

薄层放电的磁流体力学旋转流动分析*

中国科学院力学研究所 胡文瑞

磁流体力学旋转流问题中一般假设流体输运系数为常数^[1]。用磁流体力学方法处理电弧放电问题时,经常假设弧柱内外的输运系数分别为两个不同的常数^[2,3],并取弧柱外介质的电导率为零。在气态裂变反应堆、核火箭^[4,5]及重元素的同位素分离器^[6,7]中,广泛采用交叉电磁场的方法产生等离子体的高速旋转流动。文献[8,9]研究了薄层放电的电磁驱动装置,用多对极实验得到一定的分离效果。可以认为,这类薄层放电的电流集中在与电极环相同的一个圆柱层内,薄层外的气体电导率为零,气体的粘性系数为常数。

讨论放电容器 $0 \leq R_0 \leq r \leq R$, $-L \leq z \leq L$, 环电极位于 $r = a$, $z = \pm L$, 其中 $a < R$ 。容器内部有外加径向磁场。电流集中于薄层中,故有

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = j_0 \delta(r - a), \quad (1)$$

其中 δ 为狄拉克函数, $j_0 = I/2\pi a$ 是常数, I 是迴路的总电流,我们采用柱面坐标系,这时流体运动与感应方程退耦。可单独考虑磁流体力学的动量方程。边值问题表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{j_0 B_r}{c\eta} \delta(r - a) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$v_\theta|_{t=0} = v_\theta|_{z=\pm L} = v_\theta|_{r=R_0} = v_\theta|_{r=R} = 0$$

其中径向磁场大多假设为 $B_r = B_0 a/r$, $B_0 =$ 常数 (3)

讨论无限圆盘间的定常运动 $\partial/\partial t = 0$, $R_0 = 0$, $R \rightarrow \infty$ 。用亨克变换求解,令

$$V(\xi, z) = \int_0^\infty v_\theta(r, z) r J_1(r\xi) dr \quad (4)$$

考虑到 $\int_0^\infty \delta(r - a) J_1(\xi r) dr = J_1(\xi a)$, 以及反演关系

$$\int_0^\infty \frac{J_1(\xi a) J_1(\xi r)}{\xi} d\xi = \begin{cases} r/2a & (r \leq a) \\ a/2r & (r \geq a) \end{cases} \quad (5)$$

经过一些运算,可求出这种情况的解为

$$v_\theta(r, z) = \begin{cases} \frac{B_0 j_0 a}{c\eta} \left[\frac{r}{2a} - \int_0^\infty \frac{\text{ch}(\xi z)}{\text{ch}(\xi L)} \frac{J_1(\xi a) J_1(\xi r)}{\xi} d\xi \right] & (r \leq a) \\ \frac{B_0 j_0 a}{c\eta} \left[\frac{a}{2r} - \int_0^\infty \frac{\text{ch}(\xi z)}{\text{ch}(\xi L)} \frac{J_1(\xi a) J_1(\xi r)}{\xi} d\xi \right] & (r \geq a) \end{cases} \quad (6)$$

* 1975年8月6日收到。

式(6)右端第二项为上下边壁对流场的影响。当 $L \rightarrow \infty$ 时,就得到简单的速度分布:

$$v_{\theta}(r, z) = \frac{B_0 j_0 a}{2c\eta} \left(\frac{r}{a} \right) \quad (r \leq a); \quad v_{\theta}(r, z) = \frac{B_0 j_0 a}{2c\eta} \frac{a}{r} \quad (r \geq a) \quad (7)$$

这个结果表明,电流薄层内的流体严格满足刚性转速的条件是,放电容器的径向和轴向边界都应无限延伸(即[7]中的速度分布条件)。有限 L 值时从式(6)可看出,相应的因子 $\left[1 - \frac{\text{ch}(\xi z)}{\text{ch}(\xi L)} \right]$ 从对称平面处的 $[1 - 1/\text{ch}(\xi L)]$ 变到边壁处的零值。速度从 $z = 0$ 处的最大值降到 $z = \pm L$ 处的零值。与旋转转筒的情况不同,放电薄层也是流体,其转速也会受器壁边界的影响。

不难将上述结果推广到有限径向边界的情况,这时 $R_0 = 0, R$ 有限。类似地可令

$$V_n(z) = \int_0^R v_{\theta}(r, z) r J_1(\gamma_n r) dr \quad (8)$$

特征根 γ_n 定义为 $J_1(\gamma_n R) = 0$ 。由这类亨克变换可求出边值问题(2)的解为

$$v_{\theta}(r, z) = \frac{2j_0 B_0 a}{c\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{\text{ch}(\gamma_n z)}{\text{ch}(\gamma_n L)} \right] \frac{J_1(\gamma_n a) J_1(\gamma_n r)}{(R\gamma_n)^2 [J_1'(\gamma_n R)]^2} \quad (9)$$

式(9)中右端的 $\text{ch}(\gamma_n z)/\text{ch}(\gamma_n L)$ 代表轴向边界对流动的影响, $[1 - \text{ch}(\gamma_n z)/\text{ch}(\gamma_n L)]$ 给出了流场的边界层特征。式(9)表明,速度在 $r = a$ 和 $z = 0$ 处最大,这结果在物理上不难理解。整个流场的最大速度和两壁面间的平均速度分别为

$$v_{\max} = v_{\theta}(a, 0) = \frac{2j_0 B_0 a^3}{c\eta R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{\text{ch}(\gamma_n L)} \right] \frac{[J_1(\gamma_n a)]^2}{(a\gamma_n)^2 [J_1'(\gamma_n R)]^2} \quad (10)$$

$$v_{\text{平均}} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L v_{\theta} dz = \frac{2j_0 B_0 a^3}{c\eta R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{\text{th}(\gamma_n L)}{\gamma_n L} \right] \frac{J_1(\gamma_n a) J_1(\gamma_n r)}{(a\gamma_n)^2 [J_1'(\gamma_n R)]^2} \quad (11)$$

当 $\gamma_n L$ 很大时 $\text{th}(\gamma_n L) \approx 1$, 故式(11)级数的前几项起主要作用。

在具体装置中要合理选择电极位置。图1给出环电极相对位置对流场的影响。环电极若太靠近外壁,粘性阻力太大,不利于加速。环电极向内,有较大的速度,但总流量却减少了。若取 $a/R \approx 0.7$, 这时的最大速度为无界空间加速值的一半,看来比较合适。

图2绘出了两种典型位置下对称平面处旋转速度的径向分布,充分反映出薄层放电

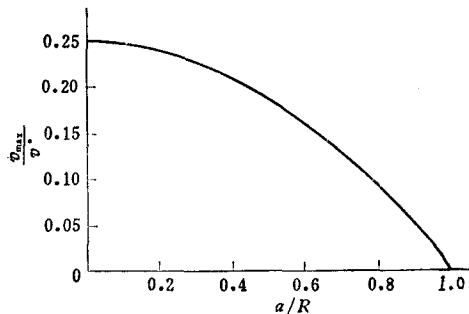


图1 放电薄层的位置对速度的影响,
其中 $\frac{L}{R} = 2, v^* = \frac{2j_0 B_0 a^3}{c\eta R^2}$

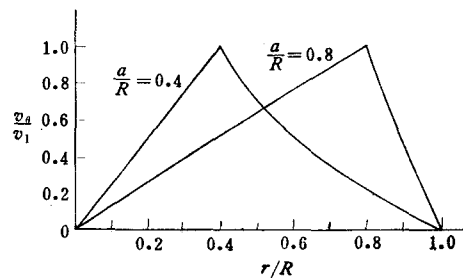


图2 旋转速度的径向分布,
其中 $\frac{L}{R} = 2$, 特征速度 $v_1 = v_{\theta}(a, 0)$

的流场特征: 电流层处速度最大, 向内接近线性地降到零, 向外更陡地降到外边壁处的零值. 图 3 是放电薄层内外剖面上旋转速度的轴向分布. 在轴向边壁附近明显地有边界层特征, 一般会产生较强的二次流. 为了在同样高度内克服和减小二次流的影响, 可讨论沿轴向衰减的径向磁场位形. 例如, 设外磁场为

$$\mathbf{B} = \nabla A, \quad A = B_0 a J_0[r/(\lambda R)] e^{-|z|/\lambda R} \quad (12)$$

其中 λ 为适当参数. 这时问题(2), (12)的解为

$$v_\theta(r, z) = \frac{2j_0 B_0 a}{c\eta} \frac{J_1(a/\lambda R)}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_1(\gamma_n a) J_1(\gamma_n r)}{[J_1'(\gamma_n R)]^2 [(\gamma_n R)^2 - (1/\lambda)^2]} \cdot \left[e^{-|z|/\lambda R} - \frac{\text{sh}(\gamma_n L - L/\lambda R)}{\text{sh}(2\gamma_n L)} e^{\gamma_n z} - \frac{\text{sh}(\gamma_n L + L/\lambda R)}{\text{sh}(2\gamma_n L)} e^{-\gamma_n z} \right] \quad (13)$$

随着 λ 的减小, 速度沿轴向变化就变得缓慢, 这可以控制二次回流. 类似地, 还可讨论其他外场的影响.

当然, 用有限亨克变换可求出两个同心圆柱间 ($R_0 > 0, R$ 有限) 的定常流动解

$$v_\theta(r, z) = \frac{2j_0 B_0 a}{c\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_1^2(\gamma_n R)}{J_1^2(\gamma_n R) - J_1^2(\gamma_n R_0)} \left[1 - \frac{\text{ch}(\gamma_n z)}{\text{ch}(\gamma_n L)} \right] \varphi_n(r) \quad (14)$$

其中 $\varphi_n(r) = J_1(\gamma_n r) Y_1(\gamma_n R_0) - J_1(\gamma_n R_0) Y_1(\gamma_n r)$, 特征根 γ_n 的定义为 $\varphi_n(R) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 可以进行类似的流场分析.

最后讨论有限圆柱的非定常运动. 为求解此问题, 相继作亨克变换和拉普拉斯变换:

$$V_n(t, z) = \int_0^R v_\theta(t, r, z) r J_1(\gamma_n r) dr \quad (15)$$

$$\tilde{V}_n(p, z) = \int_0^\infty e^{-pt} V_n(t, z) dt \quad (16)$$

经过求解和反演变换后, 不难导出

$$v_\theta(t, r, z) = \frac{2j_0 B_0 a}{c\eta R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_1(\gamma_n a) J_1(\gamma_n r)}{[J_1'(\gamma_n R)]^2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \left[1 - \frac{\text{ch}(\beta_n z)}{\text{ch}(\beta_n L)} \right] \frac{e^{pt} dp}{p\beta_n^2} \quad (17)$$

其中 $\beta_n^2 = \gamma_n^2 + \rho p/\eta$, 而 γ_n 为满足 $J_1(\gamma_n R) = 0$ 的特征根. $L \rightarrow \infty$ 时上式化为

$$\lim_{L \rightarrow \infty} v_\theta(t, r, z) = \frac{2j_0 B_0 a}{c\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_1(\gamma_n a) J_1(\gamma_n r)}{(\gamma_n R)^2 [J_1'(\gamma_n R)]^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\rho/\eta \gamma_n^2}\right) \right] \quad (18)$$

由式(18)的指数衰减项可估计出起动加速过程的特征时间, 其量级为

$$\tau \approx \rho/\gamma_1^2 \eta = 0.06812 \rho R^2/\eta \quad (19)$$

讨论式(18)的加速过程. 取 $r = a$, 两个典型剖面的计算结果如图 4 所示. 起动过程中旋转速度的折叠时间可由图 4 得到, 定量地有

$$\tau \approx 0.02 \rho R^2/\eta \quad (20)$$

在[7]的实验装置中, $R \approx 5\text{cm}$, $\rho \approx 10^{-4}\text{g/cm}^3$, $\eta \approx 1 \times 10^{-4}\text{g/cm}\cdot\text{s}$, 这时式(20)给出

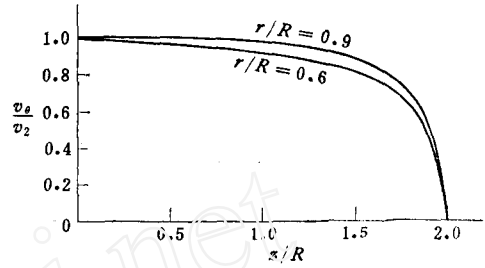


图 3 旋转速度的轴向分布, 特征速度 $v_2 = v_\theta(r, 0)$, 而 $\frac{a}{R} = 0.8, \frac{L}{R} = 2$

起动过程的特征时间约为

$$\tau = 0.5s \quad (21)$$

在实验[7]中,起动后 0.25s 放电,0.25—0.35s 外加磁场,0.5s 停止运转. 实际加速时间只有 0.15—0.25s,不及式(21)的一半. 显然,在停止实验的时候旋转速度正在迅速增加的过程中. 在具体实验过程中,选择 $\tau = (0.05—0.1)(\rho R^2/\eta)$ 是比较合适的.

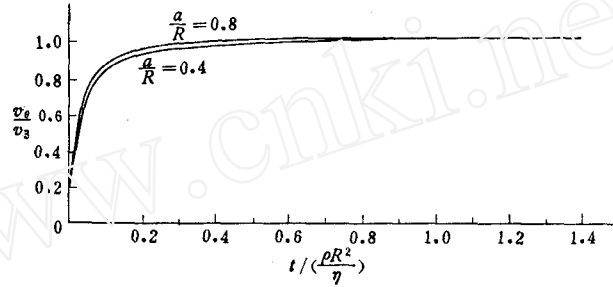


图 4 旋转速度的加速过程,其中 $v_z = v_\theta(\infty, a, 0)$, $\frac{L}{R} \gg 1$

通过以上分析,可以得到以下主要结论. 1. 薄层放电模型中,转速在薄层内的均匀刚性分布只在边界无限延伸时才严格成立,有限边界时只是近似成立. 2. 薄层放电时,放电层的环电极位置并非越靠外越好. 若取 $(a/R) \approx 0.7$,则较适宜. 3. 轴向边界层所造成的二次流,可通过外加磁场的径向分量沿轴向衰减的方法控制. 4. 对短时间运转的薄层放电实验装置,起动加速的时间最好选择 $\tau = 0.05—0.1(\rho R^2/\eta)$,或者更长一些.

参 考 文 献

- [1] Hunt, J. C. R., *J. Fluid Mech.*, 31 (1968), 705.
- [2] Lord, W. T., Some magneto-fluid-dynamic problems involving electric arc, 引自 Fluid Dynamic Transactions, Fiszson, W. 编, Vol. 2 (1965), 183.
- [3] Emmons, H. W., Experiment on high pressure plasma, 引自 Proc. 11th Inter. Cong. Appl. Mech. (1966), 933.
- [4] Gross, R. A., *AIAA J.*, 2 (1964), 295.
- [5] Johnson, K. P., *AIAA J.*, 4 (1966), 635.
- [6] Bronuevier, B., *Plasms Phys.*, 13 (1971), 763.
- [7] Lehnert, B., *Phys. Scripta*, 7 (1973), 102.
- [8] Love, W. L., Park, C., *AIAA J.*, 8 (1970), 1377.
- [9] Love, W. L., Park, C., Gas-core nuclear rocket with fuel separation by MHD-driven rotation, 引自 Res. Uranium Plasma And Their Technological Application, Thom, K., Schneider, R. T. 编, NASA (1971), 139.

ANALYSIS OF MHD FLOW FOR DISCHARGE IN A SHEET

Hu Wen-rui

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)