学术讨论

关于低温等离子体放电中的最小损失原则*

中国科学院力学研究所　薛明伦　陈允明

在低温等离子体放电过程的分析中经常利用一个最小损失原则，即 Steenbeck 原则[1,2]．它的表达形式有：1. 在给定总电流下，电流在等离子体内的分布总是使端电压降最小；2. 在给定总电流下，电流的分布总是使焦耳热最小．Steenbeck 原则原先只用在等离子体没有宏观运动速度的定常放电情况，最近也有应用到等离子体有很大宏观运动速度情况的[3]．对于前者，上述两种提法是一回事，而对于后者就不同了．电磁流体力学的基本理论告诉我们，导电介质中介质的运动和电流以及磁场的分布和热物理参数的分布等，都由导电介质的整套电磁流体力学方程组在一定的边界条件下确定，不需要任何"新"的原则来作补充．这使我们有个想法：如果 Steenbeck 原则是正确的，它应当是电磁流体力学方程组中某些方程的另一表达形式或其推论．下面来讨论这一点．

先看等离子体不运动时的定常放电情况．这时由电荷守恒及欧姆定律有

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = \mathrm{div}(\sigma\mathbf{E}) = 0 \tag{1}$$

又由 $\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$ 可引入 $\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi$，故最后得到

$$\mathrm{div}(\sigma\,\mathrm{grad}\,\varphi) = 0 \tag{2}$$

方程(2)就是麦克斯韦方程组在等离子体没有宏观运动的定常放电时的推论．

我们从另一角度来推导方程(2)．设在给定总电流下，电流分布总是使端电压最小．(Steenbeck 原则)．即 $I = \mathrm{const}$ 下 $\delta\Delta\varphi = 0$，由此可得

$$\delta(I\Delta\varphi) = 0 \tag{3}$$

而在等离子体不运动时，由能量守恒，外电路输入能量 $I\Delta\varphi$ 转化为等离子体体积内的焦耳热 j^2/σ，后者再经过热传导、辐射等耗散于周围介质，故 $I\Delta\varphi = \iiint(j^2/\sigma)dv$．所以由式(3)可得

$$\delta\iiint\frac{j^2}{\sigma}\,dv = \delta\iiint\sigma E^2dv$$
$$= \delta\iiint\sigma\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]dv = 0 \tag{4}$$

如果 σ 是坐标的已知函数，则上式的欧拉方程[4]就是方程(2)．我们看到 I 取定值时 $\Delta\varphi$ 取极值的必要条件就是由麦克斯韦方程组推得的方程(2)．因而 Steenbeck 原则推出的也

* 1977 年 4 月 20 日收到．

可由麦克斯韦方程组推出，这说明并不是从理论上说可以有无穷多个解，但只有符合 Steenbeck 原则的解才是实际上得到的放电；而应该说：满足麦克斯韦方程组的解就是唯一的解，而且满足了麦克斯韦方程组也就满足了 $\iiint(j^2/\sigma)dv$ 取极值.

由极值条件(4)推得方程(2)时，是在给定 σ 的分布下得到的. 如果 σ 的分布本身又是电流分布的函数，则得不到方程(2)，也就是说与麦克斯韦方程组不相容. 如果这时还这样提变分原理(Steenbeck 当年解问题时就是这样用的)，那就会得出不正确的结果[6].

当等离子体有宏观运动速度时，定常放电的电磁流体力学方程组是

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0,\ \mathrm{rot}\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}\\&\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}),\ \sigma=\sigma(T)\\&\mathrm{div}(\rho\mathbf{V})=0,\ \rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=-\mathrm{grad}p+\mathbf{j}\times\mathbf{B}\\&\mathrm{div}(\lambda\ \mathrm{grad}\ T)=-j^2/\sigma,\ \ p=p(\rho,T),\ \lambda=\lambda(T)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

上述方程组在直角坐标下有十七个方程，在一定的边界条件下可唯一地解出十七个未知函数($\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{j}$, p, ρ, T, σ, λ).

仿照前面作法，把方程组(5)改写为 $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\ \varphi$，$\mathrm{div}\mathbf{j}=0$，$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})$，合并之可得

$$\mathrm{div}\{\sigma[(-\mathrm{grad}\ \varphi)+\mathbf{V}\times\mathbf{B}]\}=0$$

$$\mathrm{div}(\sigma\ \mathrm{grad}\ \varphi)-\mathrm{div}(\sigma\mathbf{V}\times\mathbf{B})=0\tag{6}$$

方程(6)就是等离子体有宏观运动时麦克斯韦方程组的一个推论.

我们从另一角度来推导方程(6). 设给定总电流下焦耳热最小，这相当于 $\iiint(j^2/\sigma)dv$ = 最小，改写为

$$\begin{aligned}\iiint(j^2/\sigma)dv&=\iiint\sigma[E^2+2\mathbf{E}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{B})+(\mathbf{V}\times\mathbf{B})^2]dv\\&=\iiint\sigma\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-2\mathrm{grad}\varphi\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{B})\right.\\&\qquad\left.+(\mathbf{V}\times\mathbf{B})^2\right]dv=\text{最小}\end{aligned}$$

如果 σ, $\mathbf{V}$, $\mathbf{B}$ 与 φ 无关，则上述泛函的极值条件(欧拉方程)是

$$\mathrm{div}(\sigma\ \mathrm{grad}\ \varphi)-\mathrm{div}(\sigma\mathbf{V}\times\mathbf{B})=0$$

可以看到，上式即由麦克斯韦方程组推得的式(6). 如果这时不是由焦耳热最小出发，而是由端电压降最小(即 I 不变时 $\Delta\varphi$ = 最小)出发，则由能量守恒，外电路输入的能量 $I\Delta\varphi$ 应转化为焦耳热 j^2/σ 及宏观运动时外力所作的功 $\mathbf{V}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{B})$:

$$\begin{aligned}I\Delta\varphi&=\iiint[(j^2/\sigma)+\mathbf{V}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{B})]dv\\&=\iiint[(j^2/\sigma)-\mathbf{j}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{B})]dv\\&=\iiint\mathbf{j}\cdot[(\mathbf{j}/\sigma)-\mathbf{V}\times\mathbf{B}]dv=\iiint\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}\,dv\\&=\iiint\sigma\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-\mathrm{grad}\ \varphi\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{B})\right\}dv=\text{最小}\end{aligned}\tag{7}$$

显然，一般情形下式(7)的极值条件并不是式(6)，因而在等离子体有宏观运动速度时，定常放电并不对应于端电压降最小，而是对应于焦耳热最小.

最近文献[5,6]对 Steenbeck 原则提出异议，认为这原则是错误的，与基本方程相矛盾．这看法也是不全面的．从上面分析可以看出，当我们说 Steenbeck 原则是多余时，是指它不应该与电磁流体力学方程组(5)并列．但是它可以在一定条件下代替方程组的一部分．当我们说它是错误的时，是指不正确地应用该变分式．原先 Steenbeck 就是这样误用的，他在解放电问题时应用了欧姆定律及平均的能量方程． 在他的简化模型（σ 等于某一确定的常数 σ_0）下麦克斯韦方程组简化为 $E=$ 常数，这时完整的方程组就只剩下上述两个方程，而且这两个方程也就够了．三个未知函数 E, I, r_p（等离子体半径）由两个方程联系，已可得出放电的伏安特性曲线，由[5]可知，这已能得出不错的结果，但他不去改善近似程度（如设放电区内 T 可变，或取 σ 为放电区内 $\sigma(T)$ 的平均值等）而却让 σ_0 待定，单纯去增加方程个数，引入 $(dE/dr_p)_I=0$，反而得出一些错误的结果[6]．又如在[7]中多余地引用了 Steenbeck 原则，竟然得出高频感应放电中"当趋肤深度与等离子体半径之比小于 0.3 时弧不能维持"这样的与实验事实相矛盾的结果．

总之，电磁流体力学方程组已能唯一地确定放电各参数，而 Steenbeck 原则并不是新的规律，而且在数学上应用这变分式时应加小心．

参 考 文 献

[1] Gross, B., et al., Plasma Technology.

[2] Дресвин, С. В., Физика и Техника Низкотемпературной Плазмы, Москва, Атомиздат (1972).

[3] Love, W. L., *AIAA J.*, 8, 8 (1970), 1377.

[4] 艾利兹哥尔兹，变分法，商务印书馆(1956).

[5] Whitman, A. M., Cohen, I. M., *J. of Applied Physics*, **44**, 4 (1973), 1552.

[6] Cohen, I. M., Whitman, A. M., *J. of Applied Physics*, **44**, 4 (1973), 1557.

[7] Freeman, M. P., Chase, J. D., *J. of Applied Physics*, **39**, 1 (1968), 180.

ON THE STEENBECK PRINCIPLE FOR ARC DISCHARGES

Xue Ming-lun   Chen Yun-ming

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)