不稳定腔的本征值与本征函数*

中国科学院力学研究所　陈嗣熊

提要　本文证明了不稳定谐振腔的本征值与本征函数的存在性，并证明了不稳定腔的本征值与本征函数组成可数的无穷序列；同时，指出了文献[1]所提出的 ε 近似本征值与 ε 近似本征函数的概念并不能真实反映实际不稳定谐振腔的损失与场分布，并指出了有限镜面不稳定谐振腔是具有选模特性的.

稳定谐振腔的模式理论已经有了较完善的数学基础[2]. 随着高速流动激光器的发展，具有大的模体积与好的模式控制等优点的不稳定腔已被广泛采用. 可是，至今尚无满意的不稳定腔数学理论. 虽然对于圆与长方镜面的不稳定腔已作了不少数值计算[3—5]，但方法仅适用于较小的 Fresnel 数.

由于不稳定腔的积分方程的核是非 Hermite 的，这给不稳定腔模式的理论研究带来一定困难. 正如文献[1]指出的，它使不稳定腔的本征值与本征函数的是否存在产生疑问. 为此，文献[1]引入了 ε 近似本征值与 ε 近似本征函数的概念，希望利用这一概念来研究不稳定腔模的存在性与本征值的特点. 文献[1]利用 ε 近似本征值与 ε 近似本征函数的概念，指出了对于大 Fresnel 数，不稳定腔的损失可以做到任意小，且不稳定腔失去了选模的能力(因为满足 $|\lambda|=1$ 的 λ 皆是不稳定腔的 ε 近似本征值). 这些结论显然与文献[6]的结果相矛盾，也与 Siegman 等[4]所提出的不稳定腔在选模上的优点相矛盾.

一、不稳定腔的本征值与本征函数的存在性

对于矩形对称的不稳定谐振腔，模式的本征方程在直角坐标系下，可以分解成两个形式相同的一维方程. 设本征函数可以写成

$$\phi(x, z)=u(x)v(z)$$

这里 $u(x)$, $v(z)$ 满足形式相同的积分方程

$$\gamma_x u(x)=(iF)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1} e^{-i\pi F[g(x^2+y^2)-2xy]}u(y)\,dy \tag{1}$$

这里 $g=2g_1g_2-1$, $F=F_1/(2g_2)$, $g_i=1-(L/R_i)(i=1, 2)$, R_1, R_2 分别为镜 A_1 与 A_2 的曲率半径，L 为镜 A_1 与 A_2 间的距离，F_1 是镜 A_1 的 Fresnel 数. 令

$$g(x)=e^{i\pi F_{eq}x^2}u(x)$$

这里 $F_{eq}=\dfrac{1}{2}\left(M-\dfrac{1}{M}\right)$, F_{eq} 为等效 Fresnel 数，M 为不稳定腔的放大倍数(对于非对称腔，$M=M_1M_2$). 这样，积分方程(1)成为

* 1978 年 1 月 25 日收到.

$$\gamma g(x) = (iF)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{1} e^{-i\pi FM(y-x/M)^2} g(y)\, dy \tag{2}$$

它对对称的与非对称的谐振腔都适用．显然，积分方程（2）属于 Fredholm 第二类积分方程．文献[7]证明了激光器的积分方程的基本定理．

基本定理　设核 $K(x, y)$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ 上，对任何一个变量是指数 $\alpha > 1/2$ 的 Hölder 连续，则如果 K 的迹不等于零，Fredholm 第二类齐次积分方程

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) g(y)\, dy \tag{3}$$

至少存在一个本征值与本征函数．

文献[7]也指出，如果积分方程（3）的 Fredholm 行列式 $D(\lambda)$ 所构成的整函数的阶 μ 满足 $0 < \mu < 1$，则可以断言方程(3)存在可数无穷多个本征值与本征函数．

积分方程(2)的核为

$$K(x, y) = (iF)^{\frac{1}{2}} e^{-i\pi MF(y-x/M)^2} \tag{4}$$

显然，核(4)在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 上，对任何变量都有连续的偏导数，且偏导函数在 $[-1, 1; -1, 1]$ 上有界，故核(4)满足 $\alpha = 1$ 的 Lipschitz 条件[7]

$$|K(x, y_2) - K(x, y_1)| < A|y_2 - y_1| \tag{5}$$

这里 A 为某常数．这一点也可以直接把式(4)代入式(5)的左边，把实部虚部分开，利用三角不等式，并分别对实部与虚部用实变量函数的微分中值定理进行验证．现在来看核(4)的迹

$$T = \int_{-1}^{1} K(x, x)\, dx = \int_{-1}^{1} (iF)^{\frac{1}{2}} e^{-i\pi MF(x-x/M)^2} dx$$

$$= (iF)^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-1}^{1} \cos \pi MF \left(1 - \frac{1}{M}\right)^2 x^2\, dx - i \int_{-1}^{1} \sin \pi MF \left(1 - \frac{1}{M}\right)^2 x^2\, dx \right]$$

我们只要能证明方括弧中的实部或虚部不为零，则 T 就恒不等于零．事实上，令

$$B = \pi MF \left(1 - \frac{1}{M}\right)^2$$

则方括弧中的虚部为

$$-\int_{-1}^{1} \sin \pi MF \left(1 - \frac{1}{M}\right)^2 x^2\, dx = -2 \int_0^1 \sin \pi MF \left(1 - \frac{1}{M}\right)^2 x^2\, dx$$

$$= -\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{M}\right)\sqrt{\pi MF}} \int_0^B \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy$$

设 $n\pi < B \leqslant (n+1)\pi$, n 为零或某正整数，则

$$\int_0^B \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy + \int_{n\pi}^{B} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy$$

显然，当 k 等于偶数时

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy > 0$$

而当 k 等于奇数时

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy < 0$$

且恒有

$$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy\right| > \left|\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy\right|, \quad [k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)]$$

$$\left|\int_{n\pi}^{B} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy\right| \leqslant \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy\right|$$

故恒有

$$\int_{0}^{B} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy > 0$$

因此，证明了核(4)的迹 $T \neq 0$. 由基本定理，积分方程 (2) 至少存在一本征值与本征函数. 文献[7]指出了整函数 $D(\lambda)$ 的阶 μ 满足

$$\mu < 1/[\alpha + (1/2)]$$

由于核(4)满足 Lipschitz 条件 (5)，故 $\alpha = 1$、μ 满足 $0 < \mu < 1$，因此，积分方程(2)存在可数无穷多个本征值与本征函数.

文献[1]估计，积分方程(2)的本征函数如果存在的话，可能也是非常稀疏的. 由本文的证明看到，这一结论是不正确的. 积分方程(2)的本征函数有可数无穷多个.

二、不稳定腔的本征值

当谐振腔的二镜面尺度都为∞时，模式满足的积分方程可写成

$$\gamma u(x) = \sqrt{\frac{i}{\lambda L}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\pi}{\lambda L} M\left(y - \frac{x}{M}\right)^2} u(y)\, dy \tag{6}$$

假定 $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2 dx$ 存在，将式(6)两边取共轭复数，将所得式子的两边乘式 (6)，并对 x 在$(-\infty, +\infty)$上取积分，可得

$$\gamma\gamma^* \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) u^*(x)\, dx = \frac{1}{\lambda L} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\pi}{\lambda L} M\left(y - \frac{x}{M}\right)^2} \cdot e^{i\frac{\pi}{\lambda L} M\left(y' - \frac{x}{M}\right)^2} u(y) u^*(y')\, dy\, dy'\, dx$$

经整理得

$$\gamma\gamma^* \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) u^*(x)\, dx = \frac{1}{\lambda L} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda L} x(y'-y)} dx\right] e^{-i\frac{\pi}{\lambda L} M(y^2 - y'^2)} u(y) u^*(y')\, dy\, dy' \tag{7}$$

由于

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x'-x)} dt = \delta(x' - x)$$

故

$$\frac{1}{\lambda L} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi}{\lambda L} x(y-y')} dx = \delta(y - y')$$

把它代入式(7)，得

$$\gamma\gamma^*\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y-y')e^{-i\frac{\pi}{\lambda L}M(y^2-y'^2)}u(y)u^*(y')\,dy\,dy'$$

故

$$\gamma\gamma^*=1$$

即当镜面尺度为∞时，本征值 γ 的模等于 1．对于有限镜面的不稳定腔，一般都有衍射损失，因而有 $|\gamma|<1$，并应该具有选模特性．文献[1]的结果指出，当 Fresnel 数充分大时，满足 $|\gamma|=1$ 的每一 γ 都是方程(2)的 ε 近似本征值，因而谐振腔失去选模能力．这一结论显然与不稳定腔的特点[4]相矛盾．

三、对 Landau 结果[1]的讨论

令

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(2\pi iF)^{\frac{1}{2}}e^{-i\pi MF(y-x)^2}g(y)\,dy$$

文献[1]用 Fourier 变换的方法证明了，当 Fresnel 数很大时，恒有

$$h(x/M)=M^{-\frac{1}{2}}g(x/M)+e(x/M)\tag{8}$$

这里 $e(x)$ 满足：对于任意小的正数 ε，只要 Fresnel 数 F 充分大，就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|e(x)|^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{4M}$$

这表示，当 Fresnel 数充分大时，对不稳定腔可以采用 Siegman 等[4]所提出的几何近似．文献[6]用积分对 Fresnel 数的渐近展开亦证明了类似的结论． 但 Landau 的结果并不要求 $g(x)$ 为慢变函数．若采用 Landau 提出的 ε 近似本征值与 ε 近似本征函数的概念，显然，当 F 很大时，$e(x/M)$ 完全可以忽略．文献[1]证明了当 $|\lambda|=1$ 时，对于任意小的正数 ε，可以找到函数 $g(x)$，使

$$\int_{-1}^{1}\left|M^{-\frac{1}{2}}g\left(\frac{X}{M}\right)-\lambda g(x)\right|^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{4}\tag{9}$$

得到满足．由此，文献[1]得出结论：当 F 充分大时，对任意满足 $|\lambda|=1$ 的 λ 都是方程(2)的 ε 近似本征值，因而谐振腔失去选模能力．

但是，若不采用 ε 近似本征值与 ε 近似本征函数的概念，而直接在几何近似下［即在(8)中忽略 $e(x/M)$ 项］，用原始本征值与本征函数的定义，则由式(8)得

$$\lambda g(x)=M^{-\frac{1}{2}}g(x/M)\tag{10}$$

由式(10)可得

$$g(x/M)=\lambda^{-1}M^{-\frac{1}{2}}g(x/M^2)$$

把它代入式(10)，得

$$g(x)=(\lambda^{-1}M^{-\frac{1}{2}})^2g(x/M^2)\tag{11}$$

继续由式(11)求出 $g(x/M)$ 的表达式，代入式(10)，可得

$$g(x)=(\lambda^{-1}M^{-\frac{1}{2}})^3g(x/M^3)$$

以此类推，最后可得

$$g(x)=(\lambda^{-1}M^{-\frac{1}{2}})^ng(x/M^n)\tag{12}$$

这里 n 为任意正整数．设 $|\lambda|=1$ 且 $g(x)$ 在［-1, 1］上连续，则由式(12)得

$$|g(x)|=M^{-\frac{n}{2}}|g(x/M^n)|$$

由于 $M > 1$，$g(x)$ 连续，故对任意 x，令 $n \to \infty$，都有

$$|g(x)| \equiv 0$$

故

$$g(x) \equiv 0$$

这就证明了 $|\lambda| = 1$ 的 λ，不可能是几何近似本征方程(10)的本征值．这也说明了，当 F 很大时，不稳定腔还有衍射损失．它应该还具有选模能力．但文献[1]却得到当 $|\lambda| = 1$ 时，可找到 $g(x)$ 使式(9)成立．这说明 ε 近似本征值与 ε 近似本征函数的概念，并不能真实反映谐振腔的损失与模．事实上，文献[1]在找 $g(x)$ 时，引入了函数 $g_0(y)$．它满足：$g_0(y) = 0$，当 $y \leqslant M^{-1}$ 或 $y > 1$ 时；且当 y 在 $[M^{-1}, 1]$ 中时，有

$$\int_{M^{-1}}^{1} |g_0(y)|^2 dy = \frac{1}{J} \quad (J \text{ 是正整数})$$

对于任意小的正数 ε，文献[1]使 J 满足

$$1/J < \varepsilon^2/4 \tag{13}$$

令

$$g(y) = \sum_{k=0}^{J-1} \lambda^k M^{\frac{k}{2}} g_0(M^k y)$$

这里 $|\lambda| = 1$，由此

$$\int_{\frac{1}{M^J}}^{\frac{1}{M^{J-1}}} |g(y)|^2 dy = \int_{\frac{1}{M^J}}^{\frac{1}{M^{J-1}}} M^{J-1} |g_0(M^{J-1} y)|^2 dy = \int_{\frac{1}{M}}^{1} |g_0(x)|^2 dx = \frac{1}{J} \tag{14}$$

由函数 $g_0(y)$ 的定义，显然有 $g(0) = 0$．假定函数 $g(y)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续，则由式(14)得

$$|g(\bar{y})|^2 = \frac{1}{J}\left[1 \Big/ \left(\frac{1}{M^{J-1}} - \frac{1}{M^J}\right)\right] = M^{J-1} \Big/ \left[\left(1 - \frac{1}{M}\right) J\right] \tag{15}$$

这里 $1/M^J \leqslant \bar{y} \leqslant 1/M^{J-1}$．当 $\varepsilon \to 0$ 时，由式(13)，$J \to \infty$，因此 $\bar{y} \to 0$，故由式(15)

$$|g(0)| = \infty$$

因此，这样求得的 ε 近似本征函数 $g(y)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，在 $y = 0$ 点有第二类间断点，因而并非我们所要求的本征函数．这说明对于不稳定腔的积分方程(2)，ε 近似本征值与 ε 近似本征函数的概念，并不能实际反映谐振腔的损失与场分布． 事实上，还必须要求，当 $\varepsilon \to 0$ 时，ε 近似本征值 λ_ε 与 ε 近似本征函数 $g_\varepsilon(x)$ 的极限存在，且极限函数 $g(x)$ 连续．因此，我们认为文献[1]的结论并不反映实际不稳定腔的特点．

参 考 文 献

[1] Landau, H. J., *J. Opt. Soc. Am.*, 66 (1976), 525.
[2] Kogelnik, H. and Li, T., *Proc. IEEE*, 54 (1966), 1312.
[3] Siegman, A. E. and Miller, H. Y., *Appl. Opt.*, 9 (1970), 2729.
[4] Siegman, A. E. and Arrathoon, R., *IEEE J. Quantum Electron*, 3 (1967), 156.
[5] Sanderson, R. L. and Streifer, W., *Appl. Opt.*, 8 (1969), 2129.
[6] Horwitz, P., *J. Opt. Soc. Am.*, 63 (1973), 1528.
[7] Cochran, J. A., *Bell. Sys. Tech. J.*, 44 (1965), 77.

EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF UNSTABLE RESONATORS

Chen Si-xiong

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

The existence of eigenvalues and eigenfunctions of an unstable resonator is demonstrated. The number of these eigenvalues or eigenfunctions is shown to be infinite and denumerable. We point out that the ε-approximate eigenvalues and the ε-approximate eigenfunctions of the unstable resonator suggested in reference [1] can not express the real losses and the real field distributions of it. The characteristics of mode selection in the unstable resonator with finite mirror sizes are pointed out.