流相互作用的细节见 Klineberg & Lees (1969.)

另一种类型是 Holt-Nielson 积分方法。这个方法是 Dorodnitsyn (1960) 积分关系法的引伸。主要做法是将边界层方程乘以 u 的加权函数 $f(u)$ 而后对 y 积分。这和前面的动量矩积分方程相似，只不过 $f(u)$ 可以选为 u^n ($n=0, 1, 2, \dots$)，也可以选用 $(1-u)^n$ 。把被积函数转换成 u 的函数，并将对 y 的积分改做对 u 的积分，其中 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{z}$ 作为未知量。如

果把边界层分成 m 个条带，将 z 再展开成 u 的多项式 (m 个)，代入积分方程即得 m 个代数式，结合边界条件求得 m 个条带上的 z 值。

Holt 等人从 1966 到 1975 年化了十年时间，利用这种积分方法系统地研究了压缩拐角分离流动。Holt (1966) 首先研究了绝热平板上均匀层流中给予一个微小压力增加的效应。在压力急剧增加的下游，边界层加厚，从而促使压力作进一步的升高。这种压力升高与边界层增厚之间的相互作用，使得边界层产生分离。1967 年，他在处理同样问题时，只是将壁面冷却到不同温度，发现壁面冷却会缩小分离区的范围，从 1968 年起，他们正式计算压缩拐角的分离流。取用一系列压力增加起始点的位置，给出了回流区一直到再附区的详细情况。最近 Holt & Lu (1975) 才完整地处理了压缩拐角分离流的问题。从分离点到再附区下游的整个边界层以及分离区的生长是用迭代法计算的，但仍然需要挑选起始相互作用点使得再附区下游的积分曲线趋向于均匀等压条件。计算表明起始点的位置是唯一的，迭代过程也是比较快的。

积分方法用到分离流还是几个方法当中较早被采用的。Lees 等人选取适用于分离区的剖面这种做法带有半经验性质，需要利用他人已有的计算结果。Holt 等人的方法在高阶近似下代数运算很繁重，四个条带已足够麻烦的了。

2. 差分方法 用差分方法求解边界层分离流并包括无粘流与粘性流相互作用的研究工作正在发展中。Reyhner & Flügge-Lotz (1968) 比较早地用差分方法求解边界层分离流的问题。具体计算了激波与层流边界层干扰流场。在考虑无粘流与粘性流相互作用时，用 Prandtl-Meyer 公式确定外缘压力分布。回流区用积分方法以及全部用差分方法两种进行了比较。计算结果与实验比较相等。Dwoyer (1973) 计算了压缩拐角的分离流。最近 Klineberg & Steger (1974) 用较为合理的差分格式处理回流区。但仍然是反问题，即给定壁面摩阻使计算顺利通过奇点，并仔细地探讨了分离区与再附区的边界层结构。在反问题中，不论是给定位移厚度还是给定壁面摩阻，总不免有点任意性。于是 Carter (1975a, 1975b) 把上述问题用边界层方程又重新进行计算，用的初始值是 Briley (1971) 对全 N-S 方程的精确数值计算的结果。比如用 Briley 算出来的位移厚度作初始条件求解边界层方程，计算出来的壁面阻力与外缘速度分布（即压力分布）与精确计算结果相符。又如同 Briley 的壁面摩阻

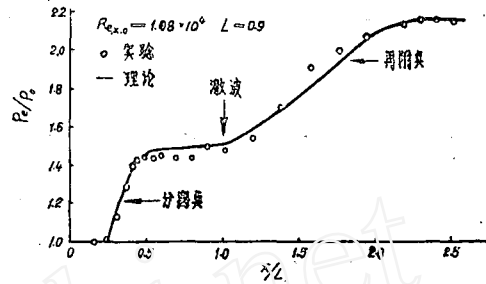


图 3 激波与层流边界层干扰区压力分布（理论与实验）

作初始条件, 计算出来的位移厚度和外缘压力分布也与精确解一致。这说明用反问题方法处理奇点是成功的。

在处理回流区的问题时要注意前向流 ($u > 0$) 与倒流 ($u < 0$) 的区别。边界层方程中的对流项一般用迎风差分。因此, 当 $u > 0$ 时, 用后向差分; $u < 0$ 时, 用前向差分。所以在回流区为了适应流动方向的改变, 对流项就从后向差分转换到前向差分。可是用前向差分, 向前推进的算法就不适用。在计算某一个截面上的参数时需要下一个尚未算到的截面上的数据。为此就要在主流方向上从分离点前到再附点后进行扫描式的总迭代, 这种总迭代过程有多种, 但往往出现不稳定情况。Carter (1975b) 引进了类似于时间项进行松弛迭代, 结果良好。另外, Carter (1975a) 还介绍一种近似处理回流区的做法。在许多情况下, 用迭代方法求解回流区并没有必要。由于回流区的流向速度很小, 往往不及外缘速度的 5%, 因此忽略对流项不会对回流区的流动有多大影响。实际上就是忽略回流区下游对上游的影响, 对不太大的回流区来说, 这种近似是可以接受的。Reyhner & Flugge-Lotz (1968) 证明了当 $u < 0$ 时把对流项省掉, 用通常向前推进的差分计算方法来解分离流的边界层方程是稳定的。

3. 匹配渐近展开法 (三层结构) 为了较好地理解无粘流与粘性流相互作用的机理以及深入分析分离与再附区的流场结构, 用匹配渐近展开原理看来是一个值得注意的新方法。边界层的三层结构 (原名 Triple Deck) 是由 Stewartson & Williams (1969) 首先提出来的。在 Stewartson (1974) 文中有较详细的介绍。与此同时, Messiter (1970) 也用了类似的做法处理平板后缘问题。

先用一个物理问题来说明这个方法的含义。激波与平板层流边界层相互作用的问题从 40 年代起就有人研究, 如 Liepmann (1946), Chapman (1958) 等人的实验工作。最突出的迹象就是边界层在与激波相交点之前一段距离发生分离。从物理上很好理解, 因为激波后的压力升高通过边界层靠近壁面的亚声速区向前传播, 使边界层增厚, 从而诱导外缘压力再升高。在这种循环作用下, 最终边界层从物面分离。但从边界层方程属抛物型的性质来说是难于解释的。在分离之前下游扰动不应该影响上游。三层结构设想形成的最初阶段是从无粘流的角度出发的。激波与边界层相互作用区间, 压力梯度特别大而压力变化不一定很大 (如弱激波), 因为压力变化是在很窄的区间产生的。当边界层方程中的压力项远比粘性项大的时候, 粘性影响就可以忽略。因此我们把边界层本身再分为两层, 外层为无粘流, 可能占大部分, 内层为粘性流。Stratford (1954) [见 Rosenhead (1963), p.324] 就是根据这个想法把边界层分为两层求解, 并要求内外两层的解满足适当的连接条件, 最终求得分离点的位置。随后, Gadd (1957) 又把这个方法推广到超声速分离流。虽然他们的数学处理还不完善, 但是他们的做法可以作为匹配渐近解的物理模型, 而基本思想则是来源于 Lighthill (1953)。

匹配渐近展开法中的小参数用 ϵ 表示, 其定义是

$$\epsilon = R^{-\alpha}, \quad \epsilon \ll 1$$

R 为雷诺数, α 为待定常数。Messiter (1970) 在分析平板后缘流场结构时, 用渐近展开法推导出 $\alpha = 1/8$ 。可以看出, 经典边界层厚度为 $O(\epsilon^4)$ 。Stewartson 的三层模型把分离区附近的边界层包括相互作用下的外缘无粘流在内分成上层、主层及下层。上层的厚度为 $O(\epsilon^3)$; 属于无粘无旋流。主层是原边界层的外层, 厚度为 $O(\epsilon^4)$, 流动性质为无粘有

旋流，下层的厚度量级为 $O(\epsilon^5)$ ，这里保留原边界层的性质。分离扰动区的横向尺度为 $O(\epsilon^3)$ 。现在根据每一层本身的尺度将坐标分别加以放大。用 x^* ， y^* 等表示原物理平面中的坐标，则放大坐标为：

$$\text{上层: } X = (x^* - x_i^*) / \epsilon^3 x_i^*, \quad Y_u = y^* / \epsilon^3 x_i^*$$

$$\text{主层: } X = (x^* - x_i^*) / \epsilon^3 x_i^*, \quad Y_m = y^* / \epsilon^4 x_i^*$$

$$\text{下层: } X = (x^* - x_i^*) / \epsilon^3 x_i^*, \quad Y_l = y^* / \epsilon^5 x_i^*$$

其中 x_i^* 为分离点(或后缘)坐标。 X ， Y_u ， Y_m 及 Y_l 的量级均为 $O(1)$ 。同时我们将变量展开如下：

$$u^*/u_\infty^* = u_0(Y) + \epsilon u_1(X, Y) + \epsilon^2 u_2(X, Y) + \dots$$

$$v^*/u_\infty^* = \epsilon^2 v_1(X, Y) + \epsilon^3 v_2(X, Y) + \dots$$

$$(p^* - p_\infty^*) / \rho_\infty^* u_\infty^{*2} = \epsilon p_1(X, Y) + \epsilon^2 p_2(X, Y) + \dots$$

$$\rho^* / \rho_\infty^* = R_0(Y) + \epsilon \rho_1(X, Y) + \epsilon^2 \rho_2(X, Y) + \dots$$

Y 在三层中分别取 Y_u ， Y_m ， Y_l 。最后将转换坐标以及上述变量展开式代入N-S方程，取 ϵ 的同阶项求得各个区域的主管方程。各层之间利用连接条件进行匹配。这就是匹配渐近展开法，见Van Dyke(1975)。

三层结构如表2及图4所示。

表 2

	纵向扰动区	厚度	放大坐标	流动性质
上层	ϵ^3	ϵ^3	$X = \frac{x^* - x_i^*}{\epsilon^3 x_i^*}, Y_u = y^* / \epsilon^3 x_i^*$	无粘无旋
主层	"	ϵ^4	$X = \frac{x^* - x_i^*}{\epsilon^3 x_i^*}, Y_m = y^* / \epsilon^4 x_i^*$	无粘有旋
下层	"	ϵ^5	$X = \frac{x^* - x_i^*}{\epsilon^3 x_i^*}, Y_l = y^* / \epsilon^5 x_i^*$	边界层

用上述方法分析分离区流场结构的研究工作近年来正在兴起，诸如压缩拐角，平板后缘流动甚至钝体绕流均已有一些报道，见Jenson(1974)，Burggrof(1975)，Messiter(1973, 1975)，Napolitano(1979)，Smith, F.T.(1977, 1979)。

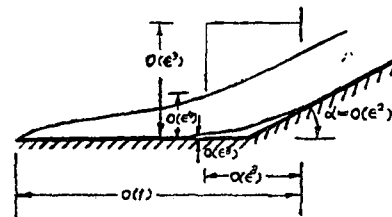


图4 边界层三层结构示意图

总之,对于十多年来边界层研究的近期进展,我们只是重点介绍了湍流边界层及边界层分离流两个比较突出的方面,必然是挂一漏万。最后还应提一下在这两方面的进一步研究课题,分离流有:

非定常分离流

三维分离流

湍流分离流

湍流边界层方面有:

三维湍流边界层

可压缩湍流边界层

有粗糙表面的湍流边界层

边界层转捩

湍流再层流化 (Relaminarization)

具有传质传热的湍流边界层

边界层是一个古老的课题,也是难度较大的课题。但是为了实际应用的需要,为了深入理解流场结构的需要,也是为了实现四个现代化的需要,还有大量的工作,包括试验研究,理论分析及数值计算三个方面,有待我们努力去做。

参 考 文 献

- Betchev & Criminale (1967), Stability of Parallel Flow.
Blasius, H. (1908), *Z.Math.Phys.*, 56: 1-37.
Blottner, F.G. (1964), *AIAA*, 2, 11: 235-240.
—— (1970), *AIAA*, 8, 2: 193-205.
Briley, W.R. (1971), *JFM*, 47: 713-736.
Brown, G.L. & Roshko, A. (1974), *JFM*, 64: 775-816.
Brown, S.N. & Stewartson, R. (1969), *Ann.Rev.Fl.Mech.*, 1.
Burggrof, O.R. (1975), AGARD cp.168.
Busemann, A. (1931), *Handbuch der Experimentalphysik*, ed. W. Wien, 4(I).
—— (1935), *ZAMM*, 15: 23-25.
Carter, J.E. (1975a), NASA TR-R, 447.
—— (1975b), *AIAA*, 13, 8: 1001-3.
Catherall & Mangler (1966), *JFM*, 26: 163-182.
Cebesi & Smith (1974), Analysis of Turbulent Boundary Layer.
Chandrasekha, S. (1961), *Hydrodynamic & Hydromagnetic Stability*.
Chapman, D.R., et al (1958), NACA 1356.
Chapman & Rubesin (1949), *JAS*, 16: 547-565.
Chung, P.M. (1960), Proc. 1960 Heat & Mass Transfer & Fluid
Mech. Institute, Standford Univ. Press.
Clauser, F. (1956), *JAS*, 21: 91-180.

- Cohen & Reshotko (1956), NACA Rep.1293, 1294.
- Coles, D. (1956), *JFM*, 1: 191.
- Corino & Brodkey (1969), *JFM*, 37, 1: 1-30.
- Corrsin & Kistler (1955), NACA Rep.1244.
- Curle, N. (1962), The Laminar Boundary Layer Equations.
- Davis, R.T. (1970), *AIAA*, 8, 5: 845-851.
- Davis, R.T. & Flugge-Lotz (1964), *JFM*, 20, 4: 593-623.
- Denison, M.R. (1961), *JAS*, 28, 6: 471-9.
- Dorodnitsyn (1960), *Adv.Aeron.Sci.*, vol.3.
- Dorrance, W.H. (1961), *ARS J.*, 31, 1: 61-70.
- (1962), Viscous Hypersonic Flow.
- Dryden (1955), *Science*, 121: 375-80
- Dunn & C.C.Lin (1955), *JAS*, 22: 585-7.
- Dwyer, D.L. (1973), Proc.AIAA CFD Conf. (1973).
- Eckert, E.R.G. (1956), *Trans. ASME*, 78, 6: 1273.
- Emmons, H.W. (1951), *JAS*, 18: 490-8.
- Falkner & Skan (1930), A.R.C., RM 1314.
- Fay & Riddell (1958), *JAS*, 25: 73-85.
- Flugge-Lotz & Blottner (1963), *J.de Mechnique*, II.4.
- Gadd, G.E. (1957), 24.10.
- Goldstein, S. (1930), *Proc.Camb.Phil.Soc.*, 26: 1-30.
- (1938), Modern Developments in Fluid Dynamics.
- (1939), *Proc.Camb.Phil.Soc.*, 35: 338-40.
- (1969), *Ann.Rev.Fl.Mech.*, 1.
- Gortler, H. (1952), *ZAMM*, 32: 216-31.
- Hankey, M.L. (1975), AD A 014245.
- Harlow & Nakayama (1967), *Phys.Fluids*, 10: 2323-32.
- Hartree, D.R. (1937), *Proc.Camb.Phil.Soc.*, 33: 223-39.
- Hinze, J.O. (1975), *Turbulence*, 2nd.Ed.
- Holt, M. (1966), AGARD cp.4.
- Holt & Lu (1975), *Acta Astronautics*, 2: 409-29.
- Howarth, H. (1934), A.R.C.RM 1632.
- (1948), *PRS A194*: 234-243.
- Hung, et al (1977), *J.Spacecrafts & Rockets*, 14, 1: 25-31.
- Hung & MacCormack (1976), *AIAA*, 14, 4: 475-481.
- (1978), *AIAA*, 16, 10: 1090.
- Illingworth, C.R. (1949), *PRS, A 199*: 533-557.
- Jenson, R., et al (1974), *Lecture Notes in Phys.*, vol.35.
- Karman (1921), *ZAMM*, 1: 233-52.

- Karman & Tsien (1938), *JAS*, 5: 227-232.
- Kim, et al (1971), *JFM*, 50: 133-160.
- Kline, S.T., et al (1967), *JFM*, 30: 741-773.
- (ed.) (1968), *The Computation of Turbulent Boundary Layers-1968*.
- Klineberg & Lees (1969), *AIAA*, 7, 12: 2211-21.
- Klineberg & Steger (1974), *AIAA*, 74-94.
- Kolmogorov (1942), *Izv. Acad. Nauk SSSR, ser. Phys.*, 1-2, 56.
- Korkegi, R.H. (1971), *AIAA*, 9: 5.
- Kovaszny, L.S.G. (1967), *Phys. Fluids*, 10, 9: Supplement.
- Kutateladze & Leont'ev (1961), *Appl. Mech. Tech. Phys.*
(in Russian), no.4.
- (1962), *Turbulent Boundary Layer in Compressible Gases*.
- Lagerstrom & Coles (1955), *J. Rational Mech. Anal.*, 4: 817-82.
- Launder & Spalding (1972), *Mathematical Model of Turbulence*.
- Lees, L. (1947), *NACA TR 876*.
- (1956), *Jet Prop.*, 26: 259-69.
- Lees & Lin, C.C. (1946), *NACA TN 1115*.
- Lees & Reeves (1964), *AIAA*, 2, 11.
- Liepmann (1946), *JAS*, 13: 623.
- Lighthill (1953), *PRS, A217*: 478.
- Lin, C.C. (1945), *Q. Appl. Math.*, 3: 117-42; 218-34; 277-301.
- (1955), *The Theory of Hydrodynamic Stability*.
- Loitsianskii (1949), *NACA Tm 1293*.
- Ludwig & Tillmann (1949), *NACA TM 1285*.
- MacCormack (1975), *AIAA*: 75-1.
- Mack (1965), *AGARDograph*, 97: 329-62.
- Maslen, S.K. (1952), *NACA, TN 2808*.
- Messiter, A.F. (1970), *SIAM J., Appl. Math.*, 18: 241-57.
- (1973), *JFM*, 60: 605-624.
- (1975), *AGARD cp.168*.
- Napolitano (1979), *AIAA*, 17, 7: 699-705.
- Nee & Kovaszny (1969), *Phys. Fluids*, 12: 473.
- Offen & Kline (1974), *JFM*, 62, 2: 223.
- Pohlhausen (1921), *ZAMM*, 1: 115-121.
- Prandtl, L. (1921), *ZAMM*, 1: 413-436.
- (1925), *ZAMM*, 5: 136-139.
- (1945), *Trans. Jet Prop. L b. Pub.*, 1952.

- Reshotko, E. (1976), *Ann.Rev.Fl.Mech.*, 8.
- Reyhner & Flugge-Lotz (1968), *Int.J.Nonlinear Mech.*, 3, 2: 175-199.
- Rosenhead, L. (1963), *Laminar Boundary Layer*.
- Rose & Stark (1958), *JAS*, 25: 86-97.
- Roshko, A. (1976), *AIAA*, 14: 10.
- Rotta (1962), *Prog.in Aeron.Sci.*, vol.2.
- Rubesin & Johnson (1949), *Trans.ASME*, 71: 385-388.
- Scala, et al (1959), *ARS J.*, 29, 1: 39-45.
- (1960), *ARS J.*, 30, 4: 329-36.
- Schlichting, H. (1933), *ZAMM*, 13: 260-263.
- (1968), *Boundary Layer Theory*.
- (1974), *AIAA*, 12, 4: 407-440.
- Schubauer & Skramstad (1947), *JAS*, 14: 69-78.
- Shang (1975), *AGARD* cp.168.
- Smith, A.M.O. (1970), *Appl.Mech.Rev.*, 23, 1.
- Smith, A.M.O. & Clutter (1965), *AIAA*, 3, 4: 639-647.
- Smith, F.T. (1977), *PRS*, A356: 443.
- (1979), *JFM*, 92, 1: 171-205.
- Smith, J.H.B. (1975), *AGARD* cp.168.
- Sommer & Short (1955), *NACA TN* 3391.
- Spalding, D.B. (1961), *J.Appl.Mech.*, 28: 455-457.
- Spalding & Chi (1963), *AIAA*, 1, 9: 2160-61.
- (1964), *JFM*, 18, 1: 117-143.
- Stewartson, K. (1949), *PRS*, A200: 84-100.
- (1964), *The Theory of Laminar Boundary Layer in Compressible Fluids*.
- (1974), *Adv.Appl.Mech.*, vol.14.
- Stewartson & Williams (1969), *PRS*, A312: 181-206.
- Stuart, J.T. (1971), *Ann.Rev.Fl.Mech.*, 3.
- Tani, I. (1967), *Phys.Fluids*, 10, 9, Supplement.
- (1969), *Ann.Rev.Fl.Mech.*, 1.
- (1977), *Ann.Rev.Fl.Mech.*, 9.
- Tollmien, W. (1929), *NACA TM* 609.
- Townsend (1956), *The Structure of Turbulent Shear Flow*.
- Van Dyke, M (1964), *JFM*, 18, 3: 477-480.
- (1969), *Ann.Rev.Fl.Mech.*, 1.
- (1975), *Perturbation Method in Fluid Mechanics*.
- Van Driest (1955), *50 Years of Boundary Layer Theory*.
- White, F, M. (1974), *Viscous Fluid Flow*.

非线性有限元*

北京航空学院 龚尧南 王德荣

一、引言

长期以来,从事实际力学工作的工程技术人员,大都习惯于根据线性理论而不是非线性理论去处理他们的大部分设计与分析课题。这一方面固然与他们过去所受的训练和工作上的传统方法有关,另一方面也是由于下面的一些原因:1.常规的结构材料经常在低于设计极限的水平上受力;2.过去习惯采用的金属材料,由于它们的延伸性好,不大的塑性变形不致象今天所采用的较脆的材料那样,对结构造成有害的影响;3.在早期,缺乏对复杂结构进行非线性分析的工具和技巧,所以早期的非线性分析都是在作了大量简化之后才能实现的。为了要套用那些已有的近似解,就必须对具体问题本身进行简化,使之与选用的现成解答的前提相符。一个明显的例子是,过去在作壳体的稳定分析时,只好借助于经验曲线^[1, 2]。

虽然上述种种原因使非线性分析长期未能广泛开展,但发展非线性分析的能力,这种要求无论如何是存在的^[3]。首先感到迫切需要的是航空及宇航部门。由于要求有一个重量尽可能轻的结构,这一工业领域中的设计和制造人员就不能不持续地更新他们的设计概念和工艺概念,不断地研究新的构造型式、工艺技术以及采用新的结构材料。这些技术上的进展又促使在分析时能有一个更加合理的计算模型和更加精确的计算方法,特别是在分析新的和关键性的部件和零件构件的时候。另一个对非线性分析有迫切感的领域是原子能工业,因为在核反应堆的设计及制造过程中,同样遇到了大量的非线性问题。正是在这两大领域中,非线性问题的研究首先取得了重大的进展与成果。随着非线性问题的基本机理愈来愈被人们所理解,非线性解的技巧愈来愈完善,计算机和通用程序的功能愈来愈大以及它们的使用愈来愈普遍,非线性分析也就日益扩展到其它的一些领域,如机械,材料科学,生物医学工程,化工,建筑,地下工程,地震,造船,水利,冶金,石油勘探及电子工业等。

二、非线性有限元概述

即使是线性的结构,由于它的复杂性,一般很难用解析法来完成分析。因此在40年代,线性结构的分析往往是通过两种不同的途径来实现的:或者是对结构本身和加载方式进行大量简化;或者是采用数值方法进行分析;或者是两者兼而有之。

* 1980年4月21日收到。

Williams, J.C. (1977), *Ann.Rev.Fl.Mech.*, 9.

Willmarth, W.W. (1975), *Adv.Appl.Mech.*, vol.15.

Wilson, R.E. (1950), *JAS*, 17, 9: 585-594.

—— (1965), *J.Spacecrafts & Rockets*, 2, 4.