有限长环形管道中的磁流体流动*

中国科学院力学研究所　荣　堃

在有限长环形管道中，粘性导电的流体在轴向磁场和径向电场的作用下，不仅产生环向流动(主流)，而且由于轴向边界的影响还会产生子午面内的流动，称为二次流动．在哈特曼数很大，雷诺数较小或长管近似的情况下，二次流可以忽略[1-3,6,7]．Ганницкий[4,5] 等对二次流进行了计算和讨论．从量纲分析理论可清楚知道，除几何参数外，只能有两个独立的无量纲参数．因此，他们采用 α, β, γ 三个独立参数进行计算，在物理上是不合理的，其中 γ 应等于 β/α.

环管中磁流体力学流动是非线性问题．本文用数值方法计算非定常起动过程，计算到各物理量对时间稳定后，求得其定常流动的解，并讨论二次流对主流速度的影响．图 1 为流动结构示意图．环管的截面为矩形，在 $r=r_1$ 及 r_2 处有内、外电极，电极间的总电流为 I (不妨假定由内电极流向外电极)，轴向边界为绝缘壁面，外加轴向均匀磁场 B_0. 假定流体不可压缩，导电率 σ 和粘性系数 η 是常数，小磁雷诺数，忽略霍尔效应．采用 MKSM 单位制，流体和电磁场满足如下方程：

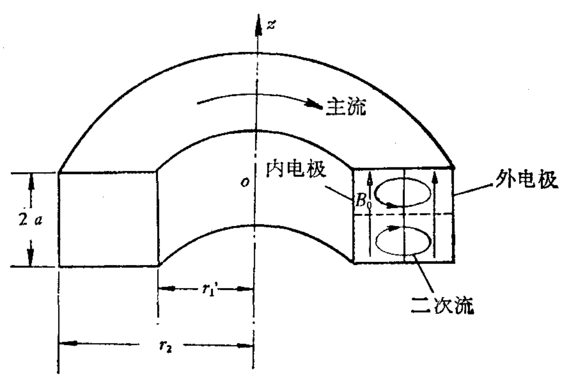

图 1　流动结构示意图

运动方程

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-\nabla P+\eta\Delta\mathbf{V}+\mathbf{j}\times\mathbf{B} \quad (1)$$

连续方程 $\nabla\cdot\mathbf{V}=0$　(2)

法拉第定律 $\nabla\times\mathbf{E}=0$　(3)

欧姆定律

$$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}) \quad (4)$$

电流连续方程

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=0 \quad (5)$$

其中 $\mathbf{V}$, P, ρ, $\mathbf{j}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ 分别表示速度矢量，压力，密度，电流密度矢量，磁感应强度矢量，电场强度矢量．采用柱面坐标系 (r, θ, z)，$\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{j}$ 的分量分别为 u, v, w 和 j_r, j_θ, j_z. 在小磁雷诺数假定下，可以忽略感应磁场，用外加轴向磁场 B_0 代替 $\mathbf{B}$，同时在法拉第定律(3)中忽略 $\partial\mathbf{B}/\partial t$ 项．按连续方程(2)和电流连续方程(5)，引进二次流流函数 $\tilde{\phi}$ 与 j_r, j_z 的流函数 $\tilde{\Phi}$ 及二次流涡量 $\tilde{\omega}$，它们分别满足以下关系：

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial z},\quad w=-\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial r},\quad \tilde{\omega}=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r}$$

* 1978 年 3 月 1 日收到．

$$j_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial z}, \quad j_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial r}$$

采用以下无量纲变量及参数：

$$g = v\Big/\left(\frac{I}{4\pi r_1\sqrt{\sigma\eta}}\right), \quad \phi = \tilde{\phi}\Big/\left(r_1^2\frac{I}{4\pi r_1\sqrt{\sigma\eta}}\right), \quad \omega = \frac{4\pi r_1^2\sqrt{\sigma\eta}\,\tilde{\omega}}{I}$$

$$\psi = \frac{4\pi\tilde{\psi}}{I},\ T = \frac{\eta t}{\rho r_1^2},\ \xi = \frac{z}{r_1},\ \zeta = \frac{r}{r_1},\ M = r_1 B_0\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}},\ \mathrm{Re} = \frac{\rho I}{4\pi\eta\sqrt{\sigma\eta}}$$

从方程(1)—(5)中消去 $\mathbf{E}$，经过一些运算，可将方程转化成 v，$\tilde{\phi}$，$\tilde{\omega}$，$\tilde{\psi}$ 所满足的方程，并将其无量纲化后得到如下方程：

$$\frac{\partial g}{\partial T} = \frac{\partial^2 g}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial g}{\partial\zeta} - \frac{g}{\zeta^2} - \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\zeta} - \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial g}{\partial\xi} + \frac{g}{\zeta^2}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right] - \frac{M}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \tag{6}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial T} = \frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\omega}{\partial\zeta} - \frac{\omega}{\zeta^2} - \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\zeta} - \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi} - \frac{\omega}{\zeta^2}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} - \frac{2g}{\zeta}\frac{\partial g}{\partial\xi}\right] - \frac{M^2}{\zeta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2} - \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} = \zeta\omega \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} - \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = M\zeta\frac{\partial g}{\partial\xi} \tag{9}$$

式(6)，(7)是非线性抛物型方程，式(8)，(9)是椭圆型方程，这组方程的定解条件为

$$T = 0,\ g = \omega = \phi = 0\ (\text{流体静止}),\ \psi = \xi/\xi_1\ (\text{电流均匀分布}) \tag{10}$$

$$\zeta = 1,\ r_2/r_1,\ g = \phi = \omega - \frac{1}{\zeta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2} = 0\ (\text{速度无滑移条件}),$$
$$\partial\psi/\partial\zeta = 0\ (\text{理想导电电极面}) \tag{11}$$

$$\xi = \xi_1 = a/r_1,\ g = \phi = \omega - \frac{1}{\zeta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} = 0\ (\text{速度无滑移}),$$
$$\psi = 1\ (\text{理想绝缘壁条件}) \tag{12}$$

$$\xi = 0,\ \phi = \psi = \omega = \partial g/\partial\xi = 0\ (\text{对称条件}) \tag{13}$$

因为对称性，故只对 $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$，$1 \leqslant \zeta \leqslant r_2/r_1$ 区域求解．以上方程组和定解条件中，除截面的几何参数外，只有两个独立的无量纲参数——哈特曼数M和雷诺数 Re，它们和截面的几何参数一起决定了这个问题解的性质．

首先计算了最简单的一种情况，即只有环向流动没有二次流动的定常流动的解，它是大哈特曼数，小雷诺数的定常流动的近似解．取正方形截面（$2a/(r_2 - r_1) = 1$，$2r_1 = r_2$），把 $\phi = \omega = 0$，$\partial/\partial t = 0$ 代入方程组(6)—(9)和定解条件(10)—(13)，得到 g，ψ 的两个椭圆型方程和混合边界条件，用中心差分将它们离散化，再用超松弛迭代法求解，取步长 $\Delta\xi = \Delta\zeta = 1/16$，松弛因子为 1.5，参数$M = 5$，10，15 计算结果与胡文瑞[3]的级数解一致．图 2 为计算的环向速度径向分布随哈特曼数M的变化曲线．

而后，考虑二次流动，根据方程和定解条件（6)—(13)，以 $T = 0$ 为起点，对时间积

分，计算非定常起动过程，到 g, ω, ϕ, ψ 各量对时间 T 稳定后，求得了定常流动的解．采用中心差分，正方形网格，步长 $\Delta\xi = \Delta\zeta = 1/16$，将方程组及定解条件(6)—(13)对空间离散化，$g_{i,j}$, $\omega_{i,j}$, $\phi_{i,j}$, $\psi_{i,j}$ 分别表示 g, ω, ϕ, ψ 在空间节点上之值，ω, ψ 的边值离散化时，利用 ω, ϕ 及 ψ 在边界处的泰勒展开式，ω 的展式取至第二项，ϕ 和 ψ 取至第四项，这样其截断误差与中心差分截断误差一致．

对显含 T 的方程 (6)，(7)，在其对空间离散化后，用变步长龙盖-库塔法对时间积分，求得 $g_{i,j}^{(k)}$, $\omega_{i,j}^{(k)}$, k 表示积分的步号．调整步长，使全步长与半步长计算的 $g_{i,j}$, $\omega_{i,j}$ 值的相对误差小于 5×10^{-4}．在对 T 积分的每一步上，用超松弛迭代法解椭圆型方程(8)和(9)，确定 $\phi_{i,j}^{(k)}$ 和 $\psi_{i,j}^{(k)}$．迭代的相对误差小于 5×10^{-4}．当第 $k+1$ 步积分得到的 $g_{i,j}^{(k+1)}$, $\omega_{i,j}^{(k+1)}$ 与第 k 步得到的 $g_{i,j}^{(k)}$, $\omega_{i,j}^{(k)}$ 的相对误差小于 5×10^{-4} 时，积分终止．$g_{i,j}^{(k+1)}$, $\omega_{i,j}^{(k+1)}$, $\phi_{i,j}^{(k+1)}$, $\psi_{i,j}^{(k+1)}$，就是有限长环管中磁流体力学定常流动的解．非定常起动过程所需的无量纲时间 T_0 大约为 0.1，若 $\rho = 10^{-4}\,\mathrm{g/cm^3}$, $r_1 = 5\,\mathrm{cm}$, $\eta = 10^{-4}\,\mathrm{g/s}$ 则起动过程的特征时间 $t_0 = (\rho r_1^2/\eta)T_0 = 2.5\,\mathrm{s}$．这个计算过程对时间步长敏感，要不断调整步长，否则得不到稳定的解．

选择以下几组参数进行了计算：

1. $M = 15$, $\mathrm{Re} = 50$　2. $M = 15$, $\mathrm{Re} = 500$　3. $M = 10$, $\mathrm{Re} = 50$
4. $M = 10$, $\mathrm{Re} = 500$　5. $M = 5$, $\mathrm{Re} = 500$　6. $M = 5$, $\mathrm{Re} = 1000$

仅对正方形截面计算的定常流动结果绘成曲线图 3—5，以便对两个主要参数哈特曼数 M 和雷诺数 Re 的作用进行讨论，而截面的几何参数的影响是比较直观的，讨论从略．图 3 中实线表示 $r/r_1 = 1.44$ 处，$\mathrm{Re} = 500$, 1000, $M = 5$ 时的主流速度的轴向分布曲线，虚线表示无二次流时相应的曲线．图 4 为主流速度径向分布曲线．图 5 给出了 $M = 5$, $\mathrm{Re} = 500$ 时二次流流线分布曲线，箭头指示二次流方向．在对称平面另一侧也有同样的流线形状．下面讨论轴向边界效应产生的二次流对主流速度的影响：

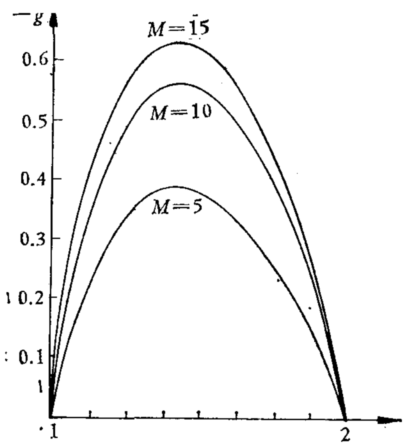

图 2　无二次流时主流速度径向分布 ($Z = 0$)

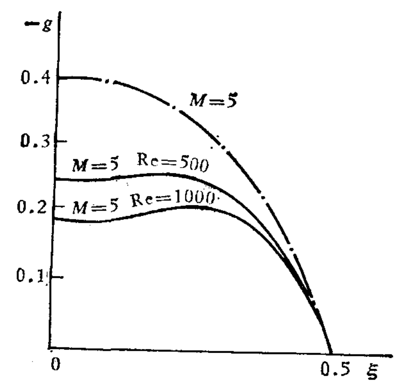

图 3　主流速度轴向分布 ($\zeta=1.44$)

1. 二次流改变了主流速度的轴向分布和径向分布．二次流使主流速度轴向梯度减小，轴向分布变得平坦如图 3 所示，随着 Re 的增大，主流速度沿轴向变化越加缓慢，随着 M 的

增大，主流速度轴向分布曲线变陡. 二次流也使主流速度沿径化变化缓慢，同时径向分布的峰值向外电极附近移动（图 4）. 动量方程（6）是磁力、粘性力和二次流惯性力三者的平衡，磁力是推动力，粘性力是阻力. 二次流惯性力在外电极附近起推力作用，在内电极附近则起阻力作用，结果主流速度峰值向外移动. 比较图 4 中几条曲线看到，随着 Re 的增大和M的减小，主流速度径向分布变得平坦，且峰值更靠近外电极.

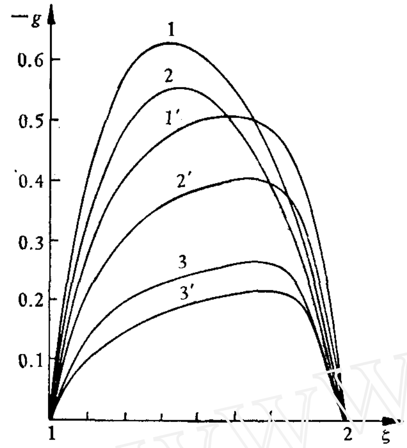

图 4 主流速度径向分布 ($Z=0$)
1:$M=15$, Re $=50$ 1':$M=15$, Re $=500$
2:$M=10$, Re $=50$ 2':$M=10$, Re $=500$
3:$M=5$, Re $=500$ 3':$M=5$, Re $=1000$

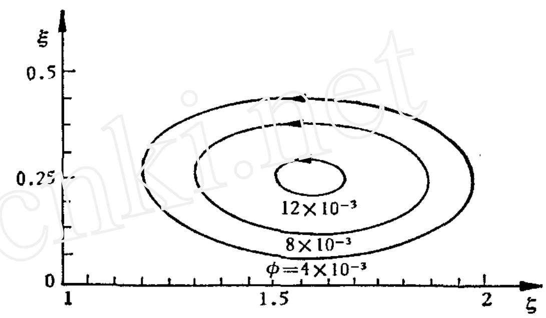

图 5 二次流流线分布

2. 二次流使主流速度降低，例如 $M=5$, Re $=500$ 时，$Z=0$ 平面上，二次流速度是主流最大速度的十分之几，主流最大速度减小 1/3 左右（比较图 2 和 4 中的曲线 3）. 在这种情况下不能忽略二次流的作用. 随着M的增大和 Re 的减小，二次流大大地减弱了，对主流的影响随之减弱，例如在 $Z=0$ 平面上，$M=10$ Re $=50$ 时，二次流最大速度为主流速度的百分之一，主流速度分布曲线只在峰值附近稍有降低，当 $M=15$, Re $=50$ 时，二次流速度是主流的千分之一，主流速度分布曲线与无二次流时相应的曲线重合，在这种大M和小 Re 的情况下可以忽略二次流对主流的影响. Baylis[7] 定性给出大M条件下忽略二次流的条件为 $16\frac{a^2}{R^2}\frac{\mathrm{Re}^2}{M^4}\ll 1$，当 $M=15$, Re $=50$ 时，$16\frac{a^2}{R^2}\frac{\mathrm{Re}^2}{M^4}=0.087$，我们的结果与 Baylis 结果一致.

胡文瑞同志给予很多指导和帮助，在此表示感谢.

参 考 文 献

[1] Lewellen, W. S., *Phys. Fluid*, **5**, 12 (1962), 1663.
[2] Kessey, K. O., *AIAA J.*, **2**, 5 (1964), 864.
[3] 胡文瑞，力学学报，1(1979),27.
[4] Ганницкий, А. И., Дробышевский, Э. М., Розов, С. И., *Ж. Т. Ф.*, **38**, 12 (1968), 2070.
[5] Ганницкий, А. И., Чектерев, И. Б., *Ж. Т. Ф.*, **41**, 1(1971), 207.
[6] Дорфман, Л. А., Романенко, Ю. Б., *М. Ж. Г.*, **5** (1966), 53.
[7] Baylis, J. A., Hunt, J. C. R., *J. Fluid Mech.*, **48**, 3 (1971), 423.

MAGNETOHYDRODYNAMIC FLOW IN AN ANNULAR CHANNEL OF FINITE LENGTH

Rong Sheng
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)