第20卷 第3期 天 文 学 报 Vol. 20, No. 3
1979年9月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Sep., 1979

盘状星系的三维基态*

徐 建 军
（中国科学院力学研究所）

提 要

本文从流体动力学模型出发，引用星盘曲线坐标系，求解了有限厚度盘状星系的三维基态，在薄盘条件（$\varepsilon \ll 1$）下，求得了零级近似、一级近似的解析解，过程十分简明. 在附录中，给出了一般的非对称的泊松方程解式.

一、问题的数学提法及无量纲方程

我们采用以自引力“气盘”模拟星盘的简化做法. 以气体“压力”模拟湍流应力；以气体的“等效声速”模拟恒星的弥散速度，基本方程组乃由连续方程、流体动力学方程及引力势泊松方程组成. 设星系总质量为 M，物质由于引力吸引及离心力，“压力”与之抗衡集中分布于一个有限厚的盘状区域：$0 \leqslant r' \leqslant R$；$\delta = \delta(r)$；$\varepsilon = \frac{\delta}{R} \ll 1$. 采用星盘曲线正交坐标系 (r', θ, z') 如图1，其中坐标面 $z' = \text{const}$ 是一族平行于星盘边界的曲面. 再以 $(M, G, R, \delta(r))$ 作为特征量，将所有物理量无量纲化，从而得：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{特征速度}\quad V_0 = \left(\frac{4\pi GM}{R}\right)^{1/2}.\\
&\text{半径、高度、时间}\quad r' = Rr,\ z' = \delta(r)\cdot z,\ t' = \left(\frac{R}{V_0}\right)t.\\
&\text{体、面密度}\quad \rho' = \left(\frac{M}{R^3}\right)\rho;\ \sigma'(r) = \left(\frac{M}{R^2}\right)\sigma(r).\\
&(r', \theta, z')\text{各方向速度分量}\quad (u', v', w') = V_0(u, v, w).\\
&(r', \theta, z')\text{各方向的等效声速}\quad a_r'^2 = M_r^2V_0^2a_r^2;\ a_\theta'^2 = M_\theta^2V_0^2a_\theta^2,\ a_z'^2 = M_z^2V_0^2a_z^2.\\
&\text{倒马赫数}\quad M_r^2 = \frac{a_r^{*2}}{V_0^2};\ M_\theta^2 = \frac{a_\theta^{*2}}{V_0^2};\ M_z^2 = \frac{a_z^{*2}}{V_0^2},\\
&(\text{其中 } a_r^*, a_\theta^*, a_z^* \text{ 为各方向的典型值}).\\
&\text{引力势}\quad \psi' = \left(\frac{4\pi GM}{R}\right)\psi.
\end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

首先假定星盘的形状曲线变化平缓 $\left(\left|\frac{d\ln\delta(r)}{dr}\right| \ll 1\right)$，忽略由于曲线坐标变换所产生的拉米系数中的附加小量，得出如下无量纲基本方程组：

* 1978年4月7日收到.

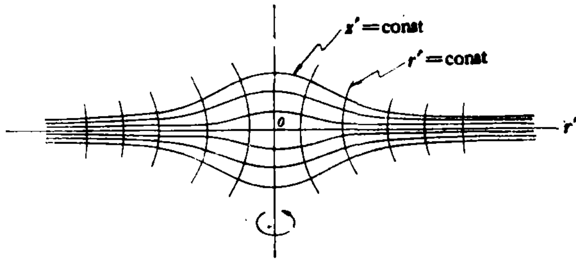

图 1　星盘曲线坐标系示意图

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v)}{\partial\theta}+\frac{\rho u}{r}\right)+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0,\\
&\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{v^2}{r}\right)+w\frac{\partial u}{\partial z}+\varepsilon\left(M_r^2a_r^2\frac{\partial\ln\rho}{\partial r}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0,\\
&\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{uv}{r}\right)+w\frac{\partial v}{\partial z}+\varepsilon\left(\frac{M_\theta^2a_\theta^2}{r}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)=0,\\
&\varepsilon\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+w\frac{\partial w}{\partial z}+M_z^2a_z^2\frac{\partial\ln\rho}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,\\
&\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\rho\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(1.2)$$

其次考虑到盘的边界厚度 δ 是由于 z 方向的弥散速度抵抗了引力坍缩而得以维持的，若 $M_z\to0$，则必有 $\delta\to0$。因此可取 $M_z^2=\varepsilon=\dfrac{Ra_z^{*2}}{4\pi GM}$. 最后考虑定常、轴对称基态，认为没有从星系中心向外的物质流，这样由 (1.2) 便得出

$$\frac{v^2}{r}=M_r^2a_r^2\frac{\partial\ln\rho}{\partial r}+\frac{\partial\psi}{\partial r},\tag{1.3$_1$}$$

$$0=\varepsilon a_z^2\frac{\partial\ln\rho}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z},\tag{1.3$_2$}$$

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\rho\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0.\tag{1.3$_3$}$$

投影面密度由如下无量纲关系式确定，

$$\sigma(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\rho dz.\tag{1.4}$$

边界条件：

1. 无穷远条件：当 $r\to\infty$；$|z|\to\infty$ 时，$\rho,\ \psi\to0$；　(1.5)

2. 对称面上条件：

(1) $\psi,\ \rho|_{z=0^+}=\psi,\ \rho|_{z=0^-}$；$\dfrac{\partial\rho}{\partial z}=\dfrac{\partial\psi}{\partial z}=0$；　(1.6)

(2) $\left.\dfrac{v^2}{r}\right|_{z=0}=f|_{z=0}$ 为已知函数；　(1.7)

或 $\sigma(r)$ 为已知函数；　(1.8)

或 $\rho(r,z)|_{z=0}=\rho(r,0)$ 为已知函数。　(1.9)

二、泊松方程解及其展开式

在边界条件 (1.5)、(1.6) 下，泊松方程的解为：当 $z>0$ 时，

$$\psi(r,z)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\varepsilon k|z-z_1|}\varepsilon\rho(r_1z_1)dz_1\right]r_1J_0(kr_1)J_0(kr)dr_1dk_1; \qquad (2.1)$$

当 $z<0$ 时，

$$\psi(r,z)=\psi(r,-z);\ \rho(r,z)=\rho(r,-z). \qquad (2.2)$$

根据盘状星系基态的物理特征，特作如下假定：当 $r\to\infty$, $|z|\to\infty$ 时，物质密度充分快，足够光滑地趋于零，以致满足下列数学条件：

1. 对任意小的正数 δ_1，只要 r^* 充分大，对任意的 (k,z) 一致地成立不等式

$$\left|\int_{r^*}^\infty(\varepsilon\rho)rJ_0(kr)dr\right|<\delta_1; \qquad (2.3)$$

2. 对任意小正数 δ_2，只要 k^* 充分大，对任意的 (N,r,z) 一致地成立不等式

$$\frac{1}{N!}\left|\int_{k^*}^\infty k^NP(k,z)J_0(kr)dk\right|<\delta_2, \qquad (2.4)$$

其中：

$$P(k,z)=\int_0^\infty(\varepsilon\rho)rJ_0(kr)dr. \qquad (2.5)$$

在这些假设下，解式 (2.1) 可展开为

$$\phi(r,z)=-\frac{1}{2}\sum_{N=0}^\infty\frac{\varepsilon^N}{N!}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{+\infty}k^N|z-z_1|^N(\varepsilon\rho)dz_1\right]r_1J_0(kr_1)J_0(kr)dr_1dk. \qquad (2.6)$$

三、星盘的三维基态解

现在转入方程 (1.3) 的求解．由于参数 $\varepsilon\ll1$，可将诸量展成 ε 的幂级数．即：

$$\begin{cases}\varepsilon\rho=\rho_0+\varepsilon\rho_1+\varepsilon^2\cdot\rho_2+\cdots,\\ \sigma=\sigma_0+\varepsilon\sigma_1+\varepsilon^2\sigma_2+\cdots,\\ \sigma_K=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_Kdz,\\ \psi=\psi_0+\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2+\cdots,\\ f=\dfrac{v^2}{r}=f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2f_2+\cdots.\end{cases} \qquad (3.1)$$

这样，由 (1.3) 及 (2.6) 便可得出各级近似方程．

1. 零级近似　我们得到：

$$\psi_0=-\frac{1}{2}\int_0^\infty s_0(k)J_0(kr)dk;\quad s_0(k)=\int_0^\infty\sigma_0(r)rJ_0(kr)dr; \qquad (3.2)$$

$$f_0=M_r^2a_r^2\frac{\partial\ln\rho_0}{\partial r}+\frac{\partial\psi_0}{\partial r}. \qquad (3.3)$$

再令

$$\varphi_0=\frac{\rho_0(r,z)}{\rho_0(r,0)};\quad \alpha=\frac{\rho_0(r,0)}{a_z^2},\tag{3.4}$$

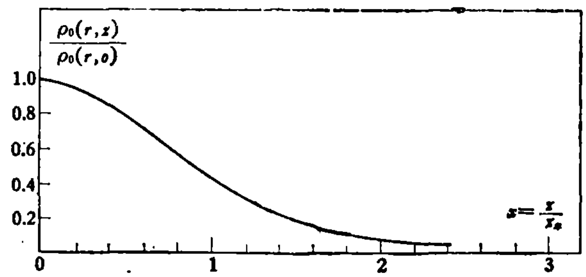

图 2　零级近似相对密度函数 $\varphi_0(x)$ 沿高度的分布

则导出密度分布方程

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\ln\varphi_0}{dz^2}+\alpha\varphi_0=0;\\ \varphi_0(0)=1;\ \varphi_0(\infty)=0.\end{cases}\tag{3.5}$$

其解为:

$$\varphi_0(z)=\mathrm{sech}^2\left(\frac{z}{z_*}\right);\quad z_*=\sqrt{\frac{2}{\alpha}}.\tag{3.6}$$

投影面密度:

$$\sigma_0(r)=2\int_0^\infty\rho_0dz=2\rho_0(r,0)\int_0^\infty\varphi_0(z)dz=2z_*\rho_{00}.\tag{3.7}$$

这里可设 $\alpha=\text{const.}$，而 z_* 是星盘的无量纲特征厚度．有量纲的星盘边界形状曲线为:

$$z'=Rz_*\varepsilon=z_*R\frac{\alpha a_z'^2}{\rho_{00}U^2},\tag{3.8}$$

因此，只要已知 $\rho_{00}(r)=\rho_0(r,0)$ 以及弥散速度 $a'_z(r)$，那么星盘的边界形状便确定了．图 2 中画出了 $\varphi_0(x)$ 的分布曲线，此结果与前人结果是一致的．为了确定迴转曲线，可利用 (3.2)、(3.3) 式，在其中令 $z=0$，便得到:

$$f_0|_{z=0}=M_r^2a_r^2\frac{d\ln\sigma_0}{dr}-\frac{1}{2}\frac{dg_0}{dr},\tag{3.9}$$

其中

$$g_0(r)=\int_0^\infty s_0(k)J_0(kr)dk.\tag{3.10}$$

2. 一级近似　类似于前面，我们有:

$$\psi_1=-\frac{1}{2}\int_0^\infty s_1(k)J_0(kr)dk+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|z-z_1|\rho_0dz_1;\tag{3.11}$$

$$s_1(k)=\int_0^\infty\sigma_1(r)rJ_0(kr)dr;\tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}=\rho_1-\frac{1}{2}\int_0^\infty k^2s_0(k)J_0(kr)dk;\tag{3.13}$$

$$f_1=M_r^2a_r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)+\frac{\partial\psi_1}{\partial r}.\tag{3.14}$$

再令

$$\phi_1(z) = \frac{a_z^2}{C(r)}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right), \quad C(r) = \frac{1}{2}\int_0^\infty k^2 s_0(k) J_0(kr) dk, \tag{3.15}$$

我们得密度分布方程

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi_1}{dz^2} + \alpha\varphi_0\phi_1 = 1; \\ \phi_1'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

如果我们取边界条件 (1.8)，给定 $\sigma = \sigma_0(r)$ 为已知函数，那么

$$\sigma_1(r) = \sigma_2(r) = \cdots = 0. \tag{3.17}$$

由此便得出方程 (3.16) 的第二个定解条件

$$\int_0^\infty \varphi_0\phi_1 dz = 0. \tag{3.18}$$

若记

$$x = \frac{z}{z_*}; \quad \frac{\alpha}{2}\phi_1(x) = Y(x), \tag{3.19}$$

则由 (3.16)，(3.18) 我们得出通解：

$$Y(x) = C_1 \operatorname{th} x + C_2(1 - x\operatorname{th} x) + \left[\operatorname{th}x \int_0^x (1 - x_1 \operatorname{th} x_1) dx_1 \right.$$
$$\left. - (1 - x\operatorname{th} x)\int_0^x \operatorname{th} x_1 dx_1\right], \tag{3.20}$$

并且积分常数为

$$C_1 = 0; \; C_2 = Y(0) = -0.705. \tag{3.21}$$

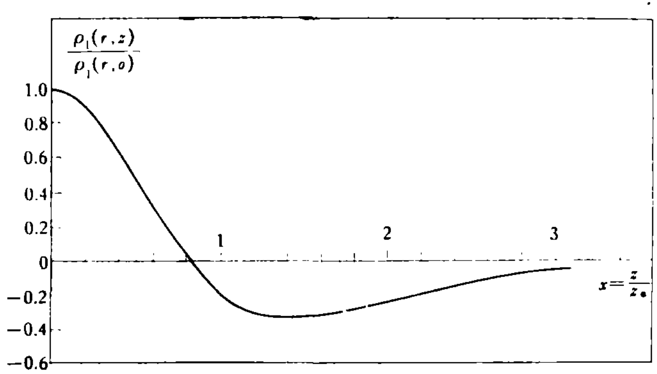

图 3 一级近似相对密度函数 (ρ_1/ρ_{10}) 沿高度的分布

最后得到

$$\begin{cases} \rho_1(r, x) = 2C(r)\varphi_0(x)Y(x); \\ \rho_1(r, 0) = -1.41 C(r); \\ \dfrac{\rho_1(r, x)}{\rho_1(r, 0)} = \dfrac{\varphi_0(x)Y(x)}{Y(0)}, \end{cases} \tag{3.22}$$

而对称面上引力势的一级近似解为

$$\phi_1|_{z=0} = \int_0^\infty z\rho_0 dz = \rho_{00}\int_0^\infty z\varphi_0(z)dz = \frac{\ln 2}{\sqrt{2\alpha}}\sigma_0(r), \tag{3.23}$$

从而

$$f_1|_{z=0} = -\frac{4M_r^2a_r^2}{\sqrt{\alpha}}\frac{d}{dr}\left(\frac{C(r)}{\sigma_0(r)}\right) + \frac{\ln 2}{\sqrt{2\alpha}}\frac{d\sigma_0}{dr}. \tag{3.24}$$

为了给出具体解式，我们假定 $\sigma_0(r)$ 具有 Toomre 给出的形式，即

$$\begin{cases} \sigma_0^{(0)} = \dfrac{C}{(a^2+r^2)^{1/2}}; \\ \dfrac{dg_0^{(0)}}{dr} = \dfrac{C}{r}\left[\dfrac{a}{(a^2+r^2)^{1/2}} - 1\right] \end{cases} \tag{3.25}$$

以及

$$\sigma_0^{(N+1)} = \left|\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^N \frac{Ca}{(a^2+r^2)^{3/2}}\right| \quad (N=0, 1, 2, \cdots). \tag{3.26}$$

相应地，

$$\begin{cases} s_0^{(N+1)}(k) = |Ck^N e^{-ak}|; \\ g_0^{(N+1)}(r) = \displaystyle\int_0^\infty s_0^{(N+1)} J_0(kr)dk = \sigma_0^{(N)}(r); \\ C^{(N+1)}(r) = \dfrac{1}{2}\sigma_0^{(N+2)}(r). \end{cases} \tag{3.27}$$

所以导出

$$\begin{cases} f_0^{(N+1)}|_{z=0} = M_r^2a_r^2\dfrac{d}{dr}\ln\sigma_0^{(N+1)}(r) - \dfrac{1}{2}\dfrac{d\sigma_0^{(N)}}{dr}; \\ f_1^{(N+1)}|_{z=0} = -\dfrac{2M_r^2a_r^2}{\sqrt{\alpha}}\dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{\sigma_0^{(N+2)}}{\sigma_0^{(N+1)}}\right] + \dfrac{\ln 2}{\sqrt{2\alpha}}\dfrac{d\sigma_0^{(N+1)}}{dr}. \end{cases} \tag{3.28}$$

对于“冷盘”，$M_r^2a_r^2 \approx 0$，则有

$$f^{(N+1)}|_{z=0} = -\frac{d\sigma_0^{(N)}}{dr} + \varepsilon\frac{\ln 2}{\sqrt{2\alpha}}\frac{d\sigma_0^{(N+1)}}{dr} + O(\varepsilon^2), \tag{3.29}$$

而密度沿高度的分布

$$\varepsilon\rho^{(N+1)}(r, z) = \left[\sqrt{\frac{\alpha}{8}}\sigma_0^{(N+1)}(r) + \varepsilon\sigma_0^{(N+2)}(r)Y(x)\right]\operatorname{sech}^2 x + O(\varepsilon^2). \tag{3.30}$$

显然，当 $\varepsilon \to 0$ 时，便退化为 Toomre 无限薄盘的结果.

本文曾得谈镐生教授的宝贵意见及指导，并与胡文瑞同志进行过多次有益的讨论，在此一并致谢.

附录　泊松方程的一般非轴对称解

考虑上半空间，首先对 z 作 Laplace 变换，令

$$\begin{cases} L[\rho(r, \theta, z)] = \displaystyle\int_0^\infty e^{-sz}\rho(r, \theta, z)dz = \Lambda(r, \theta, s); \\ L[\phi(r, \theta, z)] = \displaystyle\int_0^\infty e^{-sz}\phi(r, \theta, z)dz = \Gamma(r, \theta, s). \end{cases} \tag{A1}$$

由方程得出

$$\varepsilon^2\Delta[\Gamma] + s\Gamma = s\phi_{0^+} + \varepsilon^2\Lambda, \tag{A2}$$

其中微分算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \tag{A3}$$

为求解,先考察辅助方程

$$\begin{cases}\Delta U+k^2U=0,\\ U(r,\theta)|_{r\to\infty}=0;\ U(r,\theta+2\pi)=U(r,\theta).\end{cases} \tag{A4}$$

其正则解为

$$U_m(r,\theta,k)=J_m(kr)\Theta_m(\theta)\quad(m=0,1,2,\cdots),$$

其中 $J_m(kr)$ 为 m 阶 Bessel 函数; $\Theta_m(\theta)$ 为正交归一三角函数系. 利用 Hankel 积分定理,我们作如下展开式:

$$\Gamma(r,\theta,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma_m(r,s)\Theta_m(\theta), \tag{A5}$$

$$\begin{cases}\Gamma_m(r,s)=\int_0^\infty kC_m(s,k)J_m(kr)dk;\\ C_m(s,k)=\int_0^\infty r\Gamma_m(r,s)J_m(kr)dr.\end{cases} \tag{A6}$$

代入方程 (A2), 便可解出 $C_m(s,k)$. 然后再作 Hankel 逆变换及 Laplace 逆变换, 并利用边界条件 (1.5), 便可得出解式:

$$\phi(r,\theta,z)=-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\Theta_m(\theta)\left\{\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\varepsilon k|z-z_1|}\varepsilon g_m(k,z_1)dz_1\right]J_m(kr)dk\right\}, \tag{A7}$$

$$(0<z<\infty)$$

其中

$$\begin{cases}g_m(k,z)=\int_0^\infty\int_{-\pi}^{+\pi}r\rho(r,\theta,z)J_m(kr)\Theta_m(\theta)d\theta dr;\\ \Theta_m(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad(m=0);\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin m\theta\ 或\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\theta\quad(m>0).\end{cases}\end{cases} \tag{A8}$$

特别,对于轴对称情形,就是文中 (2.1) 式.

参 考 文 献

[1] Toomre, A., *Ap. J.*, **138** (1963), 385.
[2] Hunter, C., *Annual Review in Fluid Mechanics*, 4 (1972), 219.
[3] Vandervoort, P. O., *Ap. J.*, **161** (1970); **158** (1967).

ON THE BASIC STATE OF DISK GALAXY WITH FINITE THICKNESS

Xu Jian-jun

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

This paper deals with the steady basic state of disk galaxy with finite thickness. A hydrodynamical model is adopted. In terms of the small parameter $\varepsilon = \frac{\delta}{R}$, the solutions in zero'th order and first order of approximation are obtained. These results will be used in the further studying 3-dimensional density wave of disk galaxy. In the appendix the general analytical solution of Poisson's equation is derived.