星系密度波的共转奇异性

胡　文　瑞
（中国科学院力学研究所）

在线性密度波理论中，主要有三个奇异半径，即共转奇异性和内、外 Lindblad 共振．这些奇异区域对星系线性密度波有重要影响．共转圈一般位于星系盘的适中位置，对它的奇异性影响应进行分析．我们曾经指出，若用矩方程来描述恒星的集体行为，假设弥散速度为一标量，则共转奇异性对恒星密度波的色散关系有非局部的影响，并使共转圈的能量交换不稳定性的波放大机制不再存在[1]．由于矩方程的截断处理带有近似性质，应该进一步用恒星动力学的方法研究这种奇异性的影响[2]．麦伟基用恒星动力学的处理方法，保留分布函数的某些高阶项，讨论了共转奇异性的影响[3]．本文对恒星动力学方法中共转奇异性的效应给出一个定性的量级估计，奇异项一般不小于正则项．

采用与徐遐生同样的描述方法，可以有[4]

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+[\psi, H]=0, \tag{1}$$

ψ 是相空间的分布函数，H 为单位质量的哈米尔顿，$[,]$ 为泊松括号．一般采用线性化的渐近处理，对小参数 ϵ 展开有

$$\psi=\Sigma\psi_i(\varpi, \theta, p_\varpi, p_\theta), \quad \psi_i=O(\epsilon^i). \tag{2}$$

渐近关系 (2) 式的含义是，ψ_i 只准确到 ϵ^i 的量级，ψ_i 含有 ϵ^{i+1} 量级的不确定因子．将 (2) 式代入 (1) 式，得到各级分部函数的关系为：

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\sum_{k=0}^{i}\{[\psi_k, H_{i-k}]+[\psi_{i-k}, H_k]\}=0. \tag{3}$$

零阶分布函数关系为：

$$\psi_0=\Psi_0(\mathscr{E}, r)\begin{cases}P_0(r)\exp\left[-\dfrac{\mathscr{E}}{c_0^2(r)}\right], & \mathscr{E}<-E_c(r), \text{且} r>0;\\ 0 & \mathscr{E}>-E_c(r), \text{或} r<0.\end{cases} \tag{4}$$

我们在求 Ψ_0 时，只关心 ϵ^0 阶量的关系，它包含有 ϵ^1 的不确定性．所以在小周转圆近似下应该有

$$\Psi_0=\frac{2\Omega(r)}{\kappa(r)}\frac{\sigma_*(r)}{2\pi m_*\langle c_\varpi^2\rangle(r)}\exp\left[-\frac{\mathscr{E}}{\langle C_\varpi^2\rangle(r)}\right]+O(\epsilon). \tag{5}$$

同样地，一阶分布函数为：

$$\psi_1=\left\{\frac{\partial\Psi_0}{\partial E_0}V_1(\varpi)+f(\varpi, E_0, J)\right\}e^{i(\omega t-m\theta)}+O(\epsilon^2), \tag{6}$$

本文 1978 年 10 月 7 日收到．

其中 $V_1(\varpi)$ 为扰动引力势的振幅,而

$$f(\varpi, E_0, J)=-\frac{\omega\frac{\partial\Psi_0}{\partial E_0}+m\frac{\partial\Psi_0}{\partial J}}{2\sin(\omega\tau_{12}-m\theta_{12})}\int_{-\tau_{12}}^{\tau_{12}}V_1(\varpi_*(\tau))e^{i[\omega\tau-m\theta_*(\tau)]}d\tau. \quad (7)$$

利用 (5) 式,可以得到下列关系:

$$-\omega\frac{\partial\Psi_0}{\partial E_0}-m\frac{\partial\Psi_0}{\partial J}=-\frac{\nu(\mathscr{E},r)\pi}{\tau_e(\mathscr{E},r)}\frac{\partial\Psi_0(\mathscr{E},r)}{\partial\mathscr{E}}+\Delta\Psi+O(\epsilon), \quad (8)$$

其中 $\Delta\Psi$ 为坐标变换引入的 ϵ^2 项. 由于 (5) 式中含有不确定的 $O(\epsilon)$ 项,而且在求 $P_0(r)$ 和 $c_0(r)$ 的渐近关系时已略去了 ϵ^2 项,因此,(8) 式中保留的二阶项

$$\Delta\Psi=\left[\frac{\pi\nu(\mathscr{E},r)}{\tau_e(\mathscr{E},r)}-\nu_0(r)\kappa(r)\right]\frac{\partial\Psi_0}{\partial\mathscr{E}}-\frac{2m\Omega(r)}{r\kappa^2(r)}\frac{\partial\Psi_0}{\partial r}$$

就没有太大的意义. 麦伟基正是利用 $\Delta\Psi$ 项来研究恒星密度波在共转圈的影响[3].

原则上讲,为了考察高阶项 ϵ^i 的影响,必须分析高阶的渐近分布函数 ψ_i. 对于一个合理的渐近关系,低阶的渐近关系不应该由于保留某些高阶项而受影响. 但是存在奇异性的时候,就应该仔细分析这种影响[1]. (7)式的分母在共转半径处的实部为零, $\mathrm{Re}(\omega\tau_{12}-m\theta_{12})=0$. 但(8)式的主要项在共转半径处也有实部为零 $\nu_R(\mathscr{E},r)=0$. 因此,准确到 ϵ 阶,分布函数并不产生共转奇异性的困难. 但是,我们如果在 (8) 式中保留 ϵ 的高阶项,从 (7) 式可以得到

$$f=f_a+f_b, \quad (9)$$

f_a 是主要项,没有共转奇异性. f_b 为高阶项,一般有共转奇异性,但量级应比文献 [3] 低,即

$$f_b=\frac{O(\epsilon)}{\nu(\mathscr{E},r)}. \quad (10)$$

若仿照麦伟基的方法,对 $\nu(\mathscr{E},r)$ 作周转圆展开[3],

$$\nu(\mathscr{E},r)=\frac{\omega-m\Omega(r)}{\kappa(r)}+O(\epsilon^2). \quad (11)$$

在共转圈 $r=r_c$ 附近作戴劳级数展开,

$$\nu_0(r)=\frac{\omega-m\Omega(r)}{\kappa(r)}\simeq\frac{1}{L}(r-r_c)+i\nu_{0i}(r), \quad (12)$$

其中

$$L=\left|\frac{d}{dr}\nu_{0R}(r)\right|^{-1}=\left|\frac{m}{\kappa(r_c)}\frac{d\Omega(r_c)}{dr}\right|^{-1}. \quad (13)$$

由 (12) 式可以看出,在共转圈处 $\nu_0(r)\simeq i\nu_{0i}(r)$, f_b 的大小主要由线性波的增长率决定. 若要求 f_b 与 f_a 相比为 ϵ 的高阶量,至少需要满足

$$\nu_{0i}(r)=O(1), \quad \omega_i=O(\kappa(r)). \quad (14)$$

线性密度波模式解的增长率比条件 (14) 式都要低[5]. 做为极端情形,考虑中性波. 这时

$$\nu_0(r)=\nu_{0R}(r).$$

这时可以得到

$$f_b=L\frac{O(\epsilon)}{(r-r_c)}. \quad (15)$$

如果像麦伟基那样把 $r-r_c$ 看成是 $O(\epsilon)$ 的量级[3], 由于 (13) 式中的 L 一般都不太小,所以 f_b 相对于 f_a 并不小,可能还要更大些.

通过上述分析可以看出，用恒星动力学方法处理共转奇异性时，奇异项分布函数 f_b 一般并不比非奇异项分布函数 f_a 更不重要. 因而共转圈附近波的行为会受奇异性的制约. 研究二阶以上的分布函数对于理解波在共转圈附近的动力学性质是重要的. 上面的定性估计是一种反例的论证方法. 如果保留高阶项会对低阶关系有大的影响，则可说明奇异性的重要效应. 反之不然，即若这种讨论未得到重大的影响，并不表明奇异性不重要，而是需要更细致地研究更高阶的渐近关系. 因为只有更高阶的分布函数的性质，才能对恒星动力学的高阶行为做出完整的讨论.

最近，人们根据等离子体物理中处理波粒子相互作用的结果，类比地提出[2,6]，用某种波的色散函数 $-b\,Z(b\nu)$ 来代替奇异项 $\frac{1}{\nu}$，其中

$$\begin{cases} Z(\zeta) = -2ie^{-\zeta^2}\int_{-\infty}^{-i\zeta} e^{-t^2}dt, \\ b = -\dfrac{1}{\sqrt{2}\,r_0\epsilon\nu}. \end{cases}$$

这种说法还需要从理论上和物理图象上做进一步的研究，还需要统一处理共转圈附近波和恒星的相互作用，以及能量交换不稳定性两种效应的关系.

事实上，还可以做进一步的讨论. 由于扰动分布函数 (6) 式已经忽略了非线性项，所以这个关系，以及由此导出的其他关系也就只准确到 ϵ 的量级. 为了求出波的色散关系和振幅分布，还要通过泊松方程给出扰动引力势与扰动密度之间的关系. 由一阶关系就得到波的色散关系[2]. 以后人们又讨论准确到二阶的扰动引力和扰动密度的关系，并得到波的振幅变化规律[3-6]. 但是，如果所有小参数(如螺旋倾角、相对周转圆能量、弥散速度与转速比等)都是同数量级的话[3,4]，二阶量的关系就不会是准确的，因为分布函数已做了线性化近似. 换言之，得到的振幅变化关系也就不可能准确. 在这种意义上讲，我们只能讨论线性关系，因而要进一步分析共转奇异性的影响[1].

致谢：作者曾与徐建军同志进行过多次讨论，谨致谢意.

参　考　文　献

[1] 胡文瑞，中国科学，1977，2: 109.
[2] 林家翘、刘汝莹，*Studies in Applied Mathematics*, 1979.
[3] 麦伟基，*Astrophys. J.*, **203** (1976), 81.
[4] 徐遐生，*Astrophys. J.*, **160** (1970), 89, 99.
[5] Bertin, G., et al., *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 74 (1977), 4726
[6] 刘汝莹、Bertin, G., *Astrophys. J.*, **226** (1978), 508.