第20卷 第2期 天文学报 Vol. 20, No. 2
1979年6月 ACTA ASTRONOMICA SINICA June, 1979

运动气体的冻结型和电阻型无力场*

潘良儒
(中国科学院力学研究所)

提要

本文是文[1]的继续,除了核实文[1]中的结论外,新的结果有:

(1) 若电场 $\bar{E}$ 的势场 $-\nabla\phi$ 按满足

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\cdot\bar{B}=0$$

规范,则 α 为常数的必要充分条件是:

$$\nabla\times(\bar{V}\times\bar{B})=\beta\bar{B},$$

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}=0.$$

式中 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 和 $\bar{V}$ 分别为磁矢势、磁场和气体速度.

(2) 得到控制 α 变化的基本方程,电阻是 α 从非常数演化到常数的因素.

一、引言

导电气体无论电导率多大,总是有一些电阻. 在处理天体中约束于磁场中的等离子气体团的演化问题时,就要考虑电阻导致磁场扩散的影响. 本文考虑电阻和气体运动同时存在的情况,实际上气体不一定是静止的.

无力场方程为:

$$\nabla\times\bar{B}=\alpha\bar{B},\tag{1}$$

$$\frac{4\pi}{c}\bar{J}=\nabla\times\bar{B}.\tag{2}$$

满足无力场方程(1)的解不一定稳定. 作者在文[1]中回答了在电阻和流场同时存在的情况下,稳定的条件问题,并指出: 系统的磁能对气体的运动来说是势能,只有在势能居于最小状态时,气体才不会因任何扰动而离开无力场平衡态. 文[1]的变分结果,发现无论是电阻型或冻结型的,无论气体是静止或运动的,α 为常数表征了系统磁能最小状态. 本文是文[1]的继续,进一步论证 α 为常数的必要充分条件.

二、基本方程

磁流力学中无力场基本方程除(1)和(2)式外,还必须受 Maxwell 方程组的其余方程的控制,可写为

* 1978年4月24日收到.

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0, \tag{3}$$

$$\bar{J}/\sigma = \bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}/c, \tag{4}$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \tag{5}$$

式中 $\bar{E}$ 和 σ 分别为电场和气体的电导率，$\bar{V}$ 为气体流速.

对(1)式取散度，注意(3)式，得：

$$\hat{B} \cdot \nabla\alpha = 0. \tag{6}$$

"∧"指单位向量. 为满足(3)式，定义

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}. \tag{7}$$

代入(5)式并积分得

$$\bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla\phi. \tag{8}$$

式中位势场 $\nabla\phi$ 允许调整，一般规范是满足 $\nabla \cdot \bar{A}$ 为零的关系，这时 ϕ 的源是电荷密度. 我们将按下文需要作调整. 以上方程组不闭合，$\bar{E}$ 场可给定.

三、 α 的几何意义和控制其变化的基本方程

1. α 的几何意义：

(1)式可写成如下形式

$$\alpha\hat{B} = \nabla \ln B \times \hat{B} + \nabla \times \hat{B}. \tag{9}$$

(9)×$\hat{B}$ 给出

$$\alpha = \hat{B} \cdot \nabla \times \hat{B}. \tag{10}$$

此式说明 α 只是随 $\hat{B}$ 变化的函数，即 $\nabla \times \hat{B}$ 在 $\hat{B}$ 向的分量，和 B 无直接的关系.

(9)·$\hat{B}$ 给出

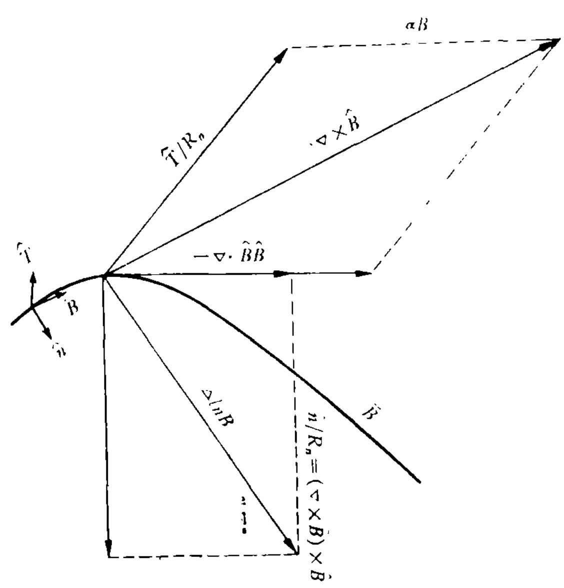

图 1　无力场中 $\nabla\ln B$、$\nabla\times\hat{B}$ 和 α 的几何关系以及自然座标单位向量($\hat{B}$, $\hat{n}$, $\hat{T}$)示意图

$$\nabla \ln B = (\nabla \times \hat{B}) \times \hat{B} + \nabla_{/\!/} \ln B. \tag{11}$$

下标//指平行于 $\hat{B}$ 的分量. 从(3)式得

$$\hat{B} \cdot \nabla \ln B = -\nabla \cdot \hat{B}. \tag{12}$$

因此(11)式又可写成

$$\nabla \ln B = \hat{n}/R_n - \nabla \cdot \hat{B}\hat{B}. \tag{13}$$

式中利用了如下关系

$$(\nabla \times \hat{B}) \times \hat{B} = \hat{B} \cdot \nabla \hat{B} = \hat{n}/R_n. \tag{14}$$

R_n 为磁力线的曲率半径, $\hat{n}$ 为单位法向向量,指向曲率中心. 定义

$$\hat{B} \times \hat{n} = \hat{T}. \tag{15}$$

将(13)式代入(9)式得

$$\nabla \times \hat{B} = \alpha \hat{B} + \hat{T}/R_n. \tag{16}$$

将(13)式和(16)式各量表示如图 1.

从图 1 知 $\nabla \ln B$ 是磁压梯度和 B^2 之比,而 $\hat{n}/R_n$ 是磁力线拉力在 $\hat{n}$ 向的分量和 B^2 之比,可称之为磁向心力和 B^2 之比. $\nabla \ln B$ 的 $\hat{n}$ 分量和磁向心力与 B^2 之比相等; 它的 $\hat{B}$ 分量和磁拉力 $\hat{B}$ 向梯度与 B^2 之比相等. $\nabla \times \hat{B}$ 的 $\hat{B}$ 分量为 $\alpha \hat{B}$, 指无作用电流和 $\frac{c}{4\pi} B$ 之比. 对具有 ∇P 的静磁流体力学问题来说, 则图 1 中的 $\nabla \ln B$ 应以 $\nabla \ln B + 4\pi \nabla P/B^2$ 代替之,这是表征洛伦兹力和 ∇P 的平衡, 这时就有平衡 ∇P 的有作用力电流. 无论是有力场或无力场, 无力因子 α 都是 $\hat{B}$ 的旋度 $\nabla \times \hat{B}$ 在 $\hat{B}$ 向的分量, 只和 $\hat{B}$ 的空间变化率有关,和 B 无直接关系.

2. 控制 α 的基本方程

令

$$\bar{D} = \nabla \times (\bar{V} \times \bar{B}). \tag{17}$$

对(1)式求时间的偏微分

$$\nabla \times \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \bar{B} + \alpha \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \tag{18}$$

由(4)式求旋度,注意(5)式,得:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \bar{D} - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times (\alpha \bar{B}). \tag{19}$$

将上式代入(18)式并利用(13)式得

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \hat{B} = \frac{\nabla \times \bar{D} - \alpha \bar{D}}{B} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\left(\nabla^2 \alpha \hat{B} + \frac{2\hat{n} \cdot \nabla \alpha}{R_n} \hat{B} + 2\nabla \alpha \cdot \nabla \hat{B}\right). \tag{20}$$

兹将上式分别写成 $\hat{B}$ 方向分量和垂直于 $\hat{B}$ 的分量形式来讨论. 其 $\hat{B}$ 分量为

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \bar{B} \cdot (\nabla \times \bar{D} - \alpha \bar{D})/B^2 + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\left(\nabla^2 \alpha + \frac{2\hat{n} \cdot \nabla \alpha}{R_n}\right), \tag{21}$$

其垂直于 $\hat{B}$ 的分量为

$$\frac{\nabla_\perp \times \bar{D} - \alpha \bar{D}_\perp}{B} + \frac{c^2}{2\pi\sigma} \nabla \alpha \cdot \nabla \hat{B} = 0. \tag{22}$$

式中 $\nabla_\perp \times \bar{D}$ 指 $\nabla \times \bar{D}$ 的垂直于 $\hat{B}$ 的分量. (21)式说明 α 的局部变化率受两个因素控

制：其一是该式右边第一项，代表气体运动的影响，也可理解为有效电场的影响；其二是右边第二项，其中 $\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\alpha$ 代表电阻对 α 产生的扩散作用，$\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\hat{n}\cdot\nabla\alpha}{R_n}$ 代表电阻、曲率和 α 沿 $\hat{n}$ 向的梯度对 $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ 的贡献.

(22)式说明流体运动或有效电场对 $\hat{B}$ 场沿 $\nabla\alpha$ 方向变化所起的影响.

四、α 为常数的必要充分条件

兹分电阻型无力场和冻结型无力场来讨论 α 为常数的必要充分条件.

1. 电阻型无力场

(20)式说明 α 为常数的必要条件是

$$\nabla\times\bar{D}-\alpha\bar{D}=0. \tag{23}$$

根据 $\bar{D}$ 的定义(17)式知 $\bar{D}$ 为无散场，即

$$\nabla\cdot\bar{D}=0. \tag{24}$$

比较上两式和(1)、(2)式，知 $\bar{D}$ 和 $\bar{B}$ 受同一基本方程组所控制，$\bar{D}$ 也和 $\nabla\alpha$ 垂直，即

$$\bar{D}\cdot\nabla\alpha=0. \tag{25}$$

下面要进一步回答的是：α 为常数的必要充分条件是什么？在进行说明以前，讨论行将采用的座标单位向量：

(21)和(22)式可简化为

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{c^2}{4\pi\sigma}\left(\nabla^2\alpha+\frac{2\hat{n}\cdot\nabla\alpha}{R_1}\right), \tag{26}$$

$$\nabla\alpha\cdot\nabla\hat{B}=0. \tag{27}$$

上式中用 R_1 代替了(21)式中的 R_n，下标 1 代表第一曲率半径. 兹定义

$$\left.\begin{aligned}\hat{B}_t&=\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\Big/\left|\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\right|,\\ \hat{\alpha}&=\nabla\alpha/|\nabla\alpha|.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

利用(6)式和(25)式，则 $\hat{\alpha}\cdot$(19) 给出

$$\hat{B}_t\cdot\hat{\alpha}=0. \tag{29}$$

$\hat{B}$ 的绝对值为 1 的性质给出

$$\hat{B}\perp\hat{B}_t. \tag{30}$$

下文的讨论中采取($\hat{B}$、$\hat{\alpha}$、$\hat{B}_t$)正交座标系. $\hat{n}$ 和 $\hat{B}_t$ 同方向.

(27)$\cdot\hat{\alpha}$ 给出

$$\hat{\alpha}\cdot\nabla\hat{B}\cdot\hat{\alpha}=\hat{n}_\alpha\cdot\hat{B}/R_{1\alpha}=0. \tag{31}$$

$\hat{n}_\alpha$ 和 $R_{1\alpha}$ 分别代表沿 $\hat{\alpha}$-轴线上的主法向单位向量和第一曲率半径. 如果 $R_{1\alpha}\neq 0$，则

$$\left.\begin{aligned}\hat{n}_\alpha&\perp\hat{B},\\ \hat{n}_\alpha&\perp\hat{\alpha}.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

可取 $\hat{n}_\alpha$ 和 $\hat{B}_t$ 同向，也可取为反向，不失证明的普遍性.

先讨论 α 为常数的充分条件，分(A)，(B)，(C)三个步骤进行:

(A)　$\nabla \hat{B}$、$\nabla \hat{\alpha}$ 和 $\nabla \hat{B}_t$ 的计算

$\nabla \hat{B}$，$\nabla \hat{\alpha}$ 和 $\nabla \hat{B}_t$ 沿 $\hat{\alpha}$ 向的微分可用 Frenet 公式计算如下：

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\alpha}\cdot\nabla\hat{B} = -\hat{n}_\alpha/R_{2\alpha} = 0, \\ &\hat{\alpha}\cdot\nabla\hat{\alpha} = \hat{n}_\alpha/R_{1\alpha}, \\ &\hat{\alpha}\cdot\nabla\hat{n}_\alpha = \hat{\alpha}\cdot\nabla\hat{B}_t = -\hat{\alpha}/R_{1\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

从上式的第一式知沿 $\hat{\alpha}$-轴线的第二曲率半径 $R_{2\alpha}$ 必须为无限大方能满足(25)式，这说明该线必须在垂直于 $\hat{B}$ 的平面内。

以上三个张量的 $\hat{B}$ 向微分分别计算如下

$$\hat{B}\cdot\nabla\hat{B} = \hat{n}/R, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \hat{B}\cdot\nabla\hat{\alpha} &= \hat{B}\cdot\nabla\hat{\alpha}\cdot\hat{B}\hat{B} + \hat{B}\cdot\nabla\hat{\alpha}\cdot\hat{B}_t\hat{B}_t \\ &= -\hat{B}\cdot\nabla\hat{B}\cdot\hat{\alpha}\hat{B} + \{\nabla\hat{\alpha}\cdot\hat{B} - \hat{B}\times(\nabla\times\hat{\alpha})\}\cdot\hat{B}_t\hat{B}_t \\ &= -\frac{\hat{n}\cdot\hat{\alpha}}{R_1}\hat{B} + \alpha\hat{B}_t, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \hat{B}\cdot\nabla\hat{B}_t &= \hat{B}\cdot\nabla\hat{B}_t\cdot\hat{\alpha}\hat{\alpha} + \hat{B}\cdot\nabla\hat{B}_t\cdot\hat{B}\hat{B} \\ &= -(\hat{n}\cdot\hat{B}_t/R_1)\hat{B} - \alpha\hat{\alpha}. \end{aligned} \tag{36}$$

在计算(35)式时利用了

$$\hat{\alpha}\cdot\nabla\times\hat{\alpha} = 0$$

的关系。

按以上类似计算得以上三个张量的 $\hat{B}_t$ 向微分为

$$\hat{B}_t\cdot\nabla\hat{B} = -\alpha\hat{\alpha} - (\hat{n}_t\cdot\hat{B}/R_{1t})\hat{B}_t. \tag{37}$$

$$\hat{B}_t\cdot\nabla\hat{\alpha} = \alpha\hat{B} - (\hat{n}_t\cdot\hat{\alpha}/R_{1t})\hat{B}_t, \tag{38}$$

$$\hat{B}_t\cdot\nabla\hat{B}_t = \hat{n}_t/R_{1t}. \tag{39}$$

式中 $\hat{n}_t$ 和 R_{1t} 分别代表 $\hat{B}_t$-轴线的主法向单位向量和第一曲率半径。兹根据以上计算结果得三个张量的表达式为

$$\left.\begin{aligned} \nabla\hat{B} &= \frac{1}{R_1}\hat{B}\hat{n} - \alpha\hat{B}_t\hat{\alpha} - \frac{\hat{n}_t\cdot\hat{B}}{R_{1t}}\hat{B}_t\hat{B}_t, \\ \nabla\hat{\alpha} &= -\frac{\hat{n}\cdot\hat{\alpha}}{R_1}\hat{B}\hat{B} + \frac{\hat{\alpha}\hat{B}_t}{R_{1\alpha}} + \alpha\hat{B}\hat{B}_t + \alpha\hat{B}_t\hat{B} - \frac{\hat{n}_t\cdot\hat{\alpha}}{R_{1t}}\hat{B}_t\hat{B}_t, \\ \nabla\hat{B}_t = \nabla\hat{n}_\alpha &= -\frac{\hat{n}\cdot\hat{B}_t}{R_1}\hat{B}\hat{B} - \frac{1}{R_{1\alpha}}\hat{\alpha}\hat{\alpha} + \frac{1}{R_{1t}}\hat{B}_t\hat{n}_t - \alpha\hat{B}\hat{\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

(B)　$\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}$、$\left|\dfrac{\partial\hat{B}}{\partial t}\right|$和$|\nabla\alpha|$的关系式

(10)式的时间偏微分为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\cdot\nabla\times\hat{B} + \hat{B}\cdot\nabla\times\frac{\partial\hat{B}}{\partial t} \\ &= \left|\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\right|(\hat{B}_t\cdot\nabla\times\hat{B} + \hat{B}\cdot\nabla\times\hat{B}_t) + \hat{B}\cdot\nabla\left|\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\right|\times\hat{B}_t \\ &= \left|\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\right|[2\hat{B}_t\cdot\nabla\times\hat{B} - \nabla\cdot(\hat{B}\times\hat{B}_t)] + \hat{B}\cdot\nabla\left|\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\right|\times\hat{B}_t \end{aligned}$$

$$= \left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right|(\nabla \cdot \hat{\alpha} + 2\hat{B}_t \cdot \hat{T}/R_1) + \hat{\alpha} \cdot \nabla \left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right|. \tag{41}$$

(26)式可以化为与上式相似的形式如下

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\left[\left(\nabla \cdot \hat{\alpha} + \frac{2\hat{n} \cdot \hat{\alpha}}{R_1}\right)|\nabla \alpha| + \hat{\alpha} \cdot \nabla |\nabla \alpha|\right]. \tag{42}$$

由于 $\hat{n} \perp \hat{T}$，$\hat{B}_t \perp \hat{\alpha}$，而这四个单位向量又都垂直于 $\hat{B}$，则

$$\hat{B}_t \cdot \hat{T} = \hat{n} \cdot \hat{\alpha}. \tag{43}$$

故(42)又可写为

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}[(\nabla \cdot \hat{\alpha} + 2\hat{B}_t \cdot \hat{T}/R_1)|\nabla \alpha| + \hat{\alpha} \cdot \nabla |\nabla \alpha|]. \tag{44}$$

因此将(44)式中的 $\frac{c^2}{4\pi\sigma}|\nabla \alpha|$ 以 $\left|\frac{\partial B}{\partial t}\right|$ 置换，就和(41)完全一样，这两者的关系是

$$\frac{|\nabla \alpha| c^2}{4\pi\sigma} = \left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right| + G. \tag{45}$$

式中 G 满足下列方程

$$G(\nabla \cdot \hat{\alpha} + 2\hat{B}_t \cdot \hat{T}/R_1) + \hat{\alpha} \cdot \nabla G = 0. \tag{46}$$

利用(45)式将(19)式改写成如下形式：

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla \times (\alpha \bar{B}) \\ &= \frac{\partial B}{\partial t}\hat{B} + B\left(\left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right| - \frac{c^2}{4\pi\sigma}|\nabla \alpha|\right)\hat{B}_t + \frac{c^2\alpha^2}{4\pi\sigma}B\hat{B} \\ &= B\left[\left(\frac{\partial \ln B}{\partial t} + \frac{c^2\alpha^2}{4\pi\sigma}\right)\hat{B} - G\hat{B}_t\right]. \end{aligned} \tag{47}$$

从上式看来，$-GB$ 是 $\bar{D}$ 的 $\hat{B}_t$ 分量，如果气体静止，或 $\bar{D} /\!/ \hat{B}$，则 G 应为零。

(C) $\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t}$、$\left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right| \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}$ 的关系

根据文[1]的经验，作 $\nabla \phi$ 的规范使(8)式中的 $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ 满足下列关系

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \cdot \bar{B} = 0. \tag{48}$$

令

$$\frac{\partial \hat{A}}{dt} = 0. \tag{49}$$

代入(48)，得：

$$\hat{A} \cdot \hat{B} = 0. \tag{50}$$

利用(49)式，取 $\frac{\partial}{\partial t}$ (50)得

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} \cdot \hat{A} = 0. \tag{51}$$

这也就是说，若 $\left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right| \neq 0$ 则

$$\hat{B}_t \cdot \hat{A} = 0 \tag{52}$$

从上式和(50)式知 $\hat{A}$ 垂直于 $\hat{B}_t$ 和 $\hat{B}$，故知

$$\hat{A} = \hat{\alpha}. \tag{53}$$

由(53)式并利用(49)式得

$$\left.\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t}\right|_{\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}=0} = 0. \tag{54}$$

$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\alpha} \cdot \nabla \hat{B})$并利用(27)和(54)式，当 $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$ 时，得

$$\hat{\alpha} \cdot \nabla \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} = \hat{\alpha} \cdot \nabla \left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right| \hat{B}_t + \left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right| \hat{\alpha} \cdot \nabla \hat{B}_t = 0. \tag{55}$$

利用(40)式的第三式 $\nabla \hat{B}_t$ 表达式，则上式化为

$$\hat{\alpha} \cdot \nabla \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} = \hat{\alpha} \cdot \nabla \left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right| \hat{B}_t - \frac{1}{R_{1\alpha}} \left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right| \hat{\alpha} = 0. \tag{56}$$

取上式 $\hat{\alpha}$ 分量得

$$\left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right|_{\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}=0} = 0. \tag{57}$$

将上式代入(41)得

$$\left.\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right|_{\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}=0} = 0. \tag{58}$$

从上分析结果说明，若 $\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$，则 $\left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right|$，$\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ 必为零. 将(57)式代入(45)式得

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} |\nabla\alpha|_{\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}=0} = G, \tag{59}$$

故

$$|\nabla\alpha|_{\substack{\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}=0 \\ G=0}} = 0. \tag{60}$$

将 $G = 0$ 代入(47)式得

$$\bar{D}_{G=0} = \beta \bar{B}. \tag{61}$$

此处 β 是独立于位置的函数. 从以上分析知 α 为常数的充分条件是

$$\left.\begin{aligned} \bar{D} &= \beta \bar{B}, \\ \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

其 $\nabla\phi$ 的规范必须满足(48)式.

(D) 求证(62)也是 α 为常数的必要条件

从(45)式知 α 为常数时得

$$G\Big|_{\alpha=常数} = -\left|\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right|_{\alpha=常数}. \tag{63}$$

(47)式可简写为

$$\bar{D} = \beta \bar{B} - BG\hat{B}_t. \tag{64}$$

将上式代入(20)式，得

$$\nabla\beta \times \bar{B} - \nabla(BG) \times \hat{B}_t - BG\nabla \times \hat{B}_t = -\alpha BG\hat{B}_t. \tag{65}$$

利用(40)第三式，则 $\hat{B}\cdot(65)$ 给出

$$\hat{\alpha}\cdot\nabla\ln(BG)=\hat{\alpha}\cdot\hat{n}_t/R_{1t}. \tag{66}$$

代入(46)式得

$$G\left(\nabla\cdot\hat{\alpha}+\frac{2\hat{B}_T\cdot\hat{T}}{R_1}-\hat{\alpha}\cdot\nabla\ln B+\frac{\hat{\alpha}\cdot\hat{n}_t}{R_{1t}}\right)=0. \tag{67}$$

故

$$G=0. \tag{68}$$

代入(63)式得

$$\left|\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\right|_{\alpha=常数}=0. \tag{69}$$

因此令

$$\bar{B}=\bar{B}_0 f(t). \tag{70}$$

式中 $\bar{B}_0$ 是 $t=0$ 时的 $\bar{B}$，因此 $f(0)$ 为 1. 将上式代入(19)式，并利用 $\alpha=$ 常数，则

$$\bar{D}=\beta\bar{B}=\beta f\bar{B}_0. \tag{71}$$

积分上式得

$$\bar{V}\times\bar{B}=\frac{\beta}{\alpha}\bar{B}+\nabla\Phi. \tag{72}$$

式中 Φ 规范为

$$\Phi=-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^l\bar{B}\cdot d\bar{l}. \tag{73}$$

上式中的 dl 是沿磁力线的微元代入(4)式，并利用(8)式，得：

$$\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}=\left(\frac{c^2\alpha}{4\pi\sigma}-\frac{\beta}{\alpha}\right)f(t)\nabla_\perp\int_0^l\bar{B}_0\cdot d\bar{l} \tag{74}$$

从上式知 $\bar{A}$ 的形态不变(电场形态不变)，即

$$\left.\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right|_{\alpha=常数}=0.$$

到此完成了 α 为常数时的必要充分条件的证明.

2. 冻结型无力场

所谓冻结型就是电导率 σ 为无穷大时的情况，看来上文的证明似乎不能成立，但是实际的气体的电导率 σ 总是具有一定值，所以上面的结论仍适用于冻结型无力场. 此外，根据文[1]，表征磁能最小状态的是 α 为常数. 又根据 (21)、(22) 式揭示的物理机制可看出从非常数 α 过渡到常数 α 必须借助于有限的 σ.

五、本文至此可作如下结论

1. 文 [1] 证明了无论是电阻型或冻结型无力场，无论气体是运动的或静止的，α 为常数表征系统的最小磁能状态，即稳定无力场，是无力场的归宿.

2. 本文是文[1]的继续，除了再次证明以上结论外，新的结果是：若 $\nabla\phi$ 的规范满足(48)式，则(62)式是 α 为常数的必要充分条件，而且电场磁场形态不发生局部变化.

3. (21)式说明：α 从非常数到常数，也就是说系统从某一起始状态演化到稳定无力场，是由于电阻对 α 场有扩散作用，离开这个因素就不能解释冻结型无力场如何从一定起始状态到最小磁能状态的机制.

4. α 为常数的无力场的物理量的讨论参见文[1].

参 考 文 献

[1] 潘良儒："冻结型和电阻型无力场"，天文学报，**19** (1978)，172.

FROZEN-IN AND RESISTIVE FORCE-FREE FIELDS FOR MOVING FLUIDS

PAN LIANG-RU
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

By a method different from the variation principle reported in the auther's previous paper (1), the theory that the force-free factor α for a stable magnetic field in the presence of moving fluid with infinite or finite conductivity, is a constant, has again been proved correct. There are some new results obtained in the following:

(1) The necessary and sufficient conditions for constant α are

$$\nabla \times (\bar{V} \times \bar{B}) = \beta \bar{B}$$

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0$$

Where the second condition also means that the unit vactor of $\bar{E}$ has no local change

(2) A basic equation governing α is found.