地幔热柱上升运动的流体动力学模式

关德相 李荫亭
(中国科学院力学研究所)

薛 恩
(中国科学院地质研究所)

摘 要

关于热点下面地幔热柱 (Plume) 上升运动的研究，对于开发地热资源，了解火山、地震的成因，以及大陆漂移的驱动力等问题，具有十分重要的意义. 本文给出了热柱上升运动的较完整的流体动力学描述，算出了热柱的大小，热柱上升运动的最大温差、最大速度，以及热柱向岩石圈所传送的热量，其结果与现有的地学观测数据相符合.

一、引 言

近年来，地球表面的热点现象越来越引起地学家们的注意[1-3]. 所谓热点就是指地球上100多个孤立的火山活动小区域，在这些区域除火山活动外，地表热流值也很高. 热点具有如下特征：(1)热点的分布不一定都处在板块的边缘，有许多也位于板块的内部；(2)在热点地区火山喷出的熔岩是包含较多碱金属（锂、钾、钠等)的玄武岩，说明这是来自岩石圈以下几百公里深处的地幔物质；(3)热点都锚定在地球的深层，不随板块一起运动，因此地表往往留下死火山的痕迹.

根据这些特点，人们推测热点可能是地幔热柱引起的地表现象. 热柱是指一种上升的圆柱状高温物质流. 热柱可能是从岩石圈以下几百公里的地幔内上涌出来的[4]. 至于上涌的机制，多数人则认为是由于地幔物质的自然对流：热物质在浮力作用下上升到岩石圈下表面，然后侧向散开并冷却，最后返回地球内部. 文献 [5] 指出，假若难以想像的固体岩石能以此种方式做十分缓慢的、粘滞的运动，那么计算这一运动如何进行就更为困难了. 因此，地幔热柱的想法虽然已经提出多年，但一直尚未见到关于热柱上升运动的较严格的动力学解释.

虽然文献 [2] 中曾试图估算这种运动，但是它存在两方面的问题：(1)只分析单个热球的上升运动，没有详细考虑热柱的问题；(2)没有考虑自然对流中的一个非常重要的效应——传热对运动的影响. 在文献[6]中，虽然注意到了上升运动的柱状结构，但是，也没有考虑传热对运动的影响. 因此，不能期望文献[2]和[6]的计算结果会与实际观测完全一致.

二、地幔热柱上升流动的基本方程

地幔流动满足普遍的流体力学方程组. 这组方程用张量符号可写为:

本文 1979 年 2 月 5 日收到.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \tag{2.1}$$

$$\rho c_p \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)_s \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + H + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{2.3}$$

状态方程可写成:

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)], \tag{2.4}$$

其中 ρ 是密度; u_i 是速度分量, T 是温度, c_p 是定压比热, κ 是导热率, H 是由放射性衰变引起的内部热生成率, τ_{ij} 是切应力张量, Ω_j 是地球角速度分量, π 是压力, α 是热膨胀系数, $(\Delta T)_s$ 是绝热温度梯度、Φ 是旋转坐标系中的引力势,即

$$\Phi = G + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}|^2, \tag{2.5}$$

其中 G 是引力势能, $\boldsymbol{\Omega}$ 是地球角速度向量, $\boldsymbol{r}$ 是位置向量.

采用与文献[7]第二、三节中相类似的假设及物理分析,并把二维平面流动假设改为轴对称柱形流动假设,则方程(2.1)—(2.3)变为:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \rho g \alpha (T - T_\infty) = 0, \tag{2.6}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial r} = k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r} \right), \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.8}$$

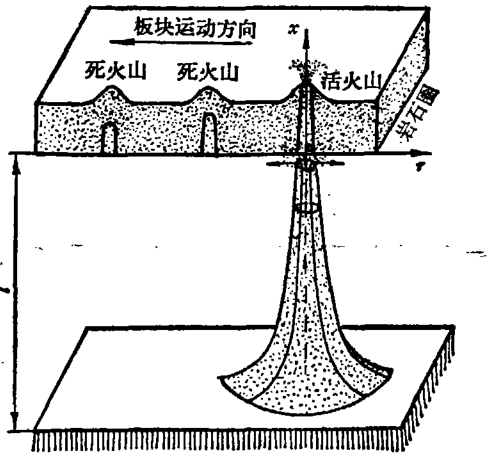

图 1 地幔热柱上升流动示意图

其中 u, v 分别为 x 和 r 方向的速度分量(x, r 的座标如图 1 所示), μ 为粘性系数, g 为重力加速度, T_∞ 为静止的环境温度, $k = \frac{\kappa}{\rho c_p}$ 称为导温系数.

如果假设粘性系数 μ 为常数,则方程(2.6)可写为:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\rho g \alpha}{\mu}(T - T_\infty) = 0. \tag{2.9}$$

方程(2.7)—(2.9)就是上升流动参数 u, v, T 所满足的微分方程组.下面我们将从这一方程组出发,求解地幔热柱上升流动问题.

三、上升流动微分方程组的解

仿照 Karman-Pohlhausen 的单参数近似方法,令

$$\varphi = \frac{u}{u_w} = a_0 + a_1\eta_u + a_2\eta_u^2 + a_3\eta_u^3 + a_4\eta_u^4, \tag{3.1}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = b_0 + b_1\eta_T + b_2\eta_T^2 + b_3\eta_T^3 + b_4\eta_T^4, \tag{3.2}$$

其中下标“w”代表轴线参数，下标“∞”代表环境参数．a_i, b_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) 为常数，而

$$\eta_u = \frac{r}{\delta_u}, \tag{3.3}$$

$$\eta_T = \frac{r}{\delta_T}, \tag{3.4}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta_T}{\delta_u}, \tag{3.5}$$

其中 δ_u, δ_T 分别为上升流动的速度半径和温度半径，它们仅是 x 的函数．因为上升运动的驱动力是浮力，所以 $\delta_u \geqslant \delta_T$，即 $\varepsilon \leqslant 1$．

由速度必须满足的边界条件，得到

$$\text{当 } \eta_u = 1 \text{ 时}, \ \varphi = 0, \tag{3.6}$$

$$\text{当 } \eta_u = 0 \text{ 时 } \varphi = 1, \ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_u} = 0. \tag{3.7}$$

由温度必须满足的边界条件，得到

$$\text{当 } \eta_T = 1 \text{ 时}, \ \theta = 0, \tag{3.8}$$

$$\text{当 } \eta_T = 0 \text{ 时}, \ \theta = 1, \ \frac{\partial\theta}{\partial\eta_T} = 0. \tag{3.9}$$

由方程(3.1)和(3.7)得出：

$$\varphi = \frac{u}{u_w} = 1 + a_2\eta_u^2 + a_3\eta_u^3 + a_4\eta_u^4. \tag{3.10}$$

将方程(3.10)代入方程(2.9)，得到

$$\frac{u_w}{\delta_u^2}(4a_2 + 9a_3\eta_u + 16a_4\eta_u^2) + \frac{\rho g\alpha}{\mu}(T - T_\infty) = 0. \tag{3.11}$$

将方程(3.11)对 η_u 取微分，得到

$$\frac{u_w}{\delta_u^2}(9a_3 + 32a_4\eta_u) + \frac{\rho g\alpha}{\mu}(T_w - T_\infty)\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial\eta_T} = 0. \tag{3.12}$$

将方程(3.12)在 $\eta_u = \eta_T = 0$ 点取值，得出 $a_3 = 0$．再利用方程(3.6)，可将方程(3.10)简化为：

$$\varphi = \frac{u}{u_w} = 1 + a_2\eta_u^2 - (1 + a_2)\eta_u^4. \tag{3.13}$$

同理可以得出：

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = 1 + b_2\eta_T^2 - (1 + b_2)\eta_T^4. \tag{3.14}$$

将方程(3.14)，(3.5)和 $a_3 = 0$，$a_4 = -(1 + a_2)$ 代入方程(3.11)，比较系数，可得出：

$$4a_2 = -\frac{\rho g\alpha(T_w - T_\infty)}{\mu u_w}\delta_u^2, \tag{3.15}$$

$$b_2 + 1 = 0, \tag{3.16}$$

$$-4(1 + a_2)\varepsilon^2 - a_2 b_2 = 0. \tag{3.17}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

当 $\delta_T \leqslant r \leqslant \delta_u$ 时，$(T - T_\infty) = 0$，由方程(2.9)得出：

$$\frac{u}{u_T} = \frac{\ln \frac{r}{\delta_u}}{\ln \varepsilon}. \tag{3.18}$$

根据在 $r = \delta_T$ 时，$\frac{\partial u}{\partial r}$ 的连续条件，不难得出：

$$[-4(1 + a_2)\varepsilon^4 + 2a_2\varepsilon^2]\ln\varepsilon = 1 + a_2\varepsilon^2 - (1 + a_2)\varepsilon^4. \tag{3.19}$$

由方程(3.16)，(3.17)，(3.19)解出：

$$a_2 = -\frac{4}{3}, \quad b_2 = -1, \quad \varepsilon = 1.$$

因而，$\delta_u = \delta_T = \delta$，$\eta_u = \eta_T = \eta$. 于是，方程(3.13)，(3.14)变为：

$$\varphi = \frac{u}{u_w} = 1 - \frac{4}{3}\eta^2 + \frac{1}{3}\eta^4, \tag{3.20}$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = 1 - \eta^2 \tag{3.21}$$

方程(3.15)变为：

$$\delta^2 = \frac{16}{3}\frac{\mu u_w}{\rho g\alpha(T_w - T_\infty)}. \tag{3.22}$$

将方程(3.21)代入(2.7)，并在 $r = 0$ 处取值，得出：

$$\delta^2 = \frac{4k(T_w - T_\infty)}{u_w \frac{dT_w}{dx}}. \tag{3.23}$$

由方程(3.22)和(3.23)求出

$$\delta^4 = \frac{64k\mu}{3\rho g\alpha\left(-\frac{dT_w}{dx}\right)}, \tag{3.24}$$

$$u_w^2 = \frac{3\rho g\alpha k(T_w - T_\infty)^2}{4\mu\left(-\frac{dT_w}{dx}\right)}. \tag{3.25}$$

利用方程(2.7)，(2.8)和 φ，θ 的定义，不难得出：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\theta) + \left[\frac{1}{T_w - T_\infty}\frac{d(T_w - T_\infty)}{dx} + \frac{1}{u_w}\frac{du_w}{dx}\right]\theta\varphi + \frac{dT_\infty/dx}{T_w - T_\infty}\varphi + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{u_w}\theta\right)$$
$$+ \frac{1}{u_w}\frac{v}{r}\theta = \frac{k}{u_w(T_w - T_\infty)}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial r}\right]. \tag{3.26}$$

将方程(3.20)和(3.21)代入方程(3.26)，并在 $[0, \delta]$ 区间上对 r 积分，得出

$$\frac{160}{315}\frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dx} + \frac{160}{315}\left[\frac{1}{T_w - T_\infty}\frac{d(T_w - T_\infty)}{dx} + \frac{1}{u_w}\frac{du_w}{dx}\right] + \frac{196}{315}\frac{dT_w/dx}{T_w - T_\infty}$$
$$- \frac{24}{315}\frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dx} - \frac{92}{315}\frac{1}{u_w}\frac{du_w}{dx} = -\frac{4k}{u_w\delta^2}.$$

再利用方程(3.24)和(3.25)，上式可写为：

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{68}{315}\frac{d^2T_w/dx^2}{dT_w/dx}+\frac{87}{315}\frac{1}{T_w-T_\infty}\frac{d(T_w-T_\infty)}{dx}+\frac{119}{315}\frac{1}{T_w-T_\infty}\frac{d(T_w-T_\infty)}{dx}=0. \tag{3.27}$$

令 $Z=T_w-T_\infty$, $\frac{dT_\infty}{dx}=-\beta=$常数,则上式可写为:

$$68\,ZZ''+87\,Z'^2-206\,\beta Z'+119\,\beta^2=0, \tag{3.28}$$

其中“′”和“″”分别表示对 x 的一阶和二阶导数. 方程(3.28)的边界条件为:

$$\text{当}\quad x=0\quad\text{或}\quad x=-l\ \text{时},\quad Z=0. \tag{3.29}$$

再令 $x=l\tilde{x}$, $Z=\beta l\tilde{Z}$, 则 $Z'=\beta\tilde{Z}'$, 而方程(3.28)和(3.29)变为:

$$\begin{cases}68\,\tilde{Z}\tilde{Z}''+87\,\tilde{Z}'^2-206\,\tilde{Z}'+119=0,\\ \tilde{Z}=0,\quad \text{当}\ \tilde{x}=0\ \text{或}\ \tilde{x}=-1\ \text{时}.\end{cases} \tag{3.30}$$

方程 (3.30)为二阶非线性常微分方程的边值问题. 幸运的是可以求出如下的分析解:

$$\tilde{Z}=\frac{(1-\tilde{\omega})^{\frac{17}{8}}\left(\frac{119}{87}-\tilde{\omega}\right)^{-\frac{2023}{696}}}{\frac{68}{87}\int_{-\infty}^{1}(1-\tilde{\omega})^{\frac{783}{696}}\left(\frac{119}{87}-\tilde{\omega}\right)^{-\frac{2719}{696}}d\tilde{\omega}}\quad(-\infty<\tilde{\omega}\leqslant 1), \tag{3.31}$$

$$\tilde{x}=\frac{-\int_{-\infty}^{\tilde{\omega}}(1-\tilde{\omega})^{\frac{783}{696}}\left(\frac{119}{87}-\tilde{\omega}\right)^{-\frac{2719}{696}}d\tilde{\omega}}{\int_{-\infty}^{1}(1-\tilde{\omega})^{\frac{783}{696}}\left(\frac{119}{87}-\tilde{\omega}\right)^{-\frac{2719}{696}}d\tilde{\omega}}\quad(-\infty<\tilde{\omega}\leqslant 1), \tag{3.32}$$

其中 $\tilde{\omega}=d\tilde{Z}/d\tilde{x}$. 像在文献[7]中一样,除在 $\tilde{x}=0$ 和 $\tilde{x}=-1$ 附近的极小区域外,上面的解在地幔热柱上升运动区域均可适用.

四、计算结果及讨论

根据方程(3.31)和(3.32)可以求出,$\tilde{Z}$ 和 $\tilde{x}$ 随 $\tilde{\omega}$ 的变化. 表 1 给出了它们的典型数

表 1　$\tilde{Z}$ 和 $\tilde{x}$ 随 $\tilde{\omega}$ 的变化 $(-\infty<\tilde{\omega}\leqslant 1)$

$\tilde{\omega}$	$\tilde{Z}$	$\tilde{x}$	$\tilde{\omega}$	$\tilde{Z}$	$\tilde{x}$
1	0	−1	0.1000	0.5332	−0.1690
0.9500	0.02889	−0.9970	0.0500	0.5345	−0.1515
0.9000	0.09073	−0.9902	0	0.5349	−0.1356
0.8500	0.1599	−0.8234	−0.0500	0.5345	−0.1210
0.8000	0.2253	−0.7441	−0.1000	0.5335	−0.1075
0.7500	0.2833	−0.6694	−0.1500	0.5320	−0.09513
0.7000	0.3329	−0.6011	−0.2000	0.5300	−0.08370
0.6500	0.3744	−0.5397	−0.2500	0.5276	−0.07312
0.6000	0.4089	−0.4847	−0.3000	0.5250	−0.06331
0.5500	0.4372	−0.4356	−0.3500	0.5220	−0.05420
0.5000	0.4602	−0.3917	−0.4000	0.5188	−0.04573
0.4500	0.4789	−0.3526	−0.4500	0.5154	−0.03783
0.4000	0.4938	−0.3175	−0.5000	0.5119	−0.03045
0.3500	0.5056	−0.2861	−0.5500	0.5083	−0.02355
0.3000	0.5149	−0.2577	−0.6000	0.5046	−0.01710
0.2500	0.5219	−0.2322	−0.6500	0.5008	−0.01104
0.2000	0.5271	−0.2091	−0.7000	0.4969	−0.005349
0.1500	0.5308	−0.1881	−∞	0	0

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

值．此外，方程(3.24)和(3.25)还可以写成如下的无量纲形式：

$$\tilde{\delta}=\delta\Big/\sqrt[4]{\frac{64k\mu}{3\rho g\alpha\beta}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1-\tilde{\omega}}}\quad(-\infty<\tilde{\omega}\leqslant 1),\tag{4.1}$$

$$\tilde{u}_w=u_w\Big/\sqrt{\frac{3\rho g\alpha k\beta l^2}{4\mu}}=\frac{\tilde{Z}}{\sqrt{1-\tilde{\omega}}}(-\infty<\tilde{\omega}\leqslant 1).\tag{4.2}$$

利用表 1 中的数值，不难求出 $\tilde{Z}$，$\tilde{\delta}$ 和 $\tilde{u}_w$ 随 $\tilde{x}$ 的变化．

图 2 给出 $\tilde{Z}$ 随 $\tilde{x}$ 的变化曲线．$\tilde{x}$ 为负值表明上升运动处在岩石圈以下（图 1）．当 $\tilde{x}=-1$ 时，$\tilde{Z}=0$，上升熔岩从这里起动．因此，称 l 为起动深度．随着 $\tilde{x}$ 的增加（绝对值减小），$\tilde{Z}$ 也增加．当 $\tilde{x}$ 达到 -0.1356（对应于 $\tilde{\omega}=0$）时，$\tilde{Z}$ 为极大值(0.5349)．$\tilde{x}$ 再继续增加，$\tilde{Z}$ 缓慢下降．但是，在 $\tilde{x}=0$ 处，$\tilde{Z}$ 出现突变．从方程(3.32)可以看出，当 $\tilde{x}=0$ 时，$\tilde{\omega}\to-\infty$ 为奇点．所以，在以后讨论 $\tilde{x}=0$ 处的参数时，我们将近似用 $\tilde{x}=-0.0100$ 来代替．此时，$\tilde{Z}=0.5000$．由于在 $\tilde{x}=0$ 处，温度曲线变化十分陡峭，所以地幔热柱向岩石圈传送的热量是十分巨大的．热柱好像"热钻"一样，不断向上开凿，一旦将岩石圈板块凿通，熔岩便大量外溢，形成火山．火山形成以后，方程(3.30)的边界条件发生变化，使得向板块传送的热量降低，火山便逐渐减弱以致熄灭．如此循环下去，在地表形成火山链（见图 1）．

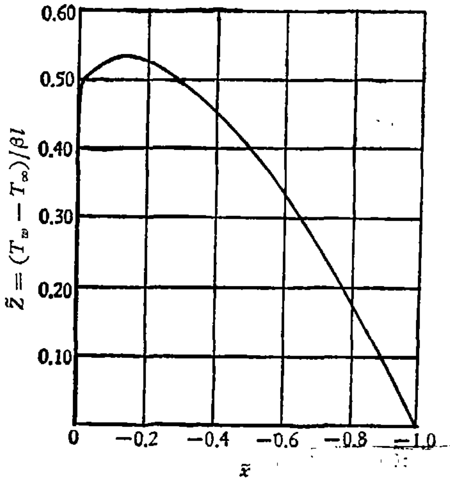

图 2 $\tilde{Z}$ 随 $\tilde{x}$ 的变化曲线

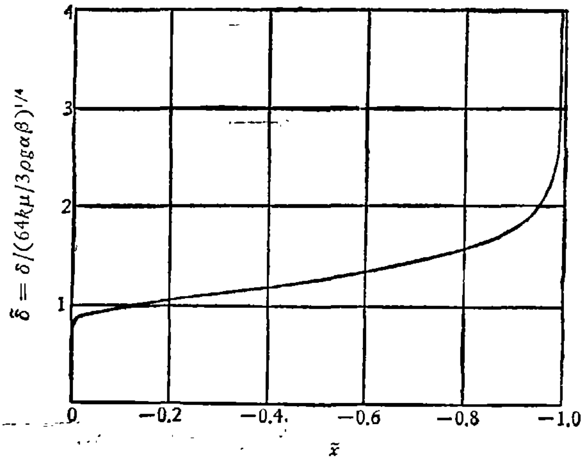

图 3 $\tilde{\delta}$ 随 $\tilde{x}$ 的变化曲线

图 3 给出 $\tilde{\delta}$ 随 $\tilde{x}$ 的变化曲线．当 $\tilde{x}=-1$ 时，$\delta\to\infty$，以后随着 $\tilde{x}$ 增加（绝对值减小），δ 逐渐减小．当 $\tilde{x}=-0.0100$ 时，$\tilde{\delta}=0.8811$．

图 4 给出 $\tilde{u}_w$ 随 $\tilde{x}$ 的变化曲线．当 $\tilde{x}=-1$ 时，$\tilde{u}_w=0$．随着 $\tilde{x}$ 的增加（绝对值减小），$\tilde{u}_w$ 也增加，一直到出现极大值．然后，$\tilde{u}_w$ 随着 $\tilde{x}$ 的增加而减少．当 $\tilde{x}=-0.0100$ 时，$\tilde{u}_w=0.3882$．

如果熔岩的物理性质 ρ，α，k，μ，β 已经知道，则可根据无量纲曲线图（即图 2 到图4）求出(T_w-T_∞)，δ 和 u_w 随 x 的变化．本文根据文献[7]的讨论，取 $\rho=3.3$ 克/厘米^3，$\alpha=3.5\times10^{-5}$/度，$k=2\times10^{-2}$ 厘米^2/秒，μ 分别取 10^{18}，10^{19} 和 10^{20} 泊，β 分别取 1.0 和 1.5 度/公里．

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

图 5 给出（$T_w - T_\infty$）随起动深度 l 的变化曲线．图中实线代表 $\tilde{x} = -0.1356(\tilde{\omega} = 0)$ 时的数值,虚线代表 $\tilde{x} = -0.0100$（$\tilde{\omega} = 0.6601$）时的数值．前者对应于（$T_w - T_\infty$）为极大值的情况，后者对应于在岩石圈下表面附近的情况． 当 $\tilde{x}$ 固定时，（$T_w - T_\infty$）与 βl 成正比．

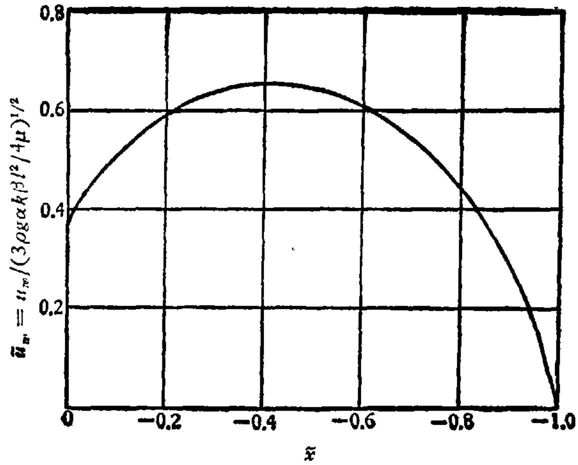

图 4　$\tilde{u}_w$ 随 $\tilde{x}$ 的变化曲线

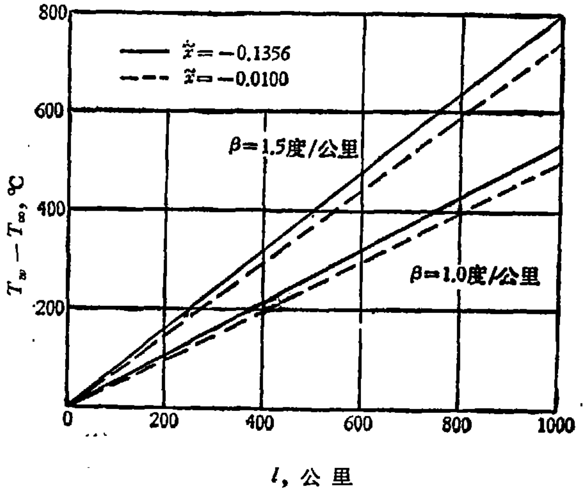

图 5　($T_w - T_\infty$) 随 l 的变化曲线

图 6 给出 δ 随 μ 的变化曲线． 图中给出了 $\tilde{x}$ 分别为−0.1356 和−0.0100，β 分别为 1.0 和1.5 度/公里所组成的四条曲线．在对数座标图上,它们都是直线．从图 6 中看出，δ 变化范围较小．当 μ 从 10^{18} 到 10^{20} 泊时，δ 从几公里到十几公里．由方程(4.1)看出，当 x 固定时，δ 与$(k\mu)^{1/4}$ 成正比，与 $(\rho g\alpha\beta)^{1/4}$ 成反比．

图 7 给出 u_w 随起动深度 l 的变化．图中给出了 $\tilde{x}$ 分别为−0.1356 和−0.0100，β 分别为 1.0 和 1.5 度/公里，μ 分别为 10^{18}, 10^{19} 和 10^{20} 泊所组成的诸条曲线．从方程 (4.2) 看出，当 $\tilde{x}$ 固定时，u_w 与（$\rho g\alpha k\beta$）的平方根成正比，与 l 成正比，与 μ 的平方根成反比．

地幔热柱向岩石圈下表面所传送的热量 $\dot{Q}$，是我们最关心的参数，所以有必要加以着重

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

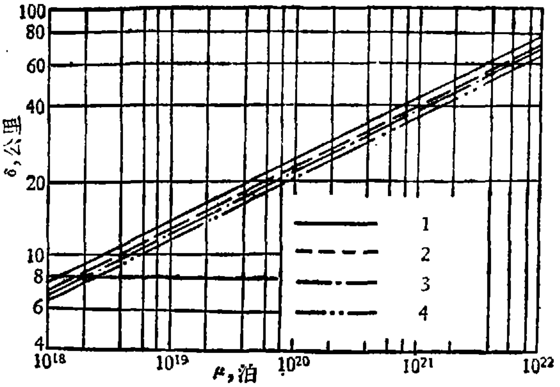

图 6　δ 随 μ 的变化曲线

(1. $\beta = 1.0$ 度/公里， $\tilde{x} = -0.1356$； 2. $\beta = 1.0$ 度/公里， $\tilde{x} = -0.0100$； 3. $\beta = 1.5$ 度/公里， $\tilde{x} = -0.1356$； 4. $\beta = 1.5$ 度/公里， $\tilde{x} = -0.0100$)

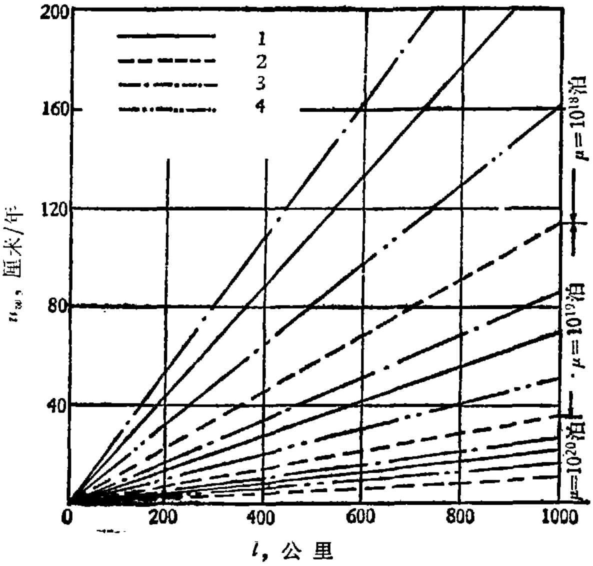

图 7　u_w 随 l 的变化曲线

(1. $\beta = 1.0$ 度/公里， $\tilde{x} = -0.1356$； 2. $\beta = 1.0$ 度/公里， $\tilde{x} = -0.0100$； 3. $\beta = 1.5$ 度/公里， $\tilde{x} = -0.1356$； 4. $\beta = 1.0$ 度/公里， $\tilde{x} = -0.0100$)

讨论．由于 $\tilde{x} = 0$ 点(即岩石圈下表面)是热柱上升运动方程组之解[即方程(3.31)和(3.32)]的奇点，$\dot{Q}$ 不能直接利用该点的温度梯度求出．为此，可取 $\tilde{x} = -0.0100$ 的截面近似代替岩石圈下表面．根据能量平衡关系，利用对流换热之差来近似表示 $\dot{Q}$，则不难得出:

$$\dot{Q} = \int_0^\delta 2\pi r\rho u c_p (T - T_\infty) dr = \frac{11}{9}\pi \frac{\tilde{Z}^2}{1 - \tilde{\omega}} \rho c_p k\beta l^2. \tag{4.3}$$

其中忽略了地幔热柱在 $\tilde{x} = -0.0100$ 截面上以及在侧面上，由于温度梯度引起的传热，并认为从热柱侧面流出物质的温度近似等于 $\tilde{x} = -0.0100$ 截面上的环境温度．

图 8 给出了 $\dot{Q}$ 随起动深度 l 的变化．图中实线代表 $\beta = 1.0$ 度/公里的情况，虚线代表 $\beta = 1.5$ 度/公里的情况．从图 8 看出，$\dot{Q}$ 的数量级为 10^8 卡/秒．例如，当起动深度为 600 公里，$\beta = 1.0$ 度/公里时，$\dot{Q}$ 大约为 3.7×10^8 卡/秒．

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

文献[8]指出，全球火山所释放的能量约为 2×10^{10} 卡/秒. 热点火山占全球火山所释放热量的比例，虽未见精确的统计，约不会超过 1/2. 因此可大致认为全球热点火山所释放的热量为 1×10^{10} 卡/秒. 文献[4]指出，全球共有 122 个热点. 因此每个热点火山所释放的热量约为 1×10^{8} 卡/秒. 另外，热点地表为高热流区. 实际测量表明，在这种高热流区地表热流约为 8 微卡/厘米^2·秒[9]. 如认为热点在地球表面的大小与地幔热柱在岩石圈下表面的大小相当，则地表高热流区半径应为几公里或十几公里. 如果取半径为 20 公里，则地表热流近似为 1×10^{8} 卡/秒. 两者之和为 2×10^{8} 卡/秒. 这一量级与图 8 中所给出的计算结果十分一致.

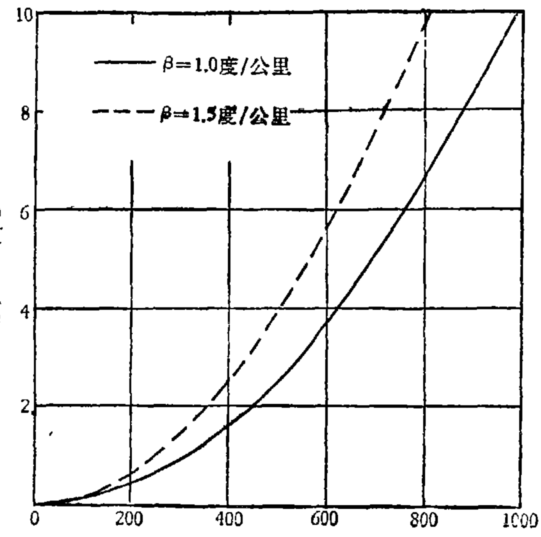

图 8　$\dot{Q}$ 随 l 的变化曲线

文献[2]的计算，也给出了每个地幔热柱所传送的能量，其值约为 1.8×10^{11} 卡/秒. 如果全球热点按 122 个计算[4]，则全球地幔热柱提供的总能量约为 2.2×10^{13} 卡/秒. 这比全球地表总热流还要大 3 倍！显然是不合理的. 这种矛盾的出现是因为文献[2]把热柱半径估算大了(约 75 公里)，把热物质上升速度估算高了(约为 200 厘米/年).

五、结　论

本文从普遍的流体力学方程组出发，通过一定的假设，算出了热点下面地幔热柱的大小，最大上升速度、最大温差，以及热柱向岩石圈所传送的热量. 其结果与现有的地学观测数据相符合，从而说明本文的计算是合理的，也说明 W. J. Morgan[1,2]所提出的热柱设想是符合实际的. 但是，他过高地估算了热柱的大小和热物质的上升速度，因此夸大了热柱的作用.

致谢：对于谈镐生教授和傅承义教授所给予的指导和帮助表示衷心的感谢.

参　考　文　献

[1] Morgan, W. J., Convection plumes in the lower mantle, *Nature*, **230** (1971), 42—43.
[2] Morgan, W. J., Deep mantle convection plume and plate motions, *The American Association of Petroleum Geologists Bulletin*, **56** (1972), 2.
[3] Deffeyes, K. S., 地球的热发动机，1973 年科学年鉴[美]，科学出版社，43—49.
[4] Burke, K. C. & Wilson, J. T., Hot spots on the earth's surface, *Scientific American*, **235** (1976), 2, 46—57.
[5] Calder, N., *Restless Earth*, The Viking Press, New York, 1973, 105—108.
[6] Khan, M. A., Plumes in the mantle, *2nd Inter. Symp. geodesy phy. earth*, 1973, 363—379.
[7] 李荫亭、关德相，海底扩张的驱动机理，中国科学，1979, 3, 281.
[8] 傅承义，地球十讲，科学出版社，1976.
[9] Bullard, E., *Basic Theories. Geothermal Energy UNESCO* (ed. Christopher, H., Armstead, H.). Paris, 1973, 19—29.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net