大型变截面圆柱罐壁和罐底的应力分析

李　国　琛

（中国科学院力学研究所）

为合理设计大型溶液罐壁，需要计及各圈变截面罐壁之间的约束弯矩与剪力的作用．为此，计算应力时，应该联合各圈罐壁及罐底，协同分析．

1. 变截面圆柱罐壁

如图 1 所示，在第 i 圈中，L_i、L_{i-1} 是液压高度，M_i、M_{i-1} 是弯矩，Q_i、Q_{i-1} 是剪力，x_i 是从该圈底边量起的坐标高度．

利用圆柱壳体的边界效应方程*，不难导出挠度

$$\begin{aligned} w_i = & -\frac{\gamma R^2}{E h_i}(L_{i-1} - x_i) + \frac{e^{-\beta_i(l_i - x_i)}}{2D_i\beta_i^2}\left\{\left[(A)M_{i-1} + (C)\frac{Q_{i-1}}{\beta_i} + (E)M_i + (G)\frac{Q_i}{\beta_i}\right]\right. \\ & \left.\times \cos\beta_i(l_i - x_i) + \left[(B)M_{i-1} + (D)\frac{Q_{i-1}}{\beta_i} + (F)M_i + (H)\frac{Q_i}{\beta_i}\right]\sin\beta_i(l_i - x_i)\right\} \\ & + \frac{e^{-\beta_i x_i}}{2D_i\beta_i^2}\left\{\left[(E)M_{i-1} - (G)\frac{Q_{i-1}}{\beta_i} + (A)M_i - (C)\frac{Q_i}{\beta_i}\right]\cos\beta_i x_i + \left[(F)M_{i-1} - (H)\right.\right. \\ & \left.\left.\times\frac{Q_{i-1}}{\beta_i} + (B)M_i - (D)\frac{Q_i}{\beta_i}\right]\sin\beta_i x_i\right\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中下标 i 是指罐壁的圈数（自下往上数），R 是壳体半径，γ 为液体容重，E、ν 是弹性横量和泊松系数，h_i 是第 i 圈壁厚，

$$\beta_i = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h_i^2}}, \quad \alpha_i = \beta_i l_i, \quad D_i = \frac{E h_i^3}{12(1-\nu^2)}$$

又

$$(A) = [\mathrm{sh}\alpha_i(\cos\alpha_i + \sin\alpha_i) + e^{\alpha_i}\sin\alpha_i]/S, \quad (B) = -[\mathrm{ch}\alpha_i\sin\alpha_i + \mathrm{sh}\alpha_i\cos\alpha_i]/S,$$

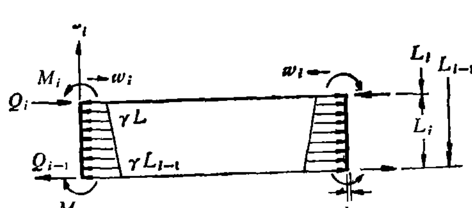

图 1　第 i 圈罐壁

$$(C) = [e^{\alpha_i}\sin\alpha_i - \mathrm{sh}\alpha_i\cos\alpha_i]/S,$$

$$(D) = -\mathrm{sh}\alpha_i\sin\alpha_i/S,$$

$$(E) = -[\sin^2\alpha_i + \sin\alpha_i\cos\alpha_i + e^{\alpha_i}\mathrm{sh}\alpha_i]/S,$$

$$(F) = [e^{\alpha_i}\mathrm{sh}\alpha_i + \sin\alpha_i\cos\alpha_i - \sin^2\alpha_i]/S,$$

$$(G) = [e^{\alpha_i}\mathrm{sh}\alpha_i - \sin\alpha_i\cos\alpha_i]/S,$$

$$(H) = -\sin^2\alpha_i/S, \quad S = 2(\mathrm{sh}^2\alpha_i - \sin^2\alpha_i).$$

为确定各交界面处的未知力，可以利用变形连续条件：

$$w_i\Big|_{x_i = l_i} = w_{i+1}\Big|_{x_{i+1}=0}, \quad \frac{dw_i}{dx_i}\Big|_{x_i = l_i} = \frac{dw_{i+1}}{dx_{i+1}}\Big|_{x_{i+1}=0} \tag{1.2}$$

于是，如有 n 圈罐壁，由(1.2)将导出 $n-1$ 个交界面上的 $2(n-1)$ 个方程，求出 $2(n-1)$ 个未知

* Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and shells, sec. edit. 1959, 468.

力 M_i 和 Q_i. 此时罐壁的最上端 $M_n = Q_n = 0$;又 M_0、Q_0 可根据下一段中环板的计算求出.

联立解出变截面罐壁交界面上的未知力. 从而,由(1.1)及圆柱壳中熟知的算式,可求得各圈罐壁中的挠度、弯矩和中面力,然后计算内外壁的应力.

2. 底板与环板

罐底支承在弹性地基上. 它的边缘是由一圈环板围成, 与罐壁相接, 其余的中间部分称作底板. 环板要比底板厚.

由于地基的不均匀沉降和焊接工艺的影响,底板与环板的受力状态是比较复杂的. 根据国内外实测的经验,可以归结为以下的受力模型: (1)底板内是无矩状态,径向力与环向力相等,即 $N_r = N_\theta = N$, 其中 N 是常量. (2)在大型贮液罐中,可以假定环板是无限宽板. 它的受力状态如图 2 所示. F_1 是地基圈梁通过罐壁对环板提供的反力, M_0 是罐壁与环板间的约束弯矩.取弹性地基对环板的支承压力为直线分布,在 $x = l$ 处达到单位面积上的压力值为 p_2. l 是环板内受弯区域的宽度.

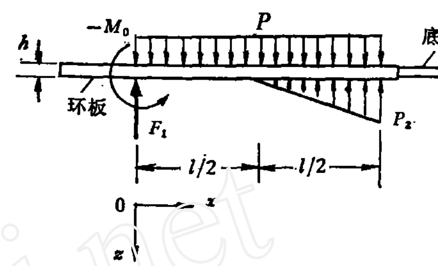

图 2　环板受力图

由力的平衡可以导出

$$p_2 = \frac{12}{5}\left(P - \frac{2M_0}{l^2}\right), \quad F_1 = \frac{1}{l}\left(M_0 + \frac{Pl^2}{2} - p_2\frac{l^2}{24}\right) \tag{2.1}$$

为确定挠度 w (与 Z 坐标同向为正),可以建立微分方程:

$$(1)\ D\frac{d^2w}{dx^2} = -\left[F_1x - M_0 - \frac{Px^2}{2}\right] \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right) \tag{2.2}$$

$$(2)\ D\frac{d^2w}{dx^2} = \left[P\frac{(l-x)^2}{2} - p_2\left(\frac{x^3}{3l} - \frac{x^2}{2} + \frac{l^2}{6}\right)\right] \quad \left(\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l\right) \tag{2.3}$$

其中 $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, h 是环板厚度. 求解时的边界条件是: (1)在 $x = l/2$ 处, w 及 $\dfrac{dw}{dx}$ 连续; (2)在 $x = l$ 处, $\dfrac{dw}{dx} = 0$ 和 $w = \dfrac{p_2}{K}$, K 是弹性地基系数(可取为 4 kg/cm³).

应该说明, 按以上求出的将是环板内相对的挠度变化, 不是绝对量. 为此可以令 $x = 0$ 处的挠度 $w = 0$, 从而得到

$$M_0 = \left(\frac{47}{6} - \frac{960\,D}{Kl^4}\right)Pl^2 \Big/ \left(49 - \frac{1920\,D}{Kl^4}\right) \tag{2.4}$$

为确定 $N(=-Q_0)$ 和 l,可以利用罐壁与环板间的位移连续条件,即

$$u|_{x=0} = -w_1|_{x_1=0}, \quad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dw_1}{dx_1}\right|_{x_1=0} \tag{2.5}$$

其中 $u|_{x=0} = \dfrac{N(1-\nu)R}{Et}$ (向圆心外为正), t 为底板厚度. 若忽略第 1 圈以上罐壁对环板的影响,则不难求出:

$$\left.\begin{aligned} w_1|_{x_1=0} &= \frac{R^2}{Eh_1}(2N\beta_1 - 2M_0\beta_1^2 - \gamma L_0) \\ \left.\frac{dw_1}{dx_1}\right|_{x_1=0} &= \frac{R^2}{Eh_1}(4M_0\beta_1^3 - 2N\beta_1^2 + \gamma) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

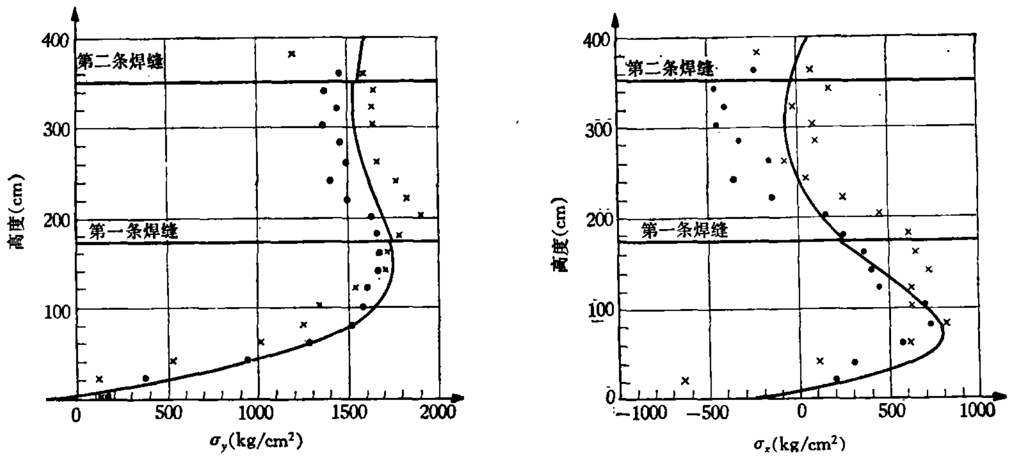

图 3 罐外壁应力分布 ● 电测 × 机测 — 计算

于是由(2.2)中的解和(2.5)、(2.6)，可以得到：

$$N=\frac{2M_0\beta_1^2+\gamma L_0}{2\beta_1+[h_1(1-\nu)/Rt]} \tag{2.7}$$

$$M_0=\frac{\frac{11}{240}\left(\frac{h_1}{h}\right)^3 pl^3+\frac{\gamma}{4\beta_1^4}\left(\frac{2\beta_1^2L_0}{2\beta_1+[h_1(1-\nu)/Rt]}-1\right)}{\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{2\beta_1+[h_1(1-\nu)/Rt]}+\frac{17\,l}{40}\left(\frac{h_1}{h}\right)^3} \tag{2.8}$$

由(2.4)、(2.8)可以导出确定 l 的多项式方程

$$\frac{1}{49-\frac{1920D}{Kl^4}}\left(\frac{47}{6}-\frac{960\,D}{Kl^4}\right)pl^2-\frac{\frac{11}{240}\left(\frac{h_1}{h}\right)^3 pl^3+\frac{\gamma}{4\beta_1^4}\left(\frac{2\beta_1^2L_0}{2\beta_1+[h_1(1-\nu)/Rt]}-1\right)}{\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{2\beta_1+[h_1(1-\nu)/Rt]}+\frac{17\,l}{40}\left(\frac{h_1}{h}\right)^3}=0 \tag{2.9}$$

求得 l 后，就可依次得到环板中的弯矩和应力．

3. 大型贮油罐的应力实测

罐壁内直径 60 m，实验时充水高度 18.04 m，水的容重为 1 T/m^3．各层罐壁所用材料和尺寸

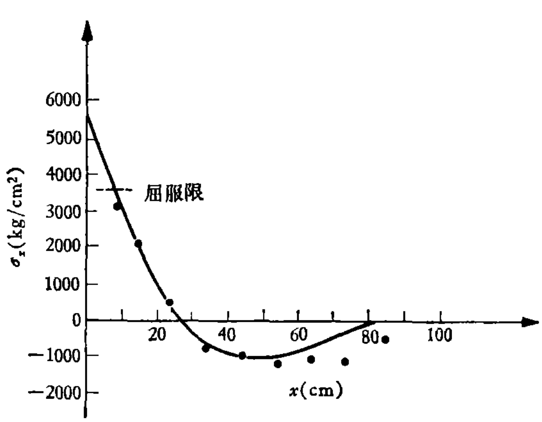

图 4 环板 σ_x 分布
● 实测 — 计算

表 1 $E=2.1\times10^6\text{kg/cm}^2,\ \nu=0.3$

圈数	层高 (mm)	板厚 (mm)	材料
1	1780	32	16Mn
2	1780	30	16Mn
3	1780	26	16Mn
4	1780	24	16Mn
5	1780	20	16Mn
6	1780	18	16Mn
7	1780	14	16Mn
8	1780	12	16Mn
9	1780	10	16Mn
10	1780	10	A_3
11	1225	10	A_3

如表 1 所示。环板材料是锰钢(屈服限 $\sigma_T = 3500\ \text{kg/cm}^2$, 厚度 12mm)。

测量应变主要是用电阻应变片作传感器的电测法。对于罐壁部分还附以机械式的千分表引伸仪,以校核电测法的可靠性。实测的应力分布(第一、二圈罐壁和环板)都列在图 3、图 4 中。考虑到水下测量和充水时间较长(约半月余)的不利影响,可以认为实测的结果与计算曲线相符良好.

实测工作是由同济大学、力学研究所、华东石油学院及原石油化学工业部炼油设计院等单位于 1975 年 6 月共同完成.

(1978 年 7 月 27 日收到)

几何非线性情况下的 J 积分探讨

江 秉 琛

(重 庆 大 学)

本文把现行 J 积分的定义及特性推广到几何非线性的情况,并就裂纹尖端钝化造成的几何非线性,对现行 J 积分方法的有效性的影响进行初步探讨.

几何非线性情况下的 J^* 积分 图 1 所示为理想弹性体,具有贯穿厚度的直线裂纹,在给定的边界力 $\boldsymbol{T}^{*(d)}$ 及给定的边界位移 $\boldsymbol{u}^{(d)}$ 的作用下,处于平衡的二维变形场中.

如果在该物体中作出一条光滑曲线 Γ,它起始于裂纹下岸,沿逆时针方向环绕裂纹尖端而终止于裂纹上岸,则可定义如下曲线积分叫 J^* 积分:

$$J^* = \int_\Gamma (W^* n_k - T^*_m u_{m,k}) ds$$

其中,$W^* = \int \sigma^*_{ij} d\varepsilon_{ij}$ 是理想弹性体的应变能密度,σ^*_{ij} 是广义应力分量;$\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}(g_{mi}\, g_{mj} - \delta_{ij})$ 是应变分量,$g_{mi} = \delta_{mi} + u_{m,i}$,$\delta_{mi} = \begin{cases} 0 & 当\ m \neq i \\ 1 & 当\ m = i, \end{cases}$ $u_{m,l} = \partial u_m / \partial X_l$,$u_m$ 是位移沿座标 X_m 的分量;$T^*_m = \sigma^*_{ij} g_{mi} n_j$ 是沿曲线 Γ 所作的截面上的广义拉力分量,n_j 是曲线 Γ 的外法线对座标轴 X_j 的方向余弦;s 为曲线 Γ 的弧长;而 $m, i, j, k = 1, 2$.

现在来证明 J^* 积分与积分路径无关. 构成闭环路 $C = \Gamma_1 + bc - \Gamma_2 + da$(见图 1),沿该环路求积分并利用格林公式得

$$\begin{aligned}\oint (W^* n_k - T^*_m u_{m,k}) ds &= \oint (W^* n_k - \sigma^*_{ij} g_{mi} n_j u_{m,k}) ds \\ &= \int_V [W^*_{,k} - (\sigma^*_{ij} g_{mi} u_{m,k})_{,j}] dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial W^*}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij,k} - (\sigma^*_{ij} g_{mi})_{,j} u_{m,k} - \sigma^*_{ij} g_{mi} u_{m,kj}\right] dV = 0\end{aligned}$$

因为在 V 域内,满足无体力平衡方程 $(\sigma^*_{ij} g_{mi})_{,j} = 0$ 和无体力矩平衡条件 $\sigma^*_{ij} = \sigma^*_{ji}$;再注意到裂纹岸上不受力,且裂纹沿 X_k 方向,则得