

表1 汇流旋涡生成的临界数据(测量值)

序号	V [厘米 <sup>3</sup> ]	H [厘米]	T [°C]	$\nu$ [厘米 <sup>2</sup> /秒] × 10 <sup>-3</sup>	t [秒]	d [厘米]	Re <sub>c</sub>	日期
1	3.5	1.0	9.0	13.4	10	0.14	26.1	1974.12.25
2	4.0	1.0	9.0	13.4	10	0.30	29.8	↓
3	4.5	1.0	10.0	13.1	10	0.50	34.5	1975. 1. 6
4	2.5	1.0	24.0	9.2	10	0.14	27.2	1976. 6.14
5	5.0	1.0	25.0	9.0	20	0.14	27.8	1976. 6.14
6	2.5	0.5	24.0	9.2	20	0.14	27.2	1976. 6.15
7	4.5	1.0	26.0	8.8	20	0.14	25.6	1976. 6.15
8	2.0	0.5	26.0	8.8	20	0.14	25.0	1976. 6.15
9	7.0	1.5	23.0	9.6	20	0.14	24.4	1976. 6.19
10	6.0	1.5	23.5	9.4	20	0.14	21.4	1976. 6.19
11	2.0	0.5	23.5	9.4	20	0.14	26.0	1976. 6.19
12	7.0	1.5	25.0	9.0	20	0.14	26.0	1976. 6.21
13	6.0	1.5	27.0	8.6	20	0.14	23.2	1976. 6.21
14	4.0	1.0	27.0	8.6	20	0.14	23.2	1976. 6.21
15	5.0	1.0	22.0	9.8	20	0.10	25.5	1978. 5.30
16	2.5	0.5	20.0	10.3	20	0.10	24.2	1978. 5.30
17	5.5	1.0	20.0	10.3	20	0.07	26.8	1978. 6. 1
18	3.0	0.5	20.0	10.3	20	0.07	29.0	1978. 6. 1

注: 表1的数据全由实际测量而得,是分别集中在冬、夏二季进行的。V为水流出小孔的体积;H为水位高度;T为水的温度;ν为水的分子运动粘性系数;t为测量水流体积的时间;d为柱塞小孔的直径;Re<sub>c</sub>为临界雷诺数,  $Re_c = Q/\nu H$ , 其中  $Q = V/t$  为流过小孔d的流量值。

$$Re_c = Q/\nu H \quad (2)$$

此判据便是雷诺数。从表1知,  $Re_c = 20-30$ 。若按算术平均,有

$$\overline{Re_c} = \frac{1}{17} \left( \sum_{i=1}^2 Re_{c_i} + \sum_{i=4}^{18} Re_{c_i} \right) = 25.70 \quad (3)$$

在式(3)中去掉  $i = 3$  是因为  $d=0.5$  对  $Re_c$  有较大影响。对很小的  $d$ ,  $Re_c$  是变化不大的。

3) 从表1知,略大的  $d$  使  $Re_c$  有明显的变化规律,我们只初步作出  $Re_c$  与  $d$  的关系(图2)。

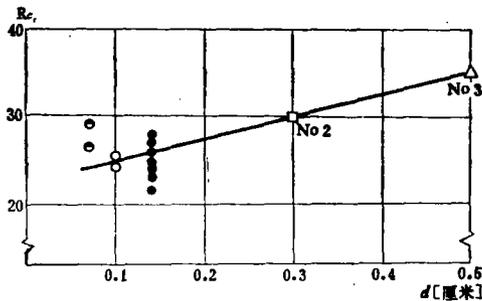


图2  $Re_c-d$  关系

4) 关于旋涡发生反旋的现象是在  $Re_c$  超过式(3)的值较大时(表2), 并且雷诺数似为一定数。表2是作者观察到  $Re_c \sim 50$  时发生反旋

或停转的数据。

表2 汇流旋涡反转的临界雷诺数

V [厘米 <sup>3</sup> ]	t [秒]	T [°C]	逆转	Re <sub>c</sub>	备注
4.5	10	25	有	~50	逆转多次
4.6	10	23	有	~50	逆转兼停转
5.5	10	23	无	~56	持续旋转

### 参 考 文 献

- [1] Sibulkin, M., *J. of Fluid Mechanics*, 14(1962), 21.
- [2] Kelley, D. L., Martin, B. W., Tayler, E. S., *J. of Fluid Mechanics*, 19(1964), 539.

(1978年6月12日收到)

## 非定常温度边界层

陈 允 明

(中国科学院力学研究所)

关于非定常边界层,除了周期运动之外,一般研究两个极端情况:一是近似为定常的情况,解可展为级数,零级近似是定常解,小参数

为  $\frac{du_\infty}{dt} l/u_\infty^{2[1]}$ ; 另一是对流加速度很小的情况, 即  $\partial/\partial t \gg \mathbf{V} \cdot \nabla$ . 中间的情况可用动量积分方程求近似解<sup>[2,3]</sup>, 但其中所缺的近似关系(如摩擦与型参数之间的关系)要根据相似性特解以及这两个极端情况的解来作假定. 本文讨论一般柱体作非定常运动的初期阶段, 即  $\partial/\partial t \gg \mathbf{V} \cdot \nabla$  的情况, 研究来流  $u_\infty = At^\alpha$  时的温度边界层及传热, 特别, 对  $Pr \approx 1$  的情形也求出了解答(油类、液态金属及天体等的研究中都会遇到  $Pr \approx 1$  的问题).

设柱体温度为  $T_w$ , 来流温度为  $T_\infty$ , 速度为  $t < 0$  时  $u_\infty = 0$ ,  $t \geq 0$  时  $u_\infty = At^\alpha$  ( $\alpha$  正实数); 边界层外缘速度为  $u_e = At^\alpha V(x)$ ,  $V(x)$  为不可压缩无粘性流体定常绕流时的物面速度分布(来流速度 = 1). 零阶近似中可忽略对流项  $\mathbf{V} \cdot \nabla$ , 对流项只出现在一阶近似中. 速度边界层问题已解决了<sup>[4-6]</sup>.  $\nu$  为运动粘性系数, 设

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 2\sqrt{\nu t} At^\alpha V(x) f(\zeta, x, t) \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

将解展为  $\sigma = At^{\alpha+1} \frac{dV}{dx}$  的级数, 设

$$f = f_0(\zeta) + \sigma f_1(\zeta) + \dots \quad (2)$$

可得速度边界层方程及边界条件如下:

$$\left. \begin{aligned} f_0''' + 2\zeta f_0'' + 4\alpha(1 - f_0') &= 0, \dots \\ f_0(0) = f_0'(0) = 0, \quad f_0(\infty) &= 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其解为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} f_0 &= \zeta + 2^{2\alpha} \Gamma(\alpha + 1) g_{\alpha+\frac{1}{2}}(\zeta) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma(\alpha + 1) / \Gamma(\alpha + 3/2) \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$g_\alpha(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(2\alpha + 1)} \int_0^\infty (\gamma - \zeta)^{2\alpha} e^{-\gamma^2} d\gamma \quad (5)$$

它具有如下性质:  $g_\alpha'(\zeta) = -g_{\alpha-\frac{1}{2}}(\zeta)$ ,  $g_\alpha(0) = \frac{2^{-2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}$ ,  $g_\alpha(\infty) = 0$ . 下面来研究温度边界层, 令

$$\theta = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty),$$

$$\text{设 } \theta = \theta_0(\zeta) + \sigma \theta_1(\zeta) + \dots$$

$$\begin{aligned} \theta_0'' + 2Pr\zeta\theta_0' &= 0, \\ \theta_0(0) = 1, \quad \theta_0(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{求得 } \theta_0(\zeta) = g_0(\sqrt{Pr}\zeta) = \text{erf } c(\sqrt{Pr}\zeta) \quad (7)$$

$$-\theta_0'(0) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Pr} \quad (8)$$

一阶近似方程为

$$\left. \begin{aligned} \theta_1'' + 2Pr\zeta\theta_1' - 4(1 + \alpha)Pr\theta_1 &= -4Prf_0\theta_0' \\ \theta_1(0) = \theta_1(\infty) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

设  $Pr = 1$ , 齐次方程通解为  $g_{\alpha+1}(\zeta)$ , 主要问题是求特解. 记方程 (9) 左端算子为

$$\mathcal{L}_\alpha = \frac{d^2}{d\zeta^2} + 2\zeta \frac{d}{d\zeta} - 4(\alpha + 1), \text{ 利用}$$

$$\mathcal{L}_\alpha(g_{\alpha+1}g_0) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta^2} g_{\alpha+\frac{1}{2}}(\zeta), \text{ 即得}$$

$$\theta_1(\zeta) = -2^{2\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1) g_{\alpha+1}(\zeta) \text{erf}(\zeta)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha + 2} \zeta e^{-\zeta^2} \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 5/2)} e^{-\zeta^2} \\ & + C g_{\alpha+1}(\zeta) \end{aligned} \quad (10)$$

由边界条件  $\theta_1(0) = 0$  定常数  $C$ :

$$\begin{aligned} C &= -2^{2\alpha+2} \Gamma(\alpha + 1) \\ & \times \Gamma(\alpha + 2) / [\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 5/2)] \end{aligned} \quad (11)$$

因此

$$\begin{aligned} -\theta_1'(0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\alpha + 1} + \frac{2}{\alpha + 2} \right) \\ & - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha + \frac{3}{2}) \Gamma(\alpha + \frac{5}{2})} \end{aligned} \quad (12)$$

传热准则公式为

$$\text{NuRe}^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\theta_0'(0) - \theta_1'(0) At^{\alpha+1} \frac{dV}{dx}}{2 \sqrt{At^{\alpha+1} \frac{dV}{dx}}} \quad (13)$$

其中  $\text{Nu} = hx/k$ ,  $\text{Re} = At^\alpha \frac{dV}{dx} x^2/\nu$ ,  $h$  为传

热系数:  $h(T_w - T_\infty) = -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$ ,  $k$  是热

传导系数.  $\alpha \gg 1$  时,  $-\theta'_i(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{1}{\alpha} - \frac{3}{\alpha^2} + 27/(4\alpha^3) + \dots \right]$ . 当柱体起动时,总可以在  $z = 0$  附近将其速度表为  $a_0 z^\beta (1 + a_1 z + \dots)$ , 因此上述结果具有一般性.

下面来研究  $Pr \approx 1$  情形. 先讨论  $\alpha = 0$ , 即突然起动情况. 引入  $\eta = \frac{y}{2\sqrt{at}} = \sqrt{Pr} \zeta$ ,

其中  $a = \nu/Pr$  是导温系数. 方程化为

$$\theta'_i + 2\eta\theta'_i - 4\theta_i = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta/\sqrt{Pr}) + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Pr} e^{-(1+1/Pr)\eta^2} - \frac{8}{\pi} \sqrt{Pr} e^{-\eta^2} \quad (14)$$

齐次方程通解为  $2\eta^2 + 1$  及  $\eta e^{-\eta^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\eta^2 + 1) \operatorname{erf}(\eta)$ .

$$\begin{aligned} \theta_i = & \frac{(Pr+1)^2}{4} (2\eta^2+1) \operatorname{erf}(\eta) \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{\sqrt{Pr}}\right) - \frac{(1+Pr)^2}{2\sqrt{\pi Pr}} (2\eta^2+1) I(\eta) \\ & + \frac{Pr^2+2Pr-1}{2\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{\sqrt{Pr}}\right) + \frac{4\sqrt{Pr}}{3\pi} e^{-\eta^2} - \frac{\sqrt{Pr}(1-Pr)}{2\pi} e^{-(1+1/Pr)\eta^2} \\ & + C_1(2\eta^2+1) + C_2 \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\eta^2+1) \operatorname{erf}(\eta) + \eta e^{-\eta^2} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $I(\eta) = \int_0^\eta e^{-\frac{\tau^2}{Pr}} \operatorname{erf}(\tau) d\tau = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{Pr})^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{n!} \int_0^{\eta^{1/Pr}} \tau^n e^{-\tau} d\tau$

$$I(\infty) = \sqrt{Pr/\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{Pr})$$

由边界条件定常数:  $C_1 = \frac{\sqrt{Pr}(1-Pr)}{2\pi} - \frac{4\sqrt{Pr}}{3\pi}$

$$C_2 = \frac{\theta_i(0)}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{4\sqrt{Pr}}{3\pi} + \frac{(1+Pr)^2}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{Pr}) - \frac{\sqrt{Pr}(1-Pr)}{2\pi} - \frac{(1+Pr)^2}{4} \right] \quad (16)$$

特例, 当  $Pr = 1$  时,  $I(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} [\operatorname{erf}(\eta)]^2$ ,  $\theta_i(\eta)$  与 (10) 式相同;  $-\theta'_i(0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{1}{2} - \frac{4}{3\pi} \right]$ , 与式(12)相同.

若  $Pr \approx 1$ ,  $\alpha = 1$ , 则方程为

$$\theta'_i + 2\eta\theta'_i - 8\theta_i = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Pr} e^{-\eta^2} f_0 \left( \frac{\eta}{\sqrt{Pr}}, \alpha = 1 \right) \quad (17)$$

齐次方程通解为  $3 + 12\eta^2 + 4\eta^4$  以及  $\frac{48}{\sqrt{\pi}} (3 + 12\eta^2 + 4\eta^4) \int_0^\eta \frac{e^{-\eta^2} d\eta}{3 + 12\eta^2 + 4\eta^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2\eta^3 + 5\eta) e^{-\eta^2} + (3 + 12\eta^2 + 4\eta^4) \operatorname{erf}(\eta)$ . 可用同样方法求解. 最后得到

$$-\theta'_i(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ C(Pr) \left[ 4 - \frac{8}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{Pr}) \right] - \frac{1}{6Pr} \right\} - \frac{16B(Pr)}{\pi^{3/2}} \quad (18)$$

$$\text{其中 } B(\text{Pr}) = \frac{\text{Pr}(5 + 8\text{Pr} + 3\text{Pr}^2)}{2(1 + \text{Pr})} A(\text{Pr}) + \frac{16\text{Pr}^{\frac{3}{2}} - 22\text{Pr} - 8\text{Pr} - 2}{36(1 + \text{Pr})} + \frac{8\sqrt{\text{Pr}}}{45},$$

$$A(\text{Pr}) = \frac{112\text{Pr}^{\frac{3}{2}} + 48\text{Pr}^{\frac{1}{2}} - 110\text{Pr}^3 - 42\text{Pr}^2 + 6\text{Pr} + 2}{144\text{Pr}(1 + \text{Pr})},$$

$$C(\text{Pr}) = \sqrt{\text{Pr}}(3\text{Pr} + 6\text{Pr} + 3)A(\text{Pr}).$$

当  $\text{Pr} = 1$  时,  $-\theta_1'(0) = \frac{7}{6\sqrt{\pi}} - \frac{128}{45} \frac{1}{\pi^{3/2}}$ , 与式(12)相同.

本文是 1964 年在郭永怀老师指导下完成的.

### 参 考 文 献

- [1] Phythian, J. E., *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 5(1952), 301.  
 [2] Yang, K. T., *J. Appl. Mech.*, 28(1955), 171.  
 [3] Розин, Л. А., *ИММ*, 21, 5 (1957).  
 [4] Watson, E., *Proc. Roy. Soc. ser. A*, 231, 1184 (1955).  
 [5] Görtler, H., *Ing. Archiv*, 14 (1944).  
 [6] Collins, W. M. and Dennis, S.C.R., *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 26(1973), 53.  
 (1978 年 6 月 26 日收到)

## 天体运行的能量方程

查 有 梁

(成都市教育局教研室)

从发射人造地球卫星的理论和实践知道, 卫星运行的轨道不仅决定于发射点距地心的距离和发射卫星时的速度大小, 而且也决定于发射时的角度  $\alpha$ , 速度的方向即轨道切线的方向(图 1). 我们提出一种新的坐标即切线坐标来描写卫星的运动. 这种坐标以  $r$  和  $\alpha$  为变量, 可由极坐标经变换而得到. 由微分法可知

$$\text{tg } \alpha = r/r'_\theta \quad (1)$$

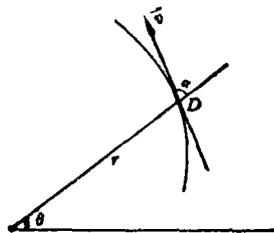


图 1

根据圆锥曲线的极坐标方程

$$r = p/(1 + e \cos \theta) \quad (2)$$

其中  $p$  为半通径,  $e$  为离心率, 应用变换(1), 即得圆锥曲线的切线坐标方程

$$\frac{p}{2r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{r} = \frac{e^2 - 1}{2p} \quad (3)$$

根据解析几何, 由式(3)可分别得到

$$\text{椭圆方程 } \frac{p}{2r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2a} \quad (4)$$

$$\text{抛物线方程 } \frac{p}{2r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{r} = 0 \quad (5)$$

$$\text{双曲线方程 } \frac{p}{2r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{r} = \frac{1}{2a} \quad (6)$$

文献[1]曾应用几何方法得到过与上述三式等价的方程, 但未得出式(3).

应用变换(1)可推知, 圆锥曲线的统一的曲率半径公式为

$$\rho = p/\sin^3 \alpha \quad (7)$$

应用切线坐标, 可把面积速度公式表为

$$B = r v \sin \alpha / 2 \quad (8)$$

应用式(7), (8)即可证明天体力学中的一个重要公式<sup>[2]</sup> ( $G$  为万有引力常数)

$$4B^2/p = GM \quad (9)$$

将式(8)代入式(3), 并利用式(9), 可得天体沿圆锥曲线轨道运行的统一的能量积分

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right) \quad (10)$$

由式(10)即得天体力学中的能量积分:

$$\text{对于椭圆轨道 } v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (11)$$

$$\text{对于抛物线轨道 } v^2 = \frac{2GM}{r} \quad (12)$$

$$\text{对于双曲线轨道 } v^2 = GM \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) \quad (13)$$

天体在引力场中运动, 根据能量守恒和转