

盘状星系对称面上的松卷螺旋密度波

徐 建 军

(中国科学院力学研究所)

摘 要

本文采用流体动力学模型,研究了有限厚度的盘状星系对称面上的松卷螺旋密度波.文中推出了准单色波传播的基本方程式,并以 Toomre ($N=2$)的质量模型为例进行了数据计算.结果表明:松卷螺旋密度波的特性与紧卷螺旋密度波有着相当明显的差别,一般说来,由于存在“松卷效应”,实波数的线性密度波总是不稳定的.对于曳型波而言,波将在共转圈内不断增长;在共转圈外不断衰减;对于导型波而言,则恰恰相反.

在林家翘的星系密度波理论中,采用“短波长近似”方法寻求渐近解占有重要地位.显然,这种解只对紧卷螺旋这种极限情形有效.然而实际星系螺旋结构并不都是紧卷的.因此,对于波长不十分短的密度波的处理,在理论上有着十分重要的意义.几年来,朝着这个目标,不少作者为找高一阶的近似解不断地作出了努力^[1-3].

本文从流体动力学模型出发,采用 Hankel 函数,用我们在另一文¹⁾中所提出的方法讨论有限厚度星盘对称面上的松卷螺旋密度波.

一、无量纲基本方程组

和文献[4]一样,假设星盘总质量为 M ,厚度为 δ ,半径范围为 R ,引力常数为 G ,以 (M, G, R, δ) 为特征量,将所有物理量无量纲化,我们可写出如下无量纲方程组:

$$\begin{cases} \varepsilon \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v)}{\partial \theta} + \frac{\rho u}{r} \right] + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\ \varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} \right] + w \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \left[M_r^2 a_r^2 \frac{\partial \ln \rho}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] = 0, \\ \varepsilon \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} \right] + w \frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon \left[\frac{M_{\theta a \theta}}{r} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] = 0, \quad (1.1) \\ \varepsilon \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + w \frac{\partial w}{\partial z} + \varepsilon a_z^2 \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \\ \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \rho \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \end{cases}$$

本文 1978 年 8 月 12 日收到.

1) 作者“盘状星系螺旋结构的流体动力学理论”一文(待发表).

其中 $\varepsilon = \frac{\delta}{R} \ll 1$, 其它符号与坐标系选择均与文献 [4] 中相同.

相对于基态

$$u_0 = 0, v_0 = r\Omega_0, w_0 = 0, \rho_0, \psi_0, \quad (1.2)$$

考虑一种不定常扰动运动. 令

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \psi = \psi_0 + \psi_1, u = u_1, v = v_0 + v_1, w = 0. \quad (1.3)$$

方程组 (1.1), 便化为:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_0 + v_1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \varphi_1 + (1 + \varphi_1) \left[\frac{u_1}{r} \left(1 + \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial \ln r} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right] = 0, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_0 + v_1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_1 - \frac{v_1^2 + 2v_0v_1}{r} + \frac{M_r^2 a_r^2}{1 + \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_0 + v_1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v_1 + u_1 \left(\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0 + v_1}{r} \right) + \frac{M_\theta^2 a_\theta^2}{r(1 + \varphi_1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = 0, \\ & \varepsilon a_z^2 \frac{\partial \ln(1 + \varphi_1)}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0, \\ & \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - \rho_1 \right] + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.4)$$

其中 $\varphi_1 = \rho_1/\rho_0$ 为相对扰动密度. 将基态、扰动态均展成 ε 的幂级数, 并考虑 Hankel 函数形式的小扰动解. 令

$$\rho_1 = \hat{\rho}_1(z) H_m(\zeta) e^{-i(\omega t - m\theta)}, \quad (1.5)$$

由泊松方程我们解得相应的扰动引力势:

$$\psi_1 = \hat{\psi}_1(z) H_m(\zeta) e^{-i(\omega t - m\theta)},$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \hat{\psi}_1(z) = -\frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon k |z - z_1|} \varepsilon \hat{\rho}_1(z_1) dz_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

这里要求 $k = \frac{d\zeta}{dr}$ 是 r 的缓变函数, 满足所谓“准单色波近似”条件. 即

$$\left| \frac{1}{k} \frac{d \ln k}{d \ln r} \right| \ll 1. \quad (1.7)$$

再按小参数 ε 作展开式:

$$e^{-\varepsilon k |z - z_1|} = 1 - \varepsilon k |z - z_1| + \dots, \quad (1.8)$$

可得:

$$\hat{\psi}_1(z) = -\frac{\hat{\sigma}_1}{2k} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |z - z_1| \varepsilon \hat{\rho}_1(z_1) dz_1 + \dots, \quad (1.9)$$

其中

$$\hat{\sigma}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \hat{\rho}_1(z_1) dz_1; \quad \sigma_1 = \hat{\sigma}_1 H_m(\zeta) e^{-i(\omega t - m\theta)}, \quad (1.10)$$

σ_1 为扰动投影面密度. 由此便得扰动引力势按 ε 展开的各阶近似:

$$\begin{cases} \psi_1^{(0)} = -\frac{\sigma_1^{(0)}}{2k}, \\ \psi_1^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |z - z_1| \rho_1^{(0)} dz_1 - \frac{\sigma_1^{(1)}}{2k}, \\ \vdots \end{cases} \quad (1.11)$$

将 (1.11) 式和 z 方向的运动方程联立, 便可推出:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \ln(1 + \varphi_1^{(0)})}{\partial z^2} + \alpha \varphi_0^{(0)} \varphi_1^{(0)} = 0, \\ \left. \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

其中 $\alpha = \frac{\rho_0^{(0)}(r, 0)}{a_z^2} = \frac{\rho_{00}^{(0)}}{a_z^2}$; $\varphi_0^{(0)} = \frac{\rho_0^{(0)}(r, z)}{\rho_0^{(0)}(r, 0)} = \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{z_*}\right)$ 是零级三维基态解中的相应量^[4], 只要给定在对称面 ($z = 0$) 上的扰动密度值

$$\varphi_1^{(0)}|_{z=0} = \frac{\rho_{10}^{(0)}}{\rho_{00}^{(0)}} = g_1, \quad (1.13)$$

由方程 (1.12) 便可以完全确定相对扰动 $\varphi_1^{(0)}$ 沿 z 轴的分布. 对于小扰动 $|g_1| \ll 1$, 将方程 (1.12) 线性化后可得解,

$$\varphi_1^{(0)} = p(z)g_1 = \left[1 - \left(\frac{z}{z_*}\right) \operatorname{th}\left(\frac{z}{z_*}\right)\right] g_1. \quad (1.14)$$

由此式, 就可得到我们所需要的扰动投影面密度与对称面上扰动体密度的关系式:

$$\sigma_1^{(0)} = 2\hat{z}_* \rho_{10}^{(0)}, \quad (1.15)$$

其中在我们采用的模型中:

$$\hat{z}_* = \int_0^\infty \varphi_0^{(0)}(z) p(z) dz = \frac{1}{2} z_*, \quad z_* = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}, \quad (1.16)$$

而对基态 $\sigma_0^{(0)} = 2z_* \rho_{00}^{(0)}$. 由于本文只考虑 ε 的零级近似, 故上标 (0) 以后均略去不计. 在方程组 (1.4) 的前三个方程中, 令 $z = 0$, 然后线性化, 我们还可得到对称面上的扰动运动方程:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) g_1 + u_1 \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial \rho_{00}}{\partial r}\right) + \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) u_1 - \frac{2v_0 v_1}{r} + M_*^2 a_r^2 \frac{\partial g_1}{\partial r} + \frac{\partial \phi_1}{\partial r} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) v_1 + u_1 \left(\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r}\right) + \frac{M_*^2 a_\theta^2}{r} \frac{\partial g_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

二、几种泊松方程渐近解的比较

前面我们写出了在准单色波近似下泊松方程的解. 在 ε 的零级近似下, 此解化为:

$$\psi_1 = -\frac{\sigma_1}{2k}.$$

再利用 (1.15) 式, 又可改写为:

$$\psi_1 = -\frac{\hat{z}_* \hat{\rho}_1(0)}{k} H_m(\zeta) e^{-i(\omega t - m\theta)}.$$

因此,根据条件 (1.7), 我们得到如下形式的泊松方程近似解:

$$\frac{d\phi_1}{dt} = G(\zeta)k\phi_1, \quad (2.1)$$

其中

$$G(\zeta) = \frac{H'_m(\zeta)}{H_m(\zeta)}.$$

这里,我们将解 (2.1) 与前人结果作一比较. 如所周知, Shu 等人^[1,3] 在“短波长”、“振幅缓变”条件下曾推得泊松方程渐近解.

1964 年, Shu 得:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial r} = -i\epsilon_1 \frac{\sigma_1}{2}; \quad (2.2)$$

1970 年, Shu 进一步修正, 得出:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial r} = -i\epsilon_1 \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\phi_1}{2r}; \quad (2.3)$$

1978 年, Bertin 等又推进了一步, 得到

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial r} + \frac{\phi_1}{2r} + i\epsilon_1 \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\frac{2}{Q}k_0r^2} \phi_1 = -\frac{i\epsilon_1}{2} \sigma_1. \quad (2.4)$$

在他们所采用的条件下, $\zeta \gg 1$. 利用 Hankel 函数渐近展开式

$$H_m(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} e^{i\epsilon(\zeta - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \frac{\left(\frac{1}{2} + m\right)_n \left(\frac{1}{2} - m\right)_n}{n!(2i\zeta)^n} \right] \quad (2.5)$$

可得到

$$G(\zeta) = i\epsilon - \frac{1}{2\zeta} + i\epsilon \frac{\frac{1}{4} - m^2}{2\zeta^2} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{2\zeta^3} + \dots, \quad (2.6)$$

其中

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{对应 } H_m^{(1)}(\zeta), \\ -1 & \text{对应 } H_m^{(2)}(\zeta). \end{cases}$$

如果近似地取 $\zeta = kr$, 则解式可写作

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial r} + \left(\frac{1}{2r} + i\epsilon \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{2kr^2} + \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{2k^2r^3} + \dots \right) \phi_1 = -\frac{i\epsilon}{2} \sigma_1. \quad (2.7)$$

注意到 Shu 等人所使用的符号意义:

$$\begin{cases} \rho_1 \sim e^{i\zeta + i(\omega t - m\theta)}, \\ \epsilon_1 = \text{Sgn}(\zeta), \end{cases} \quad (2.8)$$

及在我们这儿, $k > 0$. 比较 (2.4), (2.8) 式可推出 $\epsilon_1 = \epsilon$. 因此可见, Shu 和 Bertin 的结果 (2.2)–(2.4) 式只是解 (2.1) 式在短波条件下渐近展开式的前三项, 而且在 (2.4) 式中还近似

地取 $k = \frac{k_0}{Q}$.

三、对称面上波的传播方程

我们研究 $z = 0$ 平面上的准单色波, 考虑如下形式的特解:

$$\begin{cases} g_1 = \tilde{g}_1 H_m(\zeta) e^{-i(\omega t - m\theta)}, & \psi_1 = \tilde{\psi}_1 H_m(\zeta) e^{-i(\omega t - m\theta)}, \\ u_1 = \tilde{u}_1(r) H_m(\zeta) e^{-i(\omega t - m\theta)}, & v_1 = \tilde{v}_1(r) H_m(\zeta) e^{-i(\omega t - m\theta)}, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中
$$\tilde{g}_1 = \frac{\hat{\rho}_1(0)}{\rho_{00}}, \quad \tilde{\psi}_1 = -\frac{\hat{z}_* \hat{\rho}_1(0)}{k}, \quad g_1 = \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}}. \quad (3.2)$$

将 (3.1) 式代入方程组 (1.17), 我们推得波的传播方程:

$$\begin{aligned} G \frac{dk}{dr} + Fk^2 + k \left\{ -F \frac{2k_0}{Q} + G(R_{10} + R_{11}) \right\} - \frac{\kappa^2(1 - \nu^2)}{M_r^2 a_r^2} + (R_{00} + R_{01}) \\ - G \frac{2k_0}{Q} (R_{20} + R_{21}) + \frac{1}{k} \frac{2k_0}{Q} (R_{30} + R_{31}) = O\left(\frac{1}{k} \frac{d \ln k}{dr}\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

或改写为:

$$\begin{aligned} \frac{G}{k_0} \frac{dx}{dr} + Fx^2 + x \left\{ -\frac{2F}{Q} + \frac{G}{k_0} \left[\frac{d}{dr} (Q \hat{z}_* r) + R_{11} \right] \right\} - (1 - \nu^2) \\ + \frac{1}{k_0^2} (R_{00} + R_{01}) - \frac{2G}{Q} \frac{R_{20} + R_{21}}{k_0} + \frac{1}{k_0 x} \frac{2}{Q} (R_{30} + R_{31}) = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中符号表示:

$$\left\{ \begin{aligned} F &= G^2 + G', \quad x = \frac{k}{k_0}, \quad k_0 = \frac{\kappa}{M_r a_r}, \quad Q = \frac{2\kappa M_r a_r}{\hat{z}_* \rho_{00}}, \quad \frac{\rho_{00} \hat{z}_*}{M_r^2 a_r^2} = \frac{2k_0}{Q}, \\ e^2 &= \frac{M_r^2 a_r^2}{M_\theta^2 a_\theta^2}, \quad \nu = \frac{\omega - m\Omega_0}{\kappa}, \quad \kappa^2 = 4\Omega_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega_0}{d \ln r} \right), \\ R_{00} &= -\frac{d^2 \ln \rho_{00}}{dr^2} - \left(\frac{d \ln \rho_{00}}{dr} \right) \frac{d}{dr} \ln (M_r^2 a_r^2) - \frac{1}{e^2} \left(\frac{m^2}{r^2} \right), \\ R_{01} &= \frac{1}{\kappa \nu} \left[\frac{2m\Omega_0}{e^2 r} \frac{d}{dr} \ln \left(\frac{\kappa^2(1 - \nu^2)}{M_\theta^2 a_\theta^2 \Omega_0} \right) - \frac{d(\kappa \nu)}{dr} \frac{d \ln \rho_{00}}{dr} - \frac{m}{r} \left(\frac{\kappa^2}{2\Omega_0} \right) \frac{d \ln \rho_{00}}{dr} \right] \\ &\quad + \frac{d \ln \rho_{00}}{dr} \frac{d}{dr} \ln \kappa^2(1 - \nu^2), \\ R_{10} &= \frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \ln \left(\frac{M_r^2 a_r^2}{\rho_{00}} \right), \quad R_{11} = \frac{1}{\kappa \nu} \left[\frac{d(\kappa \nu)}{dr} + \frac{m}{r} \frac{\kappa^2}{2\Omega_0} - \frac{2m\Omega_0}{e^2 r} \right] - \frac{d}{dr} \ln \kappa^2(1 - \nu^2), \\ R_{20} &= \frac{d}{dr} \ln(\rho_{00} \hat{z}_* r), \quad R_{21} = \frac{1}{\kappa \nu} \left[\frac{d(\kappa \nu)}{dr} - \frac{m\Omega_0}{r} \frac{d \ln \Omega_0}{d \ln r} \right] - \frac{d}{dr} \ln \kappa^2(1 - \nu^2), \\ R_{30} &= \left(\frac{m}{r} \right)^2, \quad R_{31} = \frac{1}{\kappa \nu} \left(\frac{2m\Omega_0}{r} \right) \frac{d}{dr} \ln \frac{\rho_{00} \hat{z}_* \Omega_0}{\kappa^2(1 - \nu^2)}. \end{aligned} \right. \quad (3.5)$$

另外, 按 Bessel 函数理论, 可得:

$$\left. \begin{aligned} g(\zeta) &= \frac{H_{m-1}(\zeta)}{H_m(\zeta)} = \frac{1}{J_m^2 + Y_m^2} [(J_{m-1} J_m + Y_{m-1} Y_m) + i e (J_m Y_{m-1} - J_{m-1} Y_m)], \\ G(\zeta) &= g(\zeta) - \frac{m}{\zeta}, \quad F(\zeta) = -1 - \frac{g(\zeta)}{\zeta} + \frac{m^2 + m}{\zeta^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

以及

$$g_R(-|\zeta|) = -g_R(|\zeta|), \quad g_I(-|\zeta|) = g_I(|\zeta|),$$

其中下标 R, I 分别表示实部虚部。利用 Bessel 函数表^[5], 便可作出 g, G, F 随 ζ 的变化规律 (见图 1-3)。

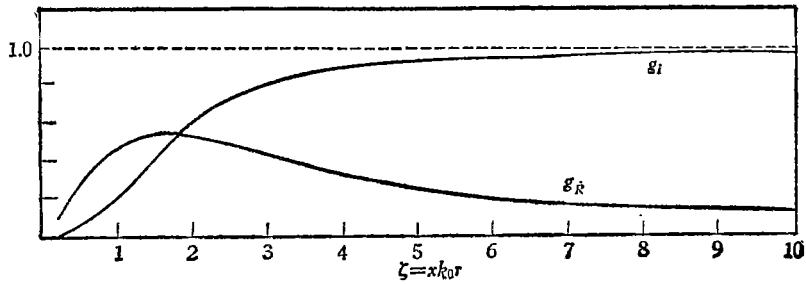


图 1 $g(\zeta)$ 随 ζ 的变化规律

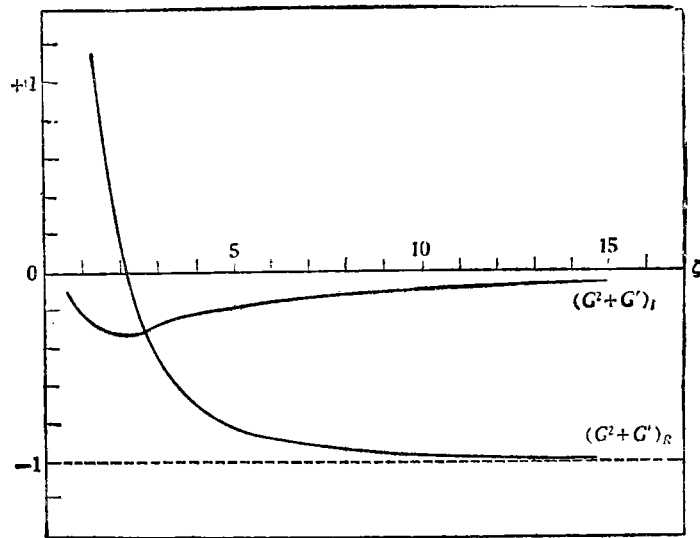


图 2 $F(\zeta)$ 随 ζ 的变化规律

在准单色波近似条件下寻求局部解, 可将方程 (3.3) 的微分项忽略不计, 由此得色散关系,

$$F x^2 + x \left\{ -\frac{2F}{Q} + \frac{G}{k_0} (R_{10} + R_{11}) \right\} - (1 - v^2) + \frac{R_{v0} + R_{v1}}{k_0^2} - \frac{2G}{Q} \frac{R_{20} + R_{21}}{k_0} + \frac{1}{k_0 x} \frac{2}{Q} (R_{30} + R_{31}) = 0. \quad (3.7)$$

要注意, 准单色波近似条件 (1.7) 式比 Lin 等人采用的短波长近似条件

$$|kr| \gg 1, \quad \left| \frac{d \ln k}{d \ln r} \right| = 0(1) \quad (3.8)$$

要宽, 它既可包括紧卷螺旋, 又可包括松卷螺旋。下面, 我们就从色散关系 (3.7) 式出发讨论松卷螺旋密度波。

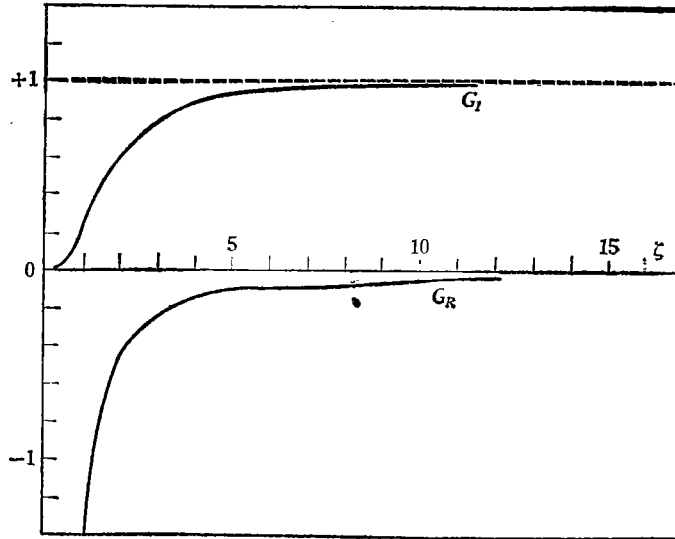


图 3 $G(\xi)$ 随 ξ 的变化规律

四、松卷螺旋密度波的计算与讨论

假定 $k_0 r \geq 1$, 但是 $\left| \frac{1}{k_0} \frac{d \ln k_0}{dr} \right| \ll 1$ 成立. 在星盘比较靠里的部位往往如此. 色散关系 (3.7) 式中有奇点 $v = 0, \pm 1$, 其影响表现在系数 $R_{01}, R_{11}, R_{21}, R_{31}$ 上. 如果我们接受 Lin 在处理自由密度波时所采用的观念, 暂不考虑这些奇异性的影响, 则得到:

$$v^2 = - \left[F + \frac{Gr}{\zeta} R_{10} \right] x^2 + \frac{2}{Q} x \left[F + \frac{Gr}{\zeta} R_{20} \right] + 1 - \frac{R_{00}}{k_0^2} - \frac{2}{Q} \frac{R_{30}}{k_0^2 x}. \quad (4.1)$$

我们仍然近似地取 $\zeta = kr$, 由 (4.1) 式便可确定出:

$$v = v(r, x).$$

对于每一固定半径 r , 对应不同实波数 k (或 x) 便可得到不同的频率 v . 由于 G, F 均为复函数, 因此 $v = v_R + iv_I$ 亦是个复数. 由此推出, 这种实波数的松卷螺旋密度波总是不稳定的.

作为计算实例, 我们取 $N = 2$ 的 Toomre 基态质量模型, 并取特征量 $U_0 = V_{\max}$; $R = \frac{4\pi GM}{U_0^2}$ 进行无量纲化, 从而得出:

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega_0(r) &= \frac{b^{1/2}}{(a^2 + r^2)^{3/4}}, & \sigma_0(r) &= \frac{d}{(a^2 + r^2)^{3/2}}, \\ \kappa(r) &= \frac{2b^{1/2}}{(a^2 + r^2)^{3/4}} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{r^2}{a^2 + r^2} \right]^{1/2}, \\ k_0(r) &= \frac{k_0(0)}{4} \left[1 + 3 \frac{a^2}{a^2 + r^2} \right], & k_0(0) &= \frac{z_*}{z_*} \frac{1}{Q} \frac{4b}{d}, \\ a &= 0.02166, & a^2 &= 4.96 \times 10^{-4}, & b &= 0.07958, & d &= 0.003447, \\ \frac{z_*}{z_*} &= 0.5, & k_0(0) &= \frac{184.68}{Q}. \end{aligned} \right. \quad (4.2)$$

特别地,以 $Q \equiv 1$ 为例. 由表 1 看出,在物质分布的主要范围内 ($0.02 < r < 0.3$) 短波长近似条件 ($k_0 r \gg 1$) 是不满足的. 但相反,准单色波近似条件却能很好成立.

表 1 $Q \equiv 1$

r	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.3	0.5	0.7
$k r$	2.44	3.13	3.78	4.49	5.27	14.1	23.2	32.4
σ_0	128.52	35.92	13.15	6.02	3.21	0.13	0.03	0.01

对于不同 Q 值 ($Q \equiv 0.8, 1, 1.2$), 我们进行了数值计算 (图 4a—c). 图 4b 中作出了对应 $Q \equiv 1$ 时的结果, 由图看出此结果与短波长近似给出的结果相差甚大. 我们把这种差别称为“松卷效应”, 因此松卷效应表现为:

1. 在共转圈两侧引起了空间的不稳定性. 考察 $Q \equiv 1$ 时的色散曲线, 短波长近似给出的结果是 $x = 1 \pm |v_R|$. 这相当于图上相交的两条直线. 而松卷螺旋波的色散曲线, 只在短波分支上逐渐趋于相应直线, 并在共转圈两侧出现间隙. 这说明, 在此区域内不存在实的波数, 这种情形与 $Q > 1$ 时短波长近似给出的色散曲线类似.

2. 对任意实波数的螺旋波造成了关于时间的不稳定性. 从计算知, 对任一实波数 x , 可得复频率 $\nu = \nu_R + i\nu_I$, 其虚部 ν_I 的符号如表 2 所示.

表 2

ν_I	$\epsilon = -1$	$\epsilon = +1$
$\nu_R > 0$	+	-
$\nu_R < 0$	-	+

注意: $\epsilon = +1$, 相当于曳波, 因为当 $|\zeta| \rightarrow \infty$ 时,

$$H_m^{(2)}(\zeta) e^{-i(\omega t - m\theta)} \sim e^{+i \int k_0 x dr - i(\omega t - m\theta)} (x > 0).$$

而 $\epsilon = -1$, 则相当于导波. 可见, 在共转圈内, 曳波不断增长, 在共转圈外, 曳波不断衰减; 而导波则相反. 这样, 假如存在导波宏图的话, 这种波在共转圈内 (物质密度最为集中的区域) 很快衰减而维持不住, 而在共转圈外, 还不能满足无穷远处衰减为零的条件. 这种情况, 可以用来解析星系螺旋结构的曳波优势.

下面, 我们再对波的增长速率进行讨论. 由于松卷效应所造成的不稳定性, 给波的振幅带来一个放大因子, $f = e^{\omega t} = e^{\kappa \nu_I t}$. 当 t 经过 $\frac{1}{\kappa \nu_I}$ 之后, 振幅增长 e 倍. 为回到有量纲量去, 我们取:

$$M = 4 \times 10^{44} g, \quad U_0 = 250 \text{ 公里/秒},$$

则得 $R = 180$ 千秒差距, $T = \left(\frac{R}{U_0}\right) = 0.72 \times 10^9$ 年. 以 $Q \equiv 1$ 为例, 算出不同半径 r 处的 ν_I 值 (见图 5). 取在 $1 < x < 2$ 的区间上的 ν_I 的中间值为代表, 便可算出不同 r 处的波的增长速率. 其值如表 3 所示. 可见 r 越小, 增长速率越大. 另一方面, 计算还表明: Q 值越大,

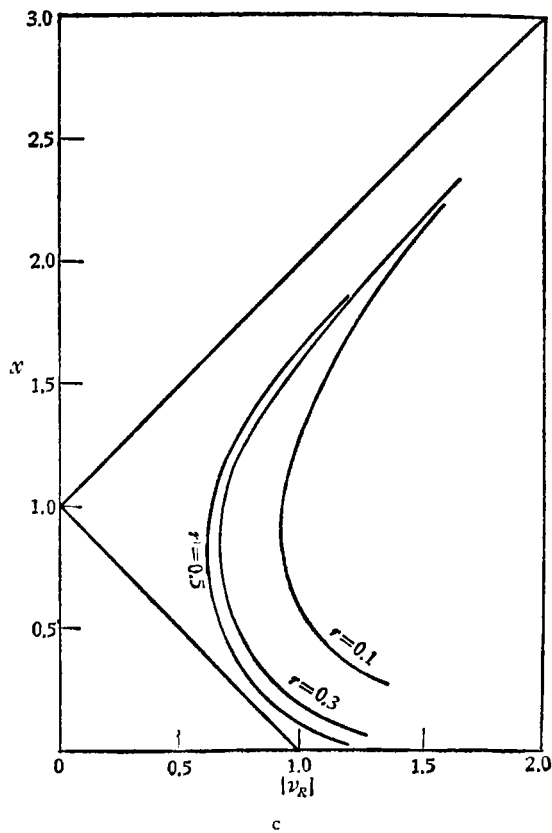
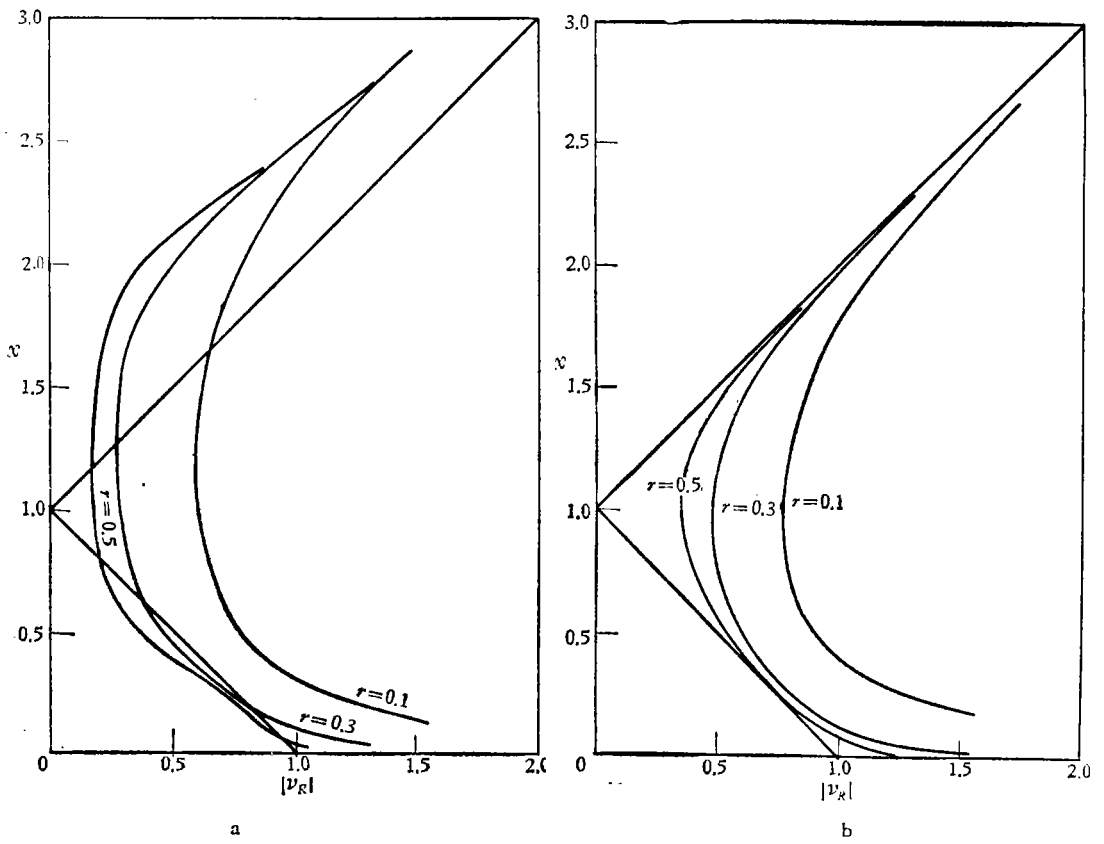
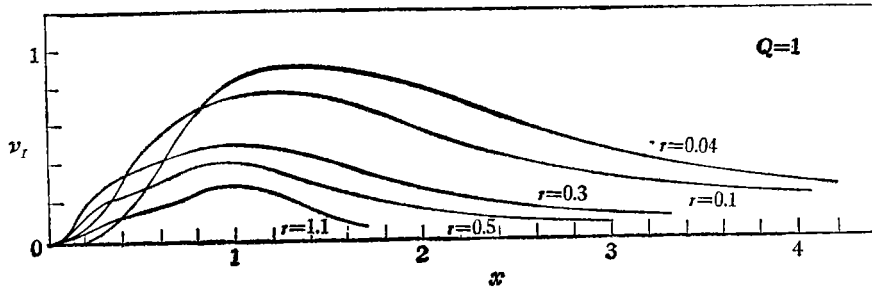


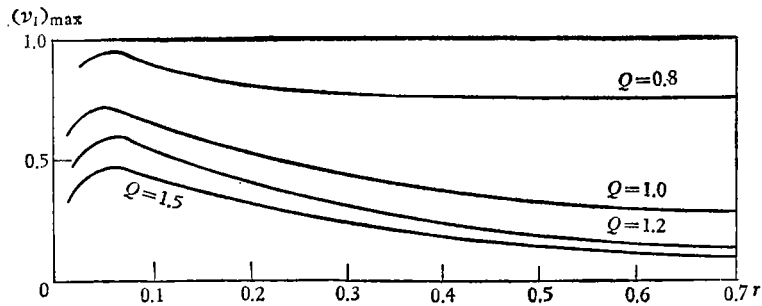
图4 色散关系曲线

a. $Q=0.8$, b. $Q=1.0$, c. $Q=1.2$

图5 不同半径 r 时, ν_I 随 x 的变化规律表3 $Q \equiv 1$

r	0.04	0.06	0.08	0.1	0.3
Q_0	28.79	17.42	11.79	8.60	1.71
κ	37.66	20.34	13.00	9.19	1.72
ν_I	0.70	0.65	0.60	0.55	0.31
t (年)	5.06×10^7	8.53×10^7	1.31×10^8	1.42×10^8	1.37×10^9

增长速率越小(图6)。因此,如果选取 Q 值的一种分布,使得 r 越小时, Q 越大,那么便能得到以同一个速率增长的曳波型螺旋结构(此增长速率保持在 10^8 年的数量级内)。因为这种波的增长率各处相同,所以能满足准稳的要求。这种增长的曳波型螺旋结构是能维持住的。

图6 不同 Q 值时, $\{\nu_I\}_{\max}$ 随 r 的变化规律
($\{\nu_I\}_{\max}$ 为 ν_I 相对于波数 x 的极大值)

这里要指出的是,“短波长近似”把引力实质上简化为一种局域性作用力,而准单色波近似解却克服了这个缺点,更多地考虑了引力作为一种长程力所具有的全局性影响——即松卷效应。这样,Toomre (1969) 对中性紧卷密度波所提出的维持问题在我们这里就不会出现了。由于松卷效应所引起的波的增长完全足以抵偿群速度所可能引起的能量耗散。

最后,还要说明的是,我们采用的是线性方程。因此当扰动振幅增大到一定程度后,由于非线性效应的出现,波的振幅将维持为一定大小,而不会无限增长下去。我们的结果只描述了扰动的初始发展阶段。

本文曾得到谈镐生教授的热情鼓励与指导,得到钱伟长教授的热情帮助,并与胡文瑞同志进行过多次有益的讨论,特此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] 徐遐生, *Astrophys. J.*, **160** (1970), 99.
- [2] 李启斌、韩念国、林家翊, 中国科学, 1976, 4, 421.
- [3] Bertin, G. & Mark, J. M-K., 1978, to be published.
- [4] 徐建军, 盘状星系的三维基态, 天文学报, 1979 年(待发表).
- [5] Milton Abramowitz & Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, 1965, 358—398.