

高应变率下金属动力学性能 的实验与理论研究

——一维粘塑性波的数值方法^{*1)}

中国科学院力学研究所 段祝平 孙琦清

中国科学院数学研究所 王 厘 尔

提要 本文运用加变阶因子的差分格式,给出了考虑侧向惯性效应的一维粘弹塑性波传播问题的一般差分解法。把特殊情形下得到的精确解和差分解比较,截断误差和舍入误差之和不超过2%。从而证明了这种差分格式的可靠性。同时给出了本构方程取某种特殊函数形式时粘弹塑性波问题的数值方法;改变本构函数中的调节参数,可以使数值结果和实验有较好的吻合,从而证明了这种方法在各种材料动力学性能和本构函数的研究中是行之有效的。

一、问题的提出

各种材料在高速冲击下的动力学性能及粘弹塑性波传播规律的理论实验研究,近二十年来,取得了相当大的进展。这里,有两个中心研究课题,一是知道材料的本构关系,求解各种结构的变形和破坏规律;二是通过波动讯号的测量(尤其在一维应变和一维应力下)并利用物理与力学规律,研究在高速变形下材料的本构关系。这两类问题相辅相成,而绝大部分是非线性的,因此离不开数值分析和计算,事实上,只有把实验研究(包括微观分析)、理论分析和数值分析结合起来,才能推动研究工作的进展。

本文着重讨论一维条件下,考虑侧向惯性效应(一级近似下)时,粘弹塑性波传播的数值分析方法,并把它用于弹塑性本构关系的研究。目前,有两类方法研究材料的动力学性能。一是传统的Hopkinson压杆技术^[1,2];另一是在试样端部造成一瞬态脉冲(炸药爆轰、子弹撞击等)通过各种波动讯号的测量,达到建立本构关系的目的,如图1所示,它由子弹—导杆—长试样系统组成。可以假定子弹—导杆—试样的材料相同或不同,设子弹、导杆材料相同,并处于弹性状态,而试样可以是各种弹-粘-塑性物质。在一级近似下,控制子弹和弹性导杆及试件的基本方程是:对弹性子弹与导杆,

* 1980年6月6日收到。

1) 本文数值方法和Fortran程序部分主要由王厘尔给出,并在共同讨论的基础上写成。本文将在1980年底全国计算力学学术会议上宣读。

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} &= \frac{\rho_1}{2} a_1^2 v_1^2 \frac{\partial^3 v_1}{\partial t \partial x^2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} &= 0 \\ \sigma_1 &= E_1 \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

对粘弹塑性试件〔3〕,

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} &= \frac{\rho_2}{2} a_2^2 v_2^* \frac{\partial^3 v_2}{\partial t \partial x^2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} &= A(\sigma_2, \varepsilon_2) \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} + B(\sigma_2, \varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

每方程组中的各个方程,分别表示动量守恒、连续条件和弹性或塑性杆的本构关系,其中, v_i , σ_i 和 ε_i 分别表示弹性杆 ($i=1$) 和粘弹塑性杆 ($i=2$) 的速度, 应力和应变, ρ_i 是密度, E_1 , ν_1 表示弹性杆的杨氏模数和泊桑比, ν_2^* 表示塑性杆的等效泊桑比, 和塑性杆泊桑比 ν_2 的关系是

$$\nu_2^* = \nu_2 \left\{ 1 + \frac{1-2\nu_2}{2\nu_2} \frac{\partial \varepsilon_{x_2}^p / \partial t}{\partial \varepsilon_{x_2} / \partial t} \right\} \quad (1.3)$$

ν_2^* 随应变率变化而变化, $0 \leq \nu_2^* \leq \frac{1}{2}$, 本文近似取为常数, (1.2) 中的函数 $A(\sigma_2, \varepsilon_2)$ 和 $B(\sigma_2, \varepsilon_2)$ 分别表示可变动态弹性模量和粘弹塑性流中的塑性势流函数, 他对塑性变形起控制作用。不同材料取不同的 A 和 B 形式, 表 1 给出了一维应力下金属材料的部分模型。由该表可知, 建立关于方程组 (1.1) 和 (1.2), 包括加卸载波在内的, 在各种载荷下波动问题的数值分析方法, 是十分有用的。

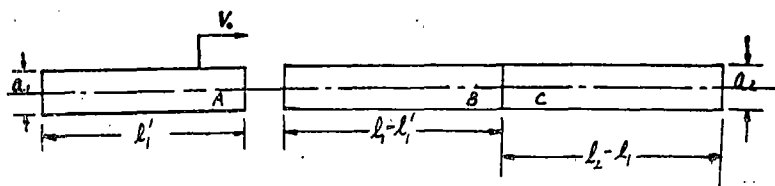


图 1 一维应力冲击装置示意图

A 子弹 B 波导杆 C 试件

在联立求解方程组 (1.1) 和 (1.2) 时, 需建立初始和边界条件。不同的边界载荷, 由于加卸载满足不同的本构方程, 故应力波的传播规律是不同的。本文限于考虑和如图 1 所示情况, 对别的外载条件可以类似加以推广。设子弹和导杆的总长为 $l_1 = L_p + L_g$, 塑性试样的长为 L , 且 $l_2 = L_p + L_g + L$, 则初始和边界条件如下:

$$t=0 \quad v_1 = \begin{cases} v_0 & 0 \leq x < L_p \\ 0 & L_p \leq x < l_1 \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 = v_2 = \varepsilon_2 = 0 \quad (1.5)$$

$$x=0 \quad \sigma_1 = 0 \quad (1.6)$$

$$x=l_1 \quad \sigma_1 \cdot a_1 = \sigma_2 \cdot a_2 \quad v_1 = v_2 \quad (1.7)$$

$$x = l_2 \quad \sigma_2 = 0 \quad (1.8)$$

在问题(1.1)~(1.2)中,对粘塑性介质,一般存在二个特征时间 τ_1 和 τ_2 。 τ_1 表示弹性波通过 a_1 所需时间,反映一维弹性杆中有关高频振荡的周期,和式(1.1)中三阶导数项有关。 τ_2 表示材料的特征松弛时间。在一维应力下,如取一种形式的位错模型,有〔3〕

$$A_2 = \frac{1}{E_2} \quad (1.9)$$

$$B_2(\sigma_2, \varepsilon_2) = K \left[1 + M \left(\varepsilon_2 - \sigma_2 / E_2 \right) \right] \sum_{m,n} A_{m,n} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_s} - 1 \right)^m \left(\varepsilon_2 - \frac{\sigma_2}{E_2} \right)^n \quad (1.10)$$

在一阶近似下,有

$$B_2(\sigma_2, \varepsilon_2) = K \left[1 + M \left(\varepsilon_2 - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) \right] \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_s} - 1 - H \left(\varepsilon_2 - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) \right] \quad (1.11)$$

则按(1.11)有

$$\tau_1 = \frac{a_2}{\sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}}, \quad \tau_2 = \frac{1}{K} \quad (1.12)$$

表1 在不同材料模型中A, B的形式〔8〕

具体形式 模型名称	$A(\sigma_2, \varepsilon_2)$	$B(\sigma_2, \varepsilon_2)$	备注
三元件组合适型	α	$\beta\sigma + \gamma\varepsilon$	包括弹性, 牛顿粘性, 伏格脱模型和Maxwell模型
von Karman塑性体	$1/E_h(\varepsilon)$	0	E_h 为动态硬化模数, 当卸载时, $E_h = E_2$ 。
Malvern体	$1/E_2$	$\frac{1}{A_0} \left[e^{\frac{1}{B_0}(\sigma_2 - f_s(\varepsilon))} - 1 \right]$	$f_s(\varepsilon)$ 为静态曲线, A_0, B_0 为材料常数
Gilmen体	$1/E_2$	$K(1 + M\varepsilon_P) e^{\frac{1}{\sigma} (H\varepsilon_P - D)}$	位错动力学模型 ε_P 为塑性变形
本文建议的粘塑性模型	$1/E_2$	$K(1 + M\varepsilon_P) \sum_{m,n} A_{m,n} (\sigma - \sigma_s)^m \cdot \varepsilon_P^n$	$A_{m,n}$ 为材料常数
Valanis内时模型	$1/E_2$	$\frac{\alpha(\dot{\varepsilon})\sigma}{1 + \beta\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$	ρ 是内部时间的一个尺度, t 是真实时间
Cristescu和Clifton模	$1/E_2 + \varphi(\sigma, \varepsilon)$	$\psi(\sigma, \varepsilon)$	复弹性模量为 $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ $\psi(\sigma, \varepsilon)$ 为塑性函数
Kawata(河田幸三)模	$1/E_2$	$c_1 \sigma_2 \exp \left\{ -\frac{V_0}{KT} \left(1 - \frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_0(1 + H\varepsilon_P)} \right) \right\}$	1980年1月在力学所报告

因此, 我们可将上述方程无量纲化, 并取

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t/\tau_1, \quad \bar{x} = x/a_2, \quad \bar{\rho}_1 = \rho_1/\rho_2, \quad \bar{a}_1 = a_1/a_2 \\ \bar{v}_1 &= v_1/v_s, \quad \bar{\sigma}_1 = \sigma_1/\sigma_s, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1/\varepsilon_s = C_0 \varepsilon_1/v_s \end{aligned} \quad (1.13)$$

代入(1.1)和(1.2), 可以得无量纲化的方程组(为简单起见, 将字母上方的记号“—”省略)

$$\left. \begin{aligned} \rho_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_i}{\partial x} &= \beta_i \frac{\partial^3 v_i}{\partial t \partial x^2} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} &= A_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + B_i \end{aligned} \right\} \quad i=1,2 \quad (1.14)$$

其中 $\rho_2=1$, $\beta_1 = \frac{1}{2} \overline{\rho_1 a_1^2 v_1^2}$, $\beta_2 = (v_2^*)^2 / 2$, $A_1 = \frac{E_2}{E_1}$, $B_1=0$,

$A_2=1$, $\overline{B_2} = \overline{B_2} (\overline{\sigma_2}, \overline{\varepsilon_2}) = \frac{\tau_1 B_2}{\varepsilon_i}$, $i=1$ 表示弹性, $i=2$ 表示塑性。

(1.14)是具有三阶色散项的一组非线性方程, 解的性质比较复杂, 既有色散效应, 又有耗散效应, 而且这两种效应互相耦合(见[3]), 当 $\beta_i \neq 0$ 时, 采用传统的特征线方法存在一定困难。本文根据[4]中的建议, 采用加变阶因子对偏心的一阶差分格式进行修正的方法求解(1.14), 虽然方程组中存在高阶色散项, 但计算精度仍是相当满意的。

二、数值解法的讨论

为了给出(1.14), 的数值解法, 先对模型方程的各种差分格式作一简要说明(详细的可参看[7])。

2.1 模型方程的差分格式

首先, 我们以方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (a > 0, \text{常数}) \quad (2.1)$$

为例, 说明差分格式的构造。取时间步长 τ 和空间步长为 h , 且 τ, h 的网格覆盖 $x-t$ 平面, n, k 为正整数。在图2中, 以‘o’表示节点, 以 $w_k^n = w(n\tau, kh)$ 表示函数 w 在节点 $(n\tau, kh)$ 的值。可以构造下面几种差分格式:

三条腿格式 将(2.1)变成相应的差分方程

$$\frac{w_k^{n+1} - w_k^n}{\tau} + a \frac{w_{k+1}^n - w_{k-1}^n}{2h} = 0 \quad (2.2)$$

这种格式是绝对不稳定的。

跳蛙(Leap-Frog)格式 这时(2.1)变为

$$\frac{w_k^{n+1} - w_k^{n-1}}{2\tau} + a \frac{w_{k+1}^n - w_{k-1}^n}{2h} = 0 \quad (2.3)$$

这种格式的稳定性条件是 $a\tau \leq h$ 。将 w 在点 $(n\tau, kh)$ 上台劳展开, 可以知道这一格式在解的光滑区域精度为 $O(h^2, \tau^2)$ 。计算具有间断的解时, 算出的波形有多余的振荡现象。

偏心一阶格式 这时有

$$\frac{w_k^{n+1} - w_k^n}{\tau} + a \frac{w_k^n - w_{k-1}^n}{h} = 0 \quad (2.4)$$

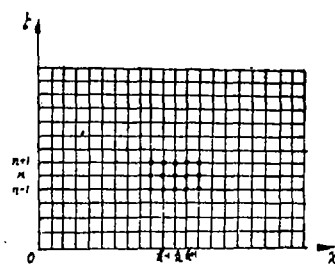


图2 计算中的差分网格

这种格式的精度是 $O(h, \tau)$ 。算出的波形虽在间断区域没有多余的振荡,但间断区域被拉平得较大。为克服这缺点,仿照[4],采用下列格式。

改进的一阶格式 将(2.4)改写为

$$\frac{w_{k+1}^{n+1} - w_k^n}{\tau} + a \frac{w_{k+1}^n - w_{k-1}^n}{2h} = \frac{a}{2h} \{ w_{k+1}^n - 2w_k^n + w_{k-1}^n \} \quad (2.5)$$

为了提高格式的精度,缩小间断被拉平的区域,参照[4]对上述格式的右端乘上一个变阶因子 s ,得

$$\frac{w_{k+1}^{n+1} - w_k^n}{\tau} + a \frac{w_{k+1}^n - w_{k-1}^n}{2h} = \frac{a}{2h} (w_{k+1}^n - 2w_k^n + w_{k-1}^n) \cdot s \quad (2.6)$$

其中

$$s = \left[\frac{|w_{k+1}^n - 2w_k^n + w_{k-1}^n|}{|w_{k+1}^n - w_k^n| + |w_k^n - w_{k-1}^n|} \right]^m \quad m \geq 0 \quad (2.7)$$

由[4]中的分析与试算表明,此格式能保持间断解的单调性,间断过渡域也缩小很多。这一方法应用于方程组(1.14)的差分格式的构造中去。

2.2 方程组(1.14)的差分格式

先考虑方程组

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + E \frac{\partial v}{\partial x} = g \quad (2.8)$$

假定 f, g 为 σ, v 的函数, $E > 0$ 为常数。作函数变换

$$\xi = \sqrt{E}v + \sigma, \quad \eta = \sqrt{E}v - \sigma$$

方程组(2.8)可化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \sqrt{E} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \sqrt{E}f + g \equiv F \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \sqrt{E} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \sqrt{E}f - g \equiv G \end{aligned} \right\} \quad (2.8)'$$

对方程组(2.8)'作偏心一阶格式(由于稳定性上的要求,可参看[7]。对(2.8)'第1式用左偏心一阶格式,对(2.8)'第2式右偏心一阶格式),得相应的差分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi_{k+1}^{n+1} - \xi_k^n}{\tau} + \sqrt{E} \frac{\xi_k^n - \xi_{k-1}^n}{h} &= F_k^n \\ \frac{\eta_{k+1}^{n+1} - \eta_k^n}{\tau} - \sqrt{E} \frac{\eta_{k+1}^n - \eta_k^n}{h} &= G_k^n \end{aligned} \right\} \quad (2.8)''$$

将(2.8)''的第1式与第2式相加,(2.8)''的第1式与第2式相减,得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi_{k+1}^{n+1} - \xi_k^n + \eta_{k+1}^{n+1} - \eta_k^n}{\tau} + \sqrt{E} \frac{\xi_k^n - \xi_{k-1}^n - \eta_{k+1}^n + \eta_k^n}{h} &= F_k^n + G_k^n \\ \frac{\xi_{k+1}^{n+1} - \xi_k^n - \eta_{k+1}^{n+1} + \eta_k^n}{\tau} + \sqrt{E} \frac{\xi_k^n - \xi_{k-1}^n + \eta_{k+1}^n - \eta_k^n}{h} &= F_k^n - G_k^n \end{aligned} \right\} \quad (2.8)'''$$

由于 $\xi_k^n = \sqrt{E}v_k^n + \sigma_k^n, \eta_k^n = \sqrt{E}v_k^n - \sigma_k^n$,得相应于(2.8)'''中 v, σ 的差分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_k^n}{\tau} + \frac{\sigma_{k+1}^n - \sigma_{k-1}^n}{2h} - \frac{\sqrt{E}}{2h} (v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) &= f_k^n \\ \frac{\sigma_{k+1}^{n+1} - \sigma_k^n}{\tau} + E \frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2h} - \frac{\sqrt{E}}{2h} (\sigma_{k+1}^n - 2\sigma_k^n + \sigma_{k-1}^n) &= g_k^n \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

为了使算出的波形在光滑区域有二阶精度，而且在间断区域拉平得小一些，我们对(2.9)的二阶差商项分别乘上变阶因子与 s 和 r ，则得

$$\frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\tau} + \frac{\sigma_{k+1}^n - \sigma_k^n}{2h} - \frac{\sqrt{E}}{2h} \cdot (v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) \cdot s = f_k^n$$

$$\frac{\sigma_{k+1}^n - \sigma_k^n}{\tau} + E \frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2h} - \frac{\sqrt{E}}{2h} (\sigma_{k+1}^n - 2\sigma_k^n + \sigma_{k-1}^n) \cdot r = g_k^n$$

$$\text{其中 } s = \left(\frac{|v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n|}{|v_{k+1}^n - v_k^n| + |v_k^n - v_{k-1}^n|} \right)^m, r = \left(\frac{|\sigma_{k+1}^n - 2\sigma_k^n + \sigma_{k-1}^n|}{|\sigma_{k+1}^n - \sigma_k^n| + |\sigma_k^n - \sigma_{k-1}^n|} \right)^m$$

显然 $s, r \leq 1$ ；若 $m=0$ ，则 $r, s=1$ ；于是我们得到一阶格式；当 $m \rightarrow \infty$ 时，则 $s, r \rightarrow 0$ ，即为中心差格式。若取 $m \geq 1$ ，则这一格式在光滑区域的精度为 $O(h^2, \tau^2)$ ，间断附近不会产生多余的振荡。间断区域波形的拉平比一阶格式小得多。经过试算，取 $m=3$ 可获得最佳效果。

现在，考虑(1.14)的差分格式。将(1.14)改写为

$$\rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \beta_1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial t \partial x^2} \quad (2.11)$$

$$E_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = 0 \quad 0 \leq x < l_1 \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = \beta_2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial t \partial x^2} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \quad l_1 \leq x \leq l_2 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} + \frac{1}{A_2(\sigma_2, \varepsilon_2)} \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{B_2(\sigma_2, \varepsilon_2)}{A_2(\sigma_2, \varepsilon_2)} \quad (2.16)$$

令 n, k 为正整数，用空间步长为 h ，时间步长为 τ 的网格($t=n\tau, x=kh$)覆盖 $x-t$ 平面，且设

$$l_1 = (M - \frac{1}{2})h, l_2 = (N + 1)h, N > M > 0$$

节点 $(n\tau, kh)$ 和 $((n + \frac{1}{2})\tau, (k + \frac{1}{2})h)$ 分别用

‘0’和‘×’表示，如图3所示。这样方程对应于(2.11)–(2.16)的差分方程可以用一个统一的形式表述。设

$$v_k^n = v(n\tau, kh), \quad \sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = (\sigma(n + \frac{1}{2})\tau, (k + \frac{1}{2})h)$$

当 $k=0, 1, \dots, M-1$ 时表示函数 $v_1, \sigma_1, \varepsilon_1$ 在这些网格上的值，当 $R=M, M+1, \dots, N$ 时表示函数 $v_2, \sigma_2, \varepsilon_2$ 在这些网格上的值。则动量守恒方程(2.11)和(2.14)的差分格式为

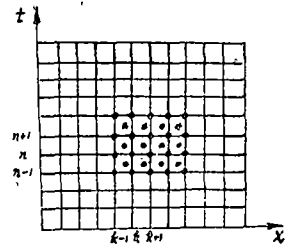


图 3

$$\rho \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_k^{n+1}}{\tau} + \frac{\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = \frac{\beta}{\tau h^2} \left[(v_{k+1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}) - (v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) \right] + \frac{\sqrt{E}}{2h} (v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) s \quad (2.17)$$

其中
$$E = \begin{cases} E_1, & k \leq M-1 \\ 1, & k \geq M \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} \beta_1, & k \leq M-1 \\ \beta_2, & k \geq M \end{cases}, \quad \rho = \begin{cases} \rho_1, & k \leq M-1 \\ 1, & k \geq M \end{cases}$$

把(2.12)写成

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (2.12)'$$

对应于质量守恒方程(2.12)'和(2.15)的差分方程:

$$\frac{e_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} - e_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_k^{n+1}}{h} = \frac{\sqrt{E}}{2h} \left(\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) r \quad (2.18)$$

对于应力-应变关系(2.13)和(2.16)差分方程:

$$\frac{\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} - \sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + E \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_k^{n+1}}{h} = \frac{\sqrt{E}}{2h} \left(\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) r \quad (2.19)$$

对塑性杆 ($M \leq k \leq N$) 当 $\sigma_k > 1$ 时, $B_2(\sigma, \varepsilon) \neq 0$, $A_2 = 1$ 。由于 B_2 为 σ, ε 的非线性函数, 故对 σ_k 的计算, 需要进行一次迭代, 格式如下:

$$\frac{\tilde{\sigma}_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} - \sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_k^{n+1}}{h} + B_2 \left(\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \frac{e_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} + e_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right) = 0 \quad (2.20)$$

迭代后, 得:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} - \sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_k^{n+1}}{h} + B_2 \left(\frac{\tilde{\sigma}_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} + \sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2}, \frac{e_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} + e_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \\ & = \frac{1}{2h} \left(\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) r \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\text{其中 } s = \left(\frac{|v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n|}{|v_{k+1}^n - v_k^n| + |v_k^n - v_{k-1}^n| + \delta} \right)^3 \quad (2.22)$$

$$r = \left(\frac{|\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}|}{|\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}| + |\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}| + \delta} \right)^3 \quad (2.23)$$

(δ 是很小的正数, 不妨取 $\delta = 10^{-15}$)

2.3 差分方程的解法

为了求解差分方程组(2.17)~(2.21), 需要运用初始和边界条件。本文暂时不考虑由于撞击引起的弹塑性波在端面 $x=0$ 或 $x=l_2$ 的反射, 这样自由面的边界条件为:

$$x=0, \quad \sigma_1=0; \quad x=l_2, \quad \sigma_2=0$$

$$f_k = \left(\sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \tau/h - G_2 (v_{k+1}^n + v_{k-1}^n) + (2G_2 + 1) v_k^n$$

$$+ \frac{\sqrt{E}}{2h} (v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) s, \quad k = M, M+1, \dots, N-1$$

$$f_N = \left(\sigma_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \tau/h - G_2 v_{N-1}^n + (2G_2 + 1) v_N^n$$

其中 $G_1 = \frac{\beta_1}{h^2}$, $G_2 = \frac{\beta_2}{h^2}$ 。

在计算中, 从(2.26)中解出 v_k^{n+1} ($k=1, 2, \dots, N$), 即由 $t=n\tau$ 时刻的速度求出下一时刻的速度, 然后将其代入(2.18), 可以解出 $\varepsilon_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{2}}$ ($k=1, 2, \dots, N$)。这样用解出的 v_k^{n+1} , $\varepsilon_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{2}}$ 代入差分方程(2.19)~(2.21), 解出 $\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{2}}$ 。这样, 从 $n=0$ ($t=\tau$) 时刻开始, 直到 $n = \left\lfloor \frac{Nh}{2} \right\rfloor$, 依次循环。注意每循环一次都要用三对角线追赶一次, 这样可算出不同时刻、不同位置 v , σ , ε 的值, 从而算出加载波的波形。

三、数值结果与精确解比较

为了验算上节给出的“加变阶因子差分格式”的精度, 这里把数值结果与在特殊情况下得到的正确解进行比较。首先, 计算两相同弹性杆的对撞, 这时, 不计自由边界的影响, 速度 $v(x, t)$ 显然满足

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ v \Big|_{t=0} &= \begin{cases} v_0 & -\infty < x \leq l_1 \\ 0 & l_1 \leq x < +\infty \end{cases} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

(3.1) 的达朗倍尔解

$$v(x, t) = \begin{cases} v_0 & x+t < l_1 \\ \frac{v_0}{2} & x+t \geq l_1, \quad x-t < l_1 \\ 0 & x-t \geq l_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

取 $v_0 = 4$, 计算了不同时刻 $t=0, 2, 4, 6$ 时速度场的分布。图(4)给出了精确解与差分解的比较, 其中虚线表示达朗倍尔精确解, 实线表示差分解。计算结果表明, 这种差分格式给出的数值解不会出现多余的振荡, 差分解与精确解吻合, 误差不超过 2%。波头的直径为 14.5mm 时, 波头有量纲的上升时间不超过 $3\mu s$ 。这个精度对计算波长 $\lambda \gg D$ (杆的直径) 的弹塑性波而言, 已是足够了。

其次, 讨论弹性杆直接撞击塑性杆的情况, 我们取最简单的 Malvern 型本构关系, 这时方程 (2.16) 化成

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = -(\sigma_2 - 1) \quad (3.3)$$

初始条件

$$\left. \begin{aligned} v_1|_{t=0} = v_0 (> 2) - \infty > x > l_1 \\ v_2|_{t=0} = 0 \quad l_1 < x < +\infty \end{aligned} \right\} (3.4)$$

在不计侧向惯性效应时, 文献[3]得到了上述问题的精确解

$$\sigma_2(x, t) = 1 + \left(\frac{v_0}{2} - 1\right) e^{-t/2} \left\{ \sqrt{\frac{t-x}{t+x}} I_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - x^2}\right) + I_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - x^2}\right) \right\} \quad (3.5)$$

其中 $I_0(\bar{z})$ 和 $I_1(\bar{z})$ 分别表示虚变量 0 阶与 1 阶贝塞尔函数。

当取 $v_0 = 4$ 时, 表 2 给出了不同时刻 $t = 5, 10, 15$ 和 20 , 及不同位置 $x = 0, 2, 4$ 和 6 的十六对数据的比较。计算中, 取空间步长和时间步长 $h = 0.2, \tau = 0.1$ 。

计算结果表明, 差分解与精确解相比, 截断误差与舍入误差之和不超过 2%。这就充分证明, 这种差分格式在计算粘塑性介质中的波动时, 有较好的精度。

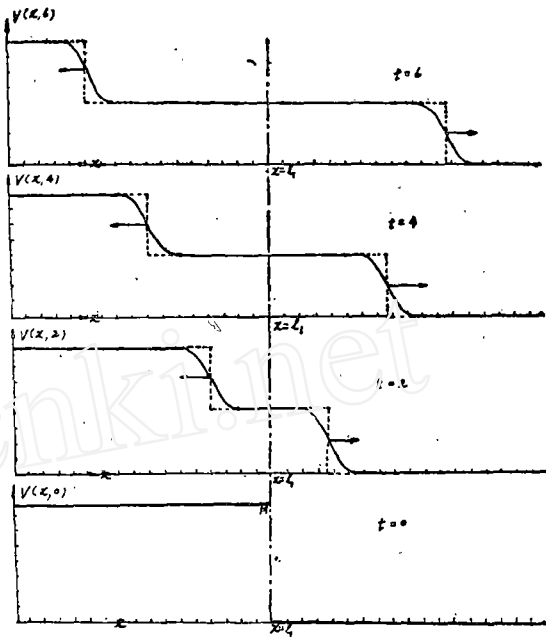


图 4 达朗倍尔解与数值解的比较

表 2 差分解与精确解 (3.5) 的比数

时刻 应力比较	t = 5		t = 10		t = 15		t = 20		误差 (平均)
	精确解	差分解	精确解	差分解	精确解	差分解	精确解	差分解	
$\sigma_2 _{x=0}$	1.4766	1.4707	1.3474	1.3455	1.2490	1.2836	1.2233	1.2461	1.4%
$\sigma_2 _{x=2}$	1.3426	1.3263	1.2897	1.2833	1.2526	1.2501	1.2264	1.2246	0.56%
$\sigma_2 _{x=4}$	1.1620	1.1472	1.1998	1.1910	1.1965	1.1915	1.1871	1.1838	0.80%
$\sigma_2 _{x=6}$	0.0000	0.0271	1.1090	1.1011	1.1331	1.1331	1.1399	1.1358	0.46%

四、数值方法在材料动力学性能中的应用

事实上,前面给出的差分方法,可以用于计算由表1列出的有关各种不同形式本构方程的材料的粘弹性或粘弹塑性波的传播问题,尤其是可以用到金属材料动力学性能研究中去。在利用一维应力波的方法研究材料动力学性能时,存在两个重要的问题,迄今为止,没有得到很好的解决。一是由于横向振动效应的存在,对应力的提高究竟起什么作用?即一维应力假定对实验数据处理会产生多大误差。二是当材料的本构函数取某种确定的形式后,如表1中所给出的,如何通过计算去拟合实验曲线,以准确地定出本构方程中的待定参数。我们这里给出一种具体的本构形式来说明数值方法对解决这两个问题的应用。按文献[3],如取(1.11)的本构函数,则具体计算的问题是方程组(2.11)~(2.16),其中

$$E_1 = 0.93; \quad \beta_1 = 0.042, \quad 0 \leq \beta_2 \leq 0.125 \quad (4.1)$$

$$A_2 \equiv 1, \quad B_2(\sigma_2, \varepsilon_2) = R_1 \left[1 + M(\varepsilon_2 - \sigma_2) \right] \left(\sigma_2 - 1 - H(\varepsilon_2 - \sigma_2) \right) \quad (4.2)$$

初、边值条件由(2.24)~(2.25)给出。 v_p 表示子弹的初始冲击速度。本构函数(4.2)中, R_1 表示二个特征时间之比, M 为位错增殖系数, H 为位错运动的线性阻尼系数,当 $R_1 = 0$ 时,表示弹性杆的相互冲击;当 $R_1 = 1, M = H = 0$ 时,即化为第三节给出的特殊所形。 β_2 表征塑性杆的色散效应的大小,其变化范围在 $0 \leq \beta_2 \leq 0.125$ 之间,塑性波的幅值变化速率以及松弛到平衡态上去的时间,由调节参数 R_1, M, H 来控制。图5中给出了子弹直接打击塑性杆时取 $R_1 = 0.350, H = M = 0, v_p = 3.51$ 时, $x = l_1$ 处的应变波形随 β_2 变化的情形。计算表明,当 t 足够大时,不管 β_2 取何值,都一致趋于 $\beta_2 = 0$ 时的渐近解,但在波头上,不同的 β_2 ,解的变化异常明显, $\beta_2 = 0$ 与 $\beta_2 = 0.125$ 的解相差20%左右。早期,J.F. Bell [5, 6]利用相同的材料直接撞击的方法研究完全退火铝的动应力-应变曲线。他忽略了侧向运动的效应,直接利用一维应力的假定,显然,这样计算和处理实验结果的方法会对动态应力-应变曲线的确定带来很大的误差。我们按文献[3]计算了如图1所示冲击系统,引进一段波导杆后,侧向惯性的影响大大减小了。图6~8给出了调节参数 R_1, M, H 取不同数

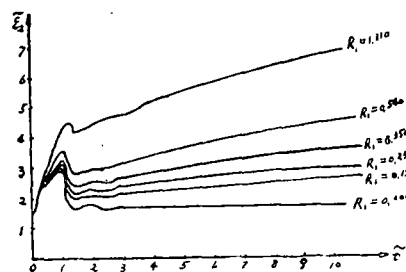
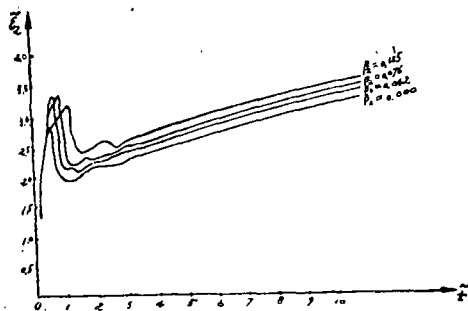


图5 $x = 0$ 处应变波形随 β_2 的变化情形 ($R_1 = 0.350, v_p = 3.51, M = H = 0$)
图6 $x = 0$ 处应变波形随 R_1 的变化情形 ($\beta_2 = 0.125, v_p = 3.51, M = H = 0$)

值的部分计算结果。附录给出了上述问题的计算程序,其中调节参数 M, H 分别用 R_1, R_2 表示。图6给出了当 $\beta_2 = 0.125, M = H = 0, v_p = 3.51$ 时 $x = 0$ 处应变波形随 R_1 而变化的结果。从计算中可知, R_1 是调节波形幅度的主要控制参数。图7和8给出不同调节参数对波

形的影响。当 R_2 增大时,位错的阻尼增加,应变很快松弛到平衡态曲线($\dot{\epsilon}=0$)中去。这样提供了依据实验来确定各调节参数 R_1, M, H 的方法。按文献[3],把18Ni马氏体时效钢(作为子弹与导杆)冲击25CrMnSi合金钢的实验数据和计算曲线相拟合的办法,得出了各调节参数的大小,如图8所示。这样,本文提供了一种把实验和数值计算互相拟合以确定各种材料本构函数的一种切实有效的方法。它对研究材料在高应变率下的弹-塑性动力学性能是十分有用的,具体可参阅[8]。

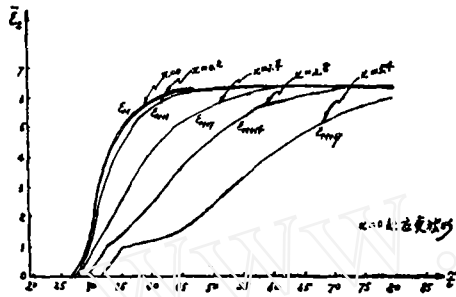


图7 不同参数对波的影响(K 即 R_1)
($\beta_2 = 0.125, K = 3.00, H = 0.05,$
 $M = 0.05, \nu_p = 3.51$)

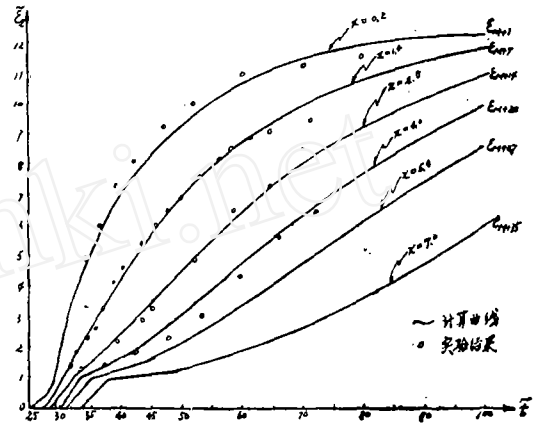


图8 计算曲线与实验结果的拟合情况(K 即 R_1)
($\beta_2 = 0.125, K = 2.5, H = 0.013,$
 $M = 0.05, \nu_p = 3.51$)

附录 关于计算下列问题的 Fortran 程序¹⁾

子弹和弹性导杆

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \beta_1 \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0 \\ \sigma = E_1 \epsilon \end{cases} \quad 0 \leq x < l_1$$

设子弹长为 l_1' ,导杆长为 $l_1 - l_1'$ 。

塑性杆为

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \beta_2 \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + R_1 [1 + R_4(\epsilon - \sigma)] [\sigma - 1 - R_2(\epsilon - \sigma)] \end{cases} \quad l_1 \leq x \leq l_2$$

1) 对详细计算程序编码感兴趣的同志,可到作者工作单位参阅。

初、边值条件

$$t=0, v = \begin{cases} v_p & 0 \leq x < l_1' \\ 0 & l_1' \leq x \leq l_1 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \sigma &= \varepsilon = 0 & 0 \leq x < l_1 \\ \sigma &= \varepsilon = v = 0 & l_1 \leq x \leq l_2 \end{aligned}$$
$$t > 0$$
$$\begin{aligned} x=0 \text{ 时 } \sigma &= 0 \\ x=l_2 \text{ 时 } \sigma &= 0 \end{aligned}$$

在程序中

v_k^{n+1} , v_k^n 分别用 $VE(k)$, $V\phi(k)$ 表示,

$\sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}}$, $\sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 分别用 $WE(k)$, $W\phi(k)$ 表示,

$\varepsilon_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}}$, $\varepsilon_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 分别用 $UE(k)$, $U\phi(k)$ 表示.

时间步长用 T 表示, 空间步长用 H 表示。

E_1 用 R_3 表示, R_1, R_4, R_2 是调节参数 k, M, H 。

v_p 是初始速度。 β_1, β_2 分别用 BA1, BA2 表示。算了具体例子, 取

$R_1 = 3.00, R_2 = 0.05, R_4 = 0.05, R_3 = 0.93, v_p = 3.51, BA1 = 0.042, BA2 = 0.125$
在罗马尼亚 C512 机上计算。

参 考 文 献

- [1] Kolsky, H. (1949), *Proc. Phys. Soc.*, B62: 676—700
- [2] Hardiny, John (1974), *Proc. Conf. on Mechanical Properties of Mat. at High Rates of Strain*, held in Oxford, 2—4 April 1974.
- [3] 段祝平、孙琦清、王厘尔 (1979), 金属的粘塑性性质与一维波理论, 中国科学院力学研究所研究报告 (待发表)。
- [4] 邬华谟、杨明亮, 计算粘性流场的一种差分格式 (全国计算数学会论文报告, 1979)。
- [5] Bell, J.F. (1960), Propagation of large amplitude wave in annealed aluminum, *J. Appl. Phys.*, 31, 2.
- [6] Bell, J.F. (1960), Study of initial condition in constant velocity impact, *J. Appl. Phys.*, 31, 12.
- [7] 冯康 (1978), 数值计算方法, 国防工业出版社。
- [8] 段祝平等 (1980), 高应变率下金属动力学性能的实验与理论研究——一维杆的实验方法及其应用, *力学进展*, 10, 1.