

非线性波的特点 及其应用数学方法

陈 嗣 熊

(中国科学院力学研究所)

波动现象是自然界最普遍的现象之一。各种扰动以某种速度在介质中传播,都归结为波动现象。自然界的波动现象基本上都是非线性的。但是,目前能用于解非线性现象的数学工具并不多。近十多年来,这方面的发展很迅速,初步有了一些近似的与精确的数学方法。这些方法,在描写与刻划非线性波的特性方面,起了很大的作用。当然,不能否认电子计算机在非线性波的发展上起了重要的作用。早在1962年, J. K. Perring 与 T. H. R. Skyrme 对 Sine-Gordon 方程用电子计算机进行数值解,得到了第一个孤立子解。1965年, N. J. Zabusky 与 M. D. Kruskal 用电子计算机求得了 KDV 方程的孤立子解。这些计算结果使人们对非线性波的特性有了一定的认识,也是以后非线性波的理论与方法的基础。

非线性波的理论的发展是和力学紧密相关的。我们知道,线性波动方程广泛出现于声学(气体动力学)、弹性力学、电磁学(光学)中。在流体力学与气体动力学中,经常遇到非线性双曲型波动方程与激波问题。非线性波的典型方程——KDV 方程最早(1895年)是用来刻划自由表面浅水波的运动。这一方程的研究,对解决水波问题起了很大的作用。KDV 方程是非线性色散波的最简模型方程。它的其他应用,包括冷等离子体的磁流体动力波、非谐离散质量弦的纵振动、弹性杆中的纵向色散波等等。Burgers 方程是非线性耗散波的最简模型方程。它是与激波和湍流的研究紧密联系的。其他,如:重力波、毛细波、船波、旋转流体中的波、分层流体中的波、磁流体中的波等等,都是非线性波的研究对象。非线性波的应用数学方法,是与近代物理和近代数学的许多分支紧密联系的。它不同于传统的一些应用数学方法。因此,我们一方面应了解掌握非线性波的一些现有的应用数学方法,把它推广应用到不同的物理与力学领域;另一方面应进一步寻找新的处理非线性波问题的数学方法,用以解决物理与力学中提出的大量非线性问题。

对线性问题,可以利用叠加原理,求出实际问题的解。但是对于非线性问题,叠加原理一般不再适用,因此需要寻求新的特殊方法。

对于拟线性双曲型偏微分方程组所描述的双曲波,主要可利用特征理论来解决其初值问题;对于同族特征线相交而产生激波的情形,激波条件与激波位置,一般可由守恒定律或数学上由求偏微分方程的弱解求得。这些方法在流体力学与空气动力学中已得到了广泛的应用。但对于其他类型的非线性波,尚没有像对双曲波那样较普遍适用的特征理论的方法。

非线性波有许多特点。例如,对非线性色散波,由于非线性项的出现,通过非线性相互作用与色散效应,使非线性色散波能形成孤立波,并且这些孤立波在相互作用后,除了有位移外,形状与速度保持不变。这就是大家熟知的孤立子解的存在,是非线性色散波的特点之一。当然,并不是所有条件或所有非线性色散波都有孤立子解。关于孤立子解存在的充分和必要的条件,正是我们要研究的。非线性色散波尚有其他许多特点。例如:非线性波的一般色散关系都与振幅有关,而在线性情形,色散关系与振幅无关;对稳定的非线性色散波,群速度一般要分裂,而在线性情形,群

速度一般是二重的；以及非线性色散波出现的不稳定性问题等等。

非线性波研究的数学方法，大致可以分成近似方法与精确方法。

一、求精确解的方法

1. 反演散射法

设非线性发展方程为

$$\varphi_t = K(\varphi) \quad -\infty < x < +\infty, t > 0 \quad (1)$$

K 为某非线性算符， $\varphi = \varphi(x, t)$ ，假定其初始条件为

$$\varphi(x, 0) = f(x) \quad (2)$$

若能找到一个包含 $\varphi(x, t)$ 的线性算符 L 与 B ，满足

$$iL_t = BL - LB \quad (3)$$

这里， B 为自共轭算符，并且 L, B 使算符方程(3)化成原始方程(1)。则由 Lax 关于算符有相同谱的条件的讨论，由算符方程(3)知本征方程

$$L\psi = E\psi \quad (4)$$

的本征值 E 与时间 t 无关，由(4)二边对 t 求导，利用(3)，得

$$(L - E)(i\psi_t - B\psi) = 0$$

因此，若 ψ 随时间的发展，满足

$$i\psi_t = B\psi \quad (5)$$

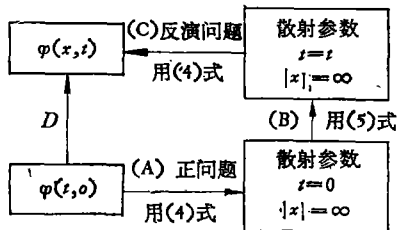
则知(4)式对任意时间 t 都成立，故得反演散射法的步骤：

(A) 正问题：由初始条件 $\varphi(x, 0) = f(x)$ ，由本征方程(4)求出 E, ψ ，与 ψ 在 $t = 0, |x| \rightarrow \infty$ 的散射参数(例如 L 的反射与透射系数等等)。

(B) 确定散射参数的时间发展：由(5)与 $|x| \rightarrow \infty$ 时 $\psi(x, t) \rightarrow 0$ 的条件，计算散射参数随时间的发展。

(C) 反演问题：由(4)与 t 时刻算符 L 的散射参数，确定 $\varphi(x, t)$ 。

其步骤如左图。



这里 D 是非线性的步骤，而(A)(B)(C)都是线性的步骤。因此，达到了将非线性步骤分解成若干个线性步骤的目的。

但是，这种方法的具体实现还是有不少困难的。其困难在于：1) 找算符 L 与 B (自共轭) 满足(3)式，其中 L, B 都包含 $\varphi(x, t)$ 。这样的算符并不容易找到。2) 由 t 时刻的散射参数，解算子 L 的反演问题，通常是很困难的。

虽然这种方法的实现有不少困难，然而 M. J. Ablowitz 等人，在 Zakharov 与 Shabat 解决非线性 Schrödinger 方程的启发下，用这种方法解决了一大类非线性发展方程。

2. Bäcklund 变换法

对二阶偏微分方程

$$F(\xi, \eta, \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta, \varphi_{\xi\xi}, \varphi_{\xi\eta}, \varphi_{\eta\eta}) = 0 \quad (6)$$

则 Bäcklund 变换为

$$\begin{cases} \varphi_\xi^{(1)} = P(\xi, \eta, \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta, \varphi^{(1)}) \\ \varphi_\eta^{(1)} = Q(\xi, \eta, \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta, \varphi^{(1)}) \end{cases} \quad (7)$$

它将原始函数 $\varphi(\xi, \eta)$ ，变换到新的函数 $\varphi^{(1)}(\xi, \eta)$ 。若将(7)的第一式对 η 求导，第二式对 ξ 求

导,并令二式相等(即消去 $\varphi_{\eta\eta}^{(1)}$) 则得 $\varphi^{(1)}(\xi, \eta)$ 的二阶偏微分方程. 它与原始方程(6)等价. 通过变换(7),有时可以得到简化的等价方程.

例如,对 Burgers 方程

$$\varphi_{\eta} + \varphi\varphi_{\xi} - \nu\varphi_{\xi\xi} = 0$$

若通过如下的 Backlund 变换

$$\varphi_{\xi}^{(1)} = -\frac{\varphi\varphi_{\xi}^{(1)}}{2\nu}, \quad \varphi_{\eta}^{(1)} = -(2\nu\varphi_{\xi} - \varphi^2)\frac{\varphi^{(1)}}{4\nu}$$

原始方程可化成线性热传导方程

$$\varphi_{\eta}^{(1)} - \nu\varphi_{\xi\xi}^{(1)} = 0$$

但是,把原始非线性方程通过 Backlund 变换,化成线性偏微分方程. 只有在极少数情况下能实现. 通常是利用方程(6)的一个特解 $\varphi(\xi, \eta)$, 由变换(7)求(6)的另一特解 $\varphi^{(1)}(\xi, \eta)$, 因此,变换(7)是将方程(6)映照到自身的变换. 若继续利用变换(7),即将求得的 $\varphi^{(1)}(\xi, \eta)$ 作为原来的 $\varphi(\xi, \eta)$, 用 Backlund 变换(7)又可求得新的特解 $\varphi^{(2)}(\xi, \eta)$, 以此类推,可以求得方程(10)的 N 个特解.

例如:对 Sine-Gordon 方程

$$\varphi_{\xi\eta} = \sin \varphi$$

则其 Backlund 变换为

$$\begin{cases} \varphi_{\xi}^{(1)} = \varphi_{\xi} + 2\lambda \sin \frac{\varphi^{(1)} + \varphi}{2} \\ \varphi_{\eta}^{(1)} = -\varphi_{\eta} + \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\varphi^{(1)} - \varphi}{2} \end{cases} \quad (8)$$

显然,为了使 $\varphi^{(1)}$ 的混合导数相等,必须有

$$\varphi_{\xi\eta} = \sin \varphi$$

由(8)的第一式对 η 求导,第二式对 ξ 求导,消去 $\varphi_{\xi\eta}$ 得

$$\varphi_{\xi\eta}^{(1)} = \sin \varphi^{(1)}$$

即变换(8)确实将原始方程映照到自身.

在(8)中,令 $\varphi = 0$ (它是原始方程的平凡解),则得

$$\varphi^{(1)} = 4 \tan^{-1} \left[c \exp \pm \left(\frac{x - U\xi}{\sqrt{1 - U^2}} \right) \right]$$

c 为积分常数, $\lambda = \sqrt{\frac{1-U}{1+U}}$, $\xi = \frac{x - \xi}{2}$, $\eta = \frac{x + \xi}{2}$. 它就是 Sine-Gordon 方程的孤立波解.

在(8)中,把 φ 代 $\varphi^{(1)}$, 则可求得 $\varphi^{(2)}$. 它表示,二相互作用的孤立波解

$$\tan \frac{\varphi^{(2)}}{4} = U \cdot \frac{\sinh x(1 - U^2)^{-1/2}}{\cosh U\xi(1 - U^2)^{-1/2}}$$

以此类推,可以得到 N 个孤立子解. 最近,对其他方程也提出了寻找这种 Backlund 变换的方法.

3. 应变变量变换法

对 Burgers 方程 $C_t + CC_x = \nu C_{xx}$ 用对应变量的 Cole-Hopf 变换 $C = -2\nu(\ln f)_x$, 则可将 Burgers 方程化成 $f_t = \nu f_{xx}$ 的线性热传导方程.

对 KDV 方程 $\varphi_t - 6\varphi\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0$ 作对应变量的变换

$$\varphi = -2(\ln f)_{xx}$$

则可把原始方程化成有某些线性方程特点的方程

$$f(f_t + f_{xxx})_x - f_x(f_t + f_{xxx}) + 3(\beta_{xx} - f_x f_{xxx}) = 0$$

它有特解

$$f = e^{[-\alpha(x-s) + \alpha^2 t]} \quad (\alpha, s \text{ 为常数})$$

Hirota 用此特解求得 KDV 方程的 N 个孤立波解

$$f(x, t) = \det |f_{mn}|$$

这里 $f_{mn} = \delta_{mn} + \frac{2\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_n} f_m$ ($f_m = e^{[-\alpha_m(x-s_m) + \alpha_m^2 t]}$) 这种应变变量变换法, 要求找的变换是使某特殊的孤立波解变换成简单的指数函数解. 几个典型方程的 N 个孤立波解都找到了类似的应变变量变换.

当然还有其他的求精确解的特殊方法, 但上述三种方法有一定的普遍性, 用得较普遍广泛.

二、求近似解的方法

1. 一致有效渐近展开法

这是解决非线性问题的最有力的近似方法. 它可把非线性问题变成一组近似的线性问题来求解. 但是, 为了使渐近展开式在所讨论的区域上一致有效, 必须采用各种展开技巧. 我们知道, 使渐近展开式不能一致有效, 大概有下列几种原因: (1) 展开式中出现长期项 (Secular term), 因而在 t 的无穷区域中不能保证一致有效. (2) 方程中小参数出现在最高阶导数的系数中, 因此, 在进行渐近展开时, 展开式中各项不能满足方程的所有边界条件. (3) 渐近展开式中各项满足的方程与原方程类型不一致. (4) 在渐近展开式中出现奇点, 且奇点阶数逐项递增. 为了避免这些非一致有效性可采用多种技巧. 主要有以下几种方法:

(1) 应变参数法. 该法基于问题中包含有某刻划微扰强度的参数, 从而把未知函数与该参数同时进行微扰渐近展开, 使展开式一致有效.

(2) 应变坐标法.

设 $u = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \varepsilon)$ 为未知函数, 为了使对 ε 的渐近展开一致有效, 常作下列展开式:

令

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$x_1 = s + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \xi_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

这种展开, 实际上即要求 $\frac{u_m}{u_{m-1}} < \infty$, $\frac{\xi_m}{\xi_{m-1}} < \infty$, 即奇异性不能随近似阶数增加!

这种方法适用于很大一类非线性问题, 尤其是非色散介质的波传播问题. 这种方法对双曲型方程较成功; 但对椭圆型方程, 常不产生一致有效的渐近展开.

(3) 匹配与组合渐近展开法. 这种方法首先把原始问题分成二个区域, 所谓外区域与内区域, 在外区域用原始自变量作渐近展开 (称为外展开). 在内区域, 函数有很尖锐的变化, 故用放大了尺度的自变量作渐近展开 (称为内展开). 为了连接二种展开, 使用所谓的匹配程序.

(4) 多重尺度法.

设

$$x = x(t, \varepsilon)$$

令 $\xi = \varepsilon t, \eta = (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \cdots + \varepsilon^N \omega_N)t$

则令 $x(t, \varepsilon) = \tilde{x}(\xi, \eta, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m x_m(\xi, \eta)$

把它代入方程,然后选择 $\omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_N$, 使展开式一致有效. 这种方法在解决非线性问题中特别有效,发展也特别迅速.

在具体进行渐近展开时,必须考虑一致有效的问题.

对非线性波动问题,常用的一种渐近展开法称为广义 WKBJ 方法.

对一维线性波动方程 $\varepsilon^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x)\psi = 0 \quad \varepsilon \ll 1$ 则其 WKBJ 方法为: 令 $\psi(x) \sim W(x) e^{i\theta(x)}$

$\theta \equiv \frac{B(x)}{\varepsilon}$, 把 $\psi(x)$ 用 $W(x), B(x)$ 来表示,代入方程得 $W(x)$ 与 $B(x)$ 间的关系.

对多维情形

$$\nabla^2 \psi + n^2 K^2 \psi = 0 \quad K \gg 1$$

则令

$$\psi(x, y, z) = e^{iKs(x, y, z)} \sum_{m=0}^{\infty} (iK)^{-m} W_m(x, y, z)$$

这也就是一般的几何光学近似.

类似的,对非线性波动问题,我们采用更一般的展开形式,为保证展开式一致有效,采用多重尺度法,即

令

$$\varphi(x, t, \varepsilon) = \Phi(\theta, x, t, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Phi_n(\theta, x, t) \quad (9)$$

这里对 θ 的依赖,相当于线性情形对 e^{iKs} 中的 s 的依赖,即对位相的依赖.

在 WKBJ 方法的启发下,对非线性问题,我们可以对式(9)附加二个条件:(a)对 θ 有周期性,即

$$\Phi(\theta + 1, x, t, \varepsilon) = \Phi(\theta, x, t, \varepsilon)$$

(这里已把周期规一化为1);(b)令 $\theta = \theta(x, t)$, 然后确定函数 $\theta(x, t)$. 周期性保证了(9)一致有效.

2. Whitham 的平均变分法

这种方法可由前述广义 WKBJ 方法推出. 它适用于振幅 a , 频率 ω , 波长等都是空间与时间的慢变函数的情形.

设原始非线性方程为

$$\frac{\partial(L\varphi_t)}{\partial t} + \frac{\partial(L\varphi_x)}{\partial x} - L\varphi = 0 \quad (10)$$

其中 $L = L(\varphi_t, \varphi_x, \varphi)$ 为 Lagrange 函数,式(10)对应于变分问题

$$\delta \iint L(\varphi_t, \varphi_x, \varphi) dx dt = 0$$

的 Euler 方程.

令 $X = \varepsilon x, T = \varepsilon t$ (使 x, t 缩短),并用多重尺度法(因为我们知道 φ 随位相 θ 迅速变化),即令

$$\varphi(x, t) = \Phi(\theta, X, T) \quad (\Phi \text{ 是 } \theta \text{ 的周期函数}) \quad (11)$$

其中

$$\theta = \varepsilon^{-1}\Theta(X, T) \quad (\text{它表示快变函数})$$

并定义

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} = -\omega, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X} = K$$

则由(11)得

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = K \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial X} \end{cases}$$

把它代入原始方程(10),得

$$-\omega \frac{\partial L_1}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial L_1}{\partial T} + K \frac{\partial L_2}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial L_2}{\partial X} - L_3 = 0 \quad (12)$$

这里 $L_1 = L_{\varphi, t}$, $L_2 = L_{\varphi, x}$, $L_3 = L_{\varphi}$ 且

$$L_i = L_i(-\omega\Phi_{\theta} + \varepsilon\Phi_T, K\Phi_{\theta} + \varepsilon\Phi_X, \Phi) \quad (i = 1, 2, 3)$$

设 ω, K 为 X, T 的慢变函数,故(12)可写成

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{(-\omega L_1 + K L_2)\Phi_{\theta} - L\} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} (\Phi_{\theta} L_1) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} (\Phi_{\theta} L_2) = 0 \quad (13)$$

因为 Φ 是 θ 的周期函数,设周期为 2π , 则由(13)得

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{\theta} L_1 d\theta \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{\theta} L_2 d\theta \right) = 0$$

式(12)(13)正好对应于变分问题

$$\delta \iint \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(-\omega\Phi_{\theta} + \varepsilon\Phi_T, K\Phi_{\theta} + \varepsilon\Phi_X, \Phi) d\theta \right] dX dT = 0 \quad (14)$$

对 Φ 与对 θ 的变分 Euler 方程, 由 Hamilton 变换, 在零级近似时(忽略 ε^1 项), 式(14)可化成变分问题^[1]

$$\delta \iint \bar{L}(\omega, K, A) dX dT = 0$$

这里 A 对应于振幅, 问题最后化成

$$\begin{cases} \bar{L}_A = 0 \\ \frac{\partial \bar{L}_{\omega}}{\partial T} - \frac{\partial \bar{L}_K}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial X} + \frac{\partial K}{\partial T} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

方程组(15)可用特征理论求解.

非线性波理论, 近年来发展非常迅速. 它与理论物理、力学、非线性光学、天体物理、大气、海洋学的发展紧密相关. 其中所采用的一些数学方法, 正在逐步形成一般的方法. 还有许多理论问题, 如: 由守恒定律研究解的性质, 孤立子存在的条件与运动速度问题, 非线性稳定性问题, 伯克隆变换与反演散射法间的相似性问题等等, 这里均未涉及与讨论.

(下转第 25 页)

错攀移占优势时,式(3)中的 $n \approx 4.5 - 6$.

电子显微镜的观测能帮助我们了解不同条件下主导的蠕变机制是什么,从而确定适用的蠕变方程.近年来这方面的工作指出 N-H 理论的局限性,推翻了过去公认的牛顿体的假定,肯定了多数上地幔材料具有非线性的流动定律.

本构方程的不同,会给粘性系数的计算带来不同的结果. Weertman 的计算结果表明,当 $T = 0.7T_m$ 时,按 N-H 机制, $\eta \approx 10^{25}$. 而按位错机制 $\eta \approx 10^{22}$ (图 5). 由此算得的松弛时间当然也相差几个数量级. 按 N-H 机制,地幔只能在 $T > 0.8T_m$ 时才产生变形;低于该温度时, $\eta \approx 10^{25}$,地幔对流就停止了. 若按位错机制来确定,则将在较宽的温度范围内,即 $T > 0.5T_m$ 时,容易产生变形. 按 N-H 机制的计算,在深度大于 850 公里时,粘性大到使对流在这些区域中已成为不可能. 而按位错滑移曲线,在整个地幔中粘性很低,都允许发生对流. 由此可知,采用不同的蠕变机制,会带来多么显著的影响.

岩石高温高压蠕变断裂的实验研究在国际上开展得还很不够. 把实验结果与地球物理资料结合起来的工作更是初步的. 对于实验中的应变率 (10^{-8} /秒) 如何外推到自然情况 ($10^{-14} - 10^{-15}$ /秒)

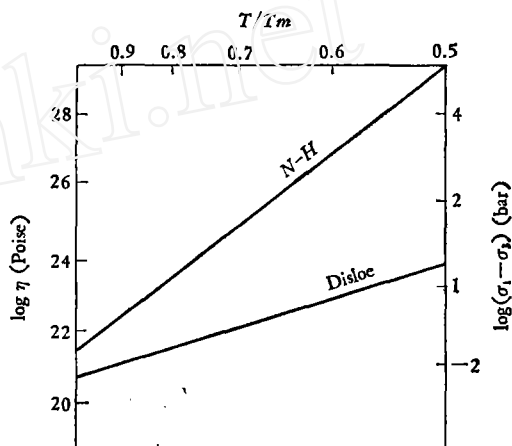


图 5

的问题,看法还不一致. 地壳和地幔的较为理想的物理模型尚未建立. 把蠕变试验和声发射等现象联系起来考虑等方面,也只是刚开始有人进行. 微观机制方面的研究,更是为数极少,很多问题还很不清楚. 此外,岩石的应力松弛现象,应力状态和变形路程的关系等都是值得重视的问题,国际上至今也还是比较薄弱的一环.

参 考 文 献

- [1] Griggs, D. T., *Bull. of the Geol. Soc. of Amer.*, 51(1940), 1001—1022.
- [2] Griggs, D. T., *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 14(1967), 19—31.
- [3] Paterson, M. S., *Intern. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 7(1970), 517—526.
- [4] *Electron Microscopy in Mineralogy* (1976).
- [5] 苏联有关地震的实验研究, *国外地震*, 4 (1976).
- [6] Лебедев, Т. С., *Геофизич. сб.*, 38 (1970).
- [7] *Flow and Fracture of Rocks* (1972).
- [8] Schmid, S. M., *Tectonophysics*, 31(1976), 1—2.
- [9] Weertman, J., *ASM Trans.*, 62(1969), 502.
- [10] Weertman, J., *Rev. of Geophysics and Space Phys.*, 8(1970), 1.

(上接第 20 页)

参 考 文 献

- [1] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons (1974).
- [2] Leibovich, S. and Seebass, A. R., *Nonlinear Waves*, Cornell University Press (1974).
- [3] Scott, A. C., Chu, F. Y. F. and McLaughlin, D. W., *The soliton: A new concept in applied science*, *Proceedings of the IEEE*, 61, 1443 (1973).
- [4] 谷内俊弥, 西原功修著, *非线性波动*, 岩波书店 (1977).
- [5] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods* John Wiley & Sons, (1973).