星系密度波的非线性不稳定性

秦元勋　　王联　　王慕秋　　胡文瑞

（中国科学院应用数学研究推广办公室）　（中国科学院数学研究所）　（中国科学院力学研究所）

星系密度波理论成功地解释了螺旋结构的缠卷困难[1]．为了克服有限群速度引起的维持困难[2]，人们研究了各种线性波的不稳定增长模式解[3-5]．线性波的不稳定性分析只能适用于短的时间发展，所以应该进一步讨论非线性密度波的稳定性．徐遐生等用星系激波方程计算恒星的非线性密度波时发现，解极敏感地依赖于初值的选择，可能在物理上不稳定[6]．许多数值试验都难于得到稳恒的螺旋图样[7,8]．最近，以密度波为初值计算其时间演化时发现，存在增长率相当快的非线性发展*．胡文瑞用一种简单的数学处理，发现非线性密度波的局部解确有不稳定趋势[9]．本文采用气体盘模型，用星系激波的局部解方程，在准稳紧卷螺旋近似下，证明密度波存在非线性不稳定性．

在螺旋坐标 (ξ, η) 中，扰动场的方程为[9]

$$\begin{cases} (\sigma_0 + \sigma_1)(w_{\eta_0} + w_\eta) = \text{常数}, & (1.1) \\ [(w_{\eta_0} + w_\eta)^2 - a^2]\dfrac{\partial w_\eta}{\partial \eta} = (w_{\eta_0} + w_\eta)(A w_\xi + G), & (1.2) \\ (w_{\eta_0} + w_\eta)\dfrac{\partial w_\xi}{\partial \eta} = B w_\eta, & (1.3) \\ \Delta \mathscr{V}_1 = 4\pi G \sigma_1 \delta(z), & (1.4) \end{cases}$$

其中符号的定义与文献[9]中的一样，a 为恒星弥散速度，扰动引力

$$G = -\frac{\partial \mathscr{V}_1}{\partial \eta}, \quad A = 2\Omega\tilde{\omega} > 0, \quad B = -\frac{\kappa^2 \tilde{\omega}}{2\Omega} < 0.$$

$$B = -\frac{\kappa^2 \tilde{\omega}}{2\Omega} < 0.$$

对于弱非线性自冷密度波有

$$G = F(\tilde{\omega}\Omega)^2 \sin(b\eta + \eta_0), \quad b = \frac{2}{\sin i}. \tag{2}$$

恒星密度波一般都在主要范围内满足条件

$$|w_{\eta_0}| = |(\Omega - \Omega_p)\tilde{\omega} \sin i| < a, \quad |w_{\eta_0} + w_\eta| < a. \tag{3}$$

可以证明，这时密度波的周期解是不稳定的．

定理　讨论微分方程组

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ a_3(x) & a_4(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \tag{4}$$

假设对所有的 $x \geqslant 0$，存在常数 K_1, K_2, K_3, K_4，使得

本文 1978 年 11 月 4 日收到．

* 刘尊全等，星系密度波的非线性增长，尚未发表．

$$\left.\begin{aligned}&1)\ a_1(x) \geqslant -K_1,\ K_1 \geqslant 0,\ a_2(x) \leqslant -K_2 < 0,\\ &\quad a_3(x) \leqslant -K_3 < 0,\ a_4(x) \geqslant -K_4,\ K_4 \geqslant 0,\\ &2)\ K_2K_3 - K_1K_4 > 0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

则 $(\varphi, \psi) = (0, 0)$ 为不稳定.

证 取 $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3, \bar{K}_4$, 使得

1′) $a_1(x) \geqslant -\bar{K}_1,\ K_1 \geqslant \bar{K}_1 \geqslant 0,\ a_2(x) \leqslant -K_2 < -\bar{K}_2 < 0,$

$a_3(x) \leqslant -K_3 < -\bar{K}_3 < 0,\ a_4(x) \geqslant -\bar{K}_4,\ K_4 \geqslant \bar{K}_4 \geqslant 0.$

2′) $\bar{K}_2\bar{K}_3 - \bar{K}_1\bar{K}_4 > 0.$

比较方程

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\bar{K}_1 & \bar{K}_2\\ \bar{K}_3 & \bar{K}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \tag{6}$$

在 (φ, ψ) 平面的第二象限 $(\varphi < 0, \psi > 0)$, 有

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(4)} < \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(6)},\quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(4)} > \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)}.$$

方程 (6) 式的特征方程和特征根分别为[10]

$$\begin{cases}\lambda^2 + p\lambda + q = 0,\\ p = \bar{K}_1 + \bar{K}_4 \geqslant 0,\\ q = \bar{K}_1\bar{K}_4 - \bar{K}_2\bar{K}_3 < 0,\end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4q}) > 0,\quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4q}) < 0.$$

由于 $\bar{K}_3 \neq 0$, 作变换

$$X = \bar{K}_3\varphi - (\bar{K}_1 + \lambda_1)\psi,\quad Y = \bar{K}_3\varphi - (\bar{K}_1 + \lambda_2)\psi. \tag{7}$$

利用变换 (7) 式可将方程 (6) 式化为

$$\frac{dX}{dx} = \lambda_1 X,\quad \frac{dY}{dx} = \lambda_2 Y. \tag{8}$$

方程 (8) 式的积分曲线族为

$$V(X, Y) = |X|^{-\lambda_2}|Y|^{\lambda_1} = \text{常数}.$$

将 (φ, ψ) 的第二象限用下列两条半直线

$$l_1: \bar{K}_1\varphi + \bar{K}_2\psi = 0,\quad l_2: \bar{K}_3\varphi + \bar{K}_4\psi = 0,$$

分为 A, B, C 三个区域. 按 ψ 而言, A 在 B 上方, B 在 C 上方; 按 φ 而言, A 在 B 右方, B 在 C 右方. 显然, l_2 在 l_1 上方.

我们分别在区域 A, B, C 作 Ляпунов 函数.

(1) 区域 A. 在区域 A 中做 Ляпунов 函数

$$\begin{aligned}V_1(\varphi, \psi) &= V(-X, Y) = (-X)^{-\lambda_2}Y^{\lambda_1}\\ &= [-\bar{K}_3\varphi + (\bar{K}_1 + \lambda)\psi]^{-\lambda_2}[\bar{K}_3\varphi + (-\bar{K}_1 - \lambda_2)\psi]^{\lambda_1}.\end{aligned}$$

将它沿 (4) 式的积分曲线对 x 求全导数,可以得到

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{(4)} = \bar{K}_3(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{V}{(-XY)}\left[\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(4)}\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)} - \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(6)}\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(4)}\right],$$

其中利用

$$\frac{\partial V}{\partial X}=-\lambda_2\frac{V}{X},\quad \frac{\partial V}{\partial Y}=\lambda_1\frac{V}{Y},\quad \frac{\partial X}{\partial \varphi}=\bar{K}_3,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi}=\bar{K}_3,\quad \frac{\partial X}{\partial \psi}=-\bar{K}_1-\lambda_1,\quad \frac{\partial Y}{\partial \psi}=-\bar{K}_1-\lambda_2.$$

考虑到区域 A 中有

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(6)}<0,\quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)}<0,\quad 0>\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(6)}>\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(4)},\quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)}<\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(4)},$$

故

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(4)}\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)}>\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(5)}\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)}>0,$$

所以经过整理后可得到

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{(4)}>\bar{K}_3(\lambda_1-\lambda_2)\frac{V}{(-XY)}\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(6)}\left[\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)}-\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(4)}\right]>0.$$

(2) 区域 B. 取 Ляпунов 函数为

$$V_2(\varphi,\psi)=\psi-\varphi,$$

则有 $V_2(\varphi,\psi)>0$, 并且

$$\left.\frac{dV_2}{dx}\right|_{(4)}=\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(4)}-\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(4)}>\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)}-\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(6)}>0.$$

(3) 区域 C, 此区域内 $X<0$, $Y<0$. 取 Ляпунов 函数

$$V_3(\varphi_1\psi)=V(-X,-Y)=(-X)^{-\lambda_2}(-Y)^{\lambda_1},$$

它沿 (4) 式的积分曲线对 x 求全导数有

$$\left.\frac{dV_3}{dx}\right|_{(4)}=\bar{K}_3(\lambda_1-\lambda_2)\frac{V}{(-X)(-Y)}\left[\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(6)}\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(4)}-\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(4)}\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)}\right].$$

在区域 C 中有

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(6)}>0,\quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)}>0,\quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(4)}>\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)},\quad \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(4)}<\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(6)},$$

不难得到

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{(4)}>\bar{K}_3(\lambda_1-\lambda_2)\frac{V}{XY}\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6)}\left[\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(6)}-\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{(4)}\right]>0.$$

因此,根据非驻定系统不稳定的 Четаев 定理[11], (4) 式的零解是不稳定的.

现在,再来讨论 (1.2) 和 (1.3)式. 总可以选取常数 A_0, B_0, K, 使得对 $0<w_{\eta_0}<a$ 时,有

$$A(x)>A_0>0,\quad B(x)<B_0<0, \tag{9}$$

$$|G(x)|<K,\quad K>0. \tag{10}$$

方程 (1.2) 和 (1.3) 式左方系数在

$$w_{\eta_0}+w_\eta=0,\quad (w_{\eta_0}+w_\eta)^2-a^2=0 \tag{11}$$

时变为零或无穷. 在 (w_η, w_ξ, η) 三维空间中, (11) 式表示方程有三张奇面. 当 x 增长时, (1.2) 和 (1.3) 式的积分曲线一般不能通过它们,因此假设

$$|w_\eta|<w_{\eta_0},\quad |w_{\eta_0}+w_\eta|<a. \tag{12}$$

分别讨论两种情况. 若 (1.2) 和 (1.3) 式在区域 (12) 内没有周期解,则不需讨论其稳定性. 若存在周期解,可取一周期解记以 $(w_\eta^{(0)}(\eta), w_\xi^{(0)}(\eta))$. 将 η 记为 x, 引入新变量

$$\varphi(x)=w_\eta(x)-w_\eta^{(0)}(x),\quad \psi(x)=w_\xi(x)-w_\xi^{(0)}(x). \tag{13}$$

将上式代入 (1.2) 和 (1.3) 式，将方程对 φ, ψ 作幂级数展开，就得到

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1(x) & a_2(x)\\ a_3(x) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}+(\varphi,\psi)_2, \tag{14}$$

其中 $(\varphi,\psi)_2$ 表示 (φ,ψ) 的二次以上项，而

$$\begin{cases}a_1(x)=[Aw_\xi^{(0)}(x)+G(x)]\left[\dfrac{a^2+[w_{\eta_0}+w_\eta^{(0)}(x)]^2}{a^2-[w_{\eta_0}+w_\eta^{(0)}(x)]^2}\right],\\ a_2(x)=A\dfrac{w_{\eta_0}+w_\eta^{(0)}(x)}{[w_{\eta_0}+w_\eta^{(0)}(x)]^2-a^2},\\ a_3(x)=\dfrac{B}{[w_{\eta_0}+w_\eta^{(0)}(x)]^2}.\end{cases} \tag{15}$$

由于 $(w_\eta^{(0)}(x), w_\xi^{(0)}(x))$ 是区域 (12) 式中的连续周期解，在一个周期解中，它是有界闭集上的连续函数. 利用条件 (9) 和 (10) 式，对于 (15) 式有常数 K_1, K_2, K_3 使

$$\begin{cases}a_1(x)\geqslant -K_1, \quad K_1\geqslant 0,\\ a_2(x)\leqslant -K_2<0, \quad a_3(x)\leqslant -K_3<0.\end{cases} \tag{16}$$

只要能证明(14)式的线性部分在 $(\varphi,\psi)=(0,0)$ 是不稳定的，则加上非线性部分 $(\varphi,\psi)_2$ 以后，这个结论仍然成立. 这里关于稳定与不稳定的意义是众所周知的 Ляпунов 意义来定义的（参阅文献 [2]).

根据前面证明的定理，条件 (16) 式是条件 (5) 式的特殊情况. 而引力条件 (10) 式是比 (2) 式要更广泛的条件. 由此，我们证明了局部密度波周期解是非线性不稳定的.

徐遐生等[6] 在用计算机作数值计算时已发现周期解很难算. 初值稍一有差，解即发散，但没有进一步从理论上加以考察. 本文论证了这种不稳定性的必然性. 徐遐生等还证明了[6]，弱非线性的自恰密度波解就是线性密度波的周期解. 事实上，在 $|w_\eta|\ll w_{\eta_0}$ 时，微分方程组可线性化为常系数方程，它有通解

$$\begin{cases}w_\eta=c_1e^{\tau x}+c_2e^{-\tau x}+c_3\cos(bx+x_0),\\ w_\xi=\dfrac{w_{\eta_0}^2-a^2}{Aw_{\eta_0}}(e_1e^{\tau x}-c_2e^{-\tau x})+c_4\sin(bx+x_0),\end{cases} \tag{17}$$

其中

$$c_3=F(\tilde{\omega}\Omega)^2\frac{bw_{\eta_0}}{b^2(a^2-w_{\eta_0}^2)-AB}, \qquad c_4=F(\tilde{\omega}\Omega)^2\frac{B}{b^2(a^2-w_{\eta_0}^2)-AB},$$

$$\tau=\sqrt{\frac{A(-B)}{a^2-w_{\eta_0}^2}}.$$

当任意常数 $c_1=c_2=0$ 时，得到唯一的周期解. $c_1\neq 0$ 时，积分曲线指数地发散. 即在 (w_ξ, w_η, η) 三维空间中除一个零测度的二维曲面外，其余积分曲线均以 $e^{\tau x}$ 的量级发展. 故周期解虽存在，但不稳定. 在太阳轨道附近，可估计 $\tau\simeq 10$. 因此，η 变化 0.1 即可使速度变化 e 倍. 太阳附近 η 变化 0.1 对应于 1/8 银年，即约 3×10^7 年. 这个发展速率与刘尊全等的计算结果相符合.

显然，在星系激波方程 (1) 式中略去了二阶量的项. 仔细地分析后表明，这些二阶量引入后并不改变密度波周期解不稳定的结论.

最后，还必须讨论解的自恰性. 一般讨论气体的非线性响应和星系激波时都不满足自恰

条件．将本文的结果用到一般星系激波时就得到亚声速流动的基态附近的周期解是不稳定的．对不是很强的扰动场，声速线是奇异线，积分曲线不能光滑地通过．对于恒星密度波，本文对扰动引力场提的条件(10)式是很宽的，有物理意义的解应该包括在这个条件之内．但是，我们在这里并不是讨论密度波的求解，而是讨论周期解的稳定性．引力G不仅应该是η的函数，也应该是速度 w_η, w_ξ，以及其导数的函数．这样一般性的数学问题的复杂性使得人们很难具体处理．从物理上看，自引力系统中是引力的坍缩不稳定效应与压力的弥散效应相互制约．在线性密度波理论中，人们常用稳定参数

$$Q = \frac{\kappa a}{\pi G \sigma_0} \tag{18}$$

来判断自引力系统的稳定情况，$Q = 1$为中性波的边际稳定性．Q越大，自引力系统越稳定，反之亦然．因此，不考虑自引力的系统相当于Q非常大的系统，它相对是最稳定的系统．如果我们证明了这样的系统中解是不稳定的，那么考虑自引力效应以后，解将更不稳定，反之不然．这样就可以设想，本文的结论对于自引力系统也将会成立．作为一个例子，文献[9]中计算了自引力密度波的非线性增长，其增长时间为 10^7 年，与上述分析符合．

参　考　文　献

[1] 林家翘，星系螺旋结构理论(胡文瑞、韩念国译)，科学出版社，1977.
[2] Toomre, A., *Astrophys. J.*, **158**(1969), 899.
[3] 刘汝莹、麦伟基，*Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* **73**(1976), 3785.
[4] Bertin. G. et al., *Proc. Natl. Acad Sci. USA*, **74**(1977), 4726.
[5] Bertin, G.、麦伟基，*Astron. Astrophys.*, 1978.
[6] 徐遐生等，*Astrophys. J.*, **183**(1973), 819.
[7] Lindblad, P. O., in *Interstellar Matter in Galaxies* (Edt. Woltzer, L.), 1962, 222.
[8] Miller, R. H. et al., *Astrophys. J.*, **161**(1970), 903.
[9] 胡文瑞，科学通报，**22** (1977), 76.
[10] 秦元勋，微分方程所定义的积分曲线，科学出版社，1959，41—42.
[11] Мацкин И. Г., *Устоичивости Движения*, 1952, 192.
[12] 秦元勋，运动稳定性的一般问题讲义，科学出版社，1958.

NONLINEAR INSTABILITY OF GALACTIC DENSITY WAVES IN THE REGION OF COROTATIONAL CIRCLE

Qin Yuan-xun(秦元勋), Wang Lian(王联),
Wang Mu-qiu(王慕秋) and Hu Wen-rui(胡文瑞)

Abstract

Based on the gaseous disk galactic model, it has been proved that there exists nonlinear instability for the quasi-stable tightly spriral density waves in the region of corotational circle. Due to the effect of this instability, disturbances may grow e-fold during a period of about 3×10^7 years. Since the weak nonlinear case will become the solutions of the self-consistent linear density waves, the linear density waves should also possess this sort of instability.