第 19 卷 第2期　　天 文 学 报　　Vol. 19, No. 2
1978 年 12 月　　ACTA ASTRONOMICA SINICA　　Dec., 1978

冻结型和电阻型无力场*

潘良儒
(中国科学院力学研究所)

提　　要

本文在限制条件

$$\int_v \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{A}d\tau = \text{常数}$$

下，对固定空间磁能 $\frac{1}{8\pi}\int_v(\nabla\times\mathbf{A})^2d\tau$ 进行变分，发现无力因子 α 为常数表征无力场的最小磁能状态，代表稳定的无力场。其物理意义为气体漂移速度场是定常的，磁场形态不变，磁场强度受电阻衰变的影响，也因为流体运动而受到波因亭能流的影响。有效电场垂直于磁场。

在另一限制条件：

$$\int_v \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{B}d\tau = \text{常数}$$

下，对给定空间内欧姆损失 $\int_v \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma}d\tau$ 进行变分，发现 α 为常数也表征无力场的最小欧姆损失状态，它的物理量是最小磁能状态无力因子 α 为零，或 $\frac{\partial B}{\partial t}=0$ 的特殊情况。

一、引　　言

稀薄电离气体携带一强磁场，其压力梯度 ∇P 比磁压梯度 $\nabla\mathbf{B}^{-2}/8\pi$ 小一个量级以上时，电磁体积力近乎零，即所谓无力场．可写为

$$\nabla\times\mathbf{B}=\alpha\mathbf{B}, \tag{1}$$

$$\frac{4\pi\mathbf{J}}{c}=\nabla\times\mathbf{B}. \tag{2}$$

式中 α 为无力因子，通常是空间位置和时间的函数；c 指光速．这是天体物理学和受控热核反应领域均感兴趣的问题．

Lundquist 证明过：如果流体静止而且磁场在衰变时不变形，则要求 α 必须是常数[1]；Chandrasekhar 和 Woltjer 证明了 α 为常数的无力场是给定磁能的最小欧姆损失磁场形态[2]；Woltjer 利用对一系统的磁能在一给定的约束条件下进行变分，发现冻结型封闭系统的无力因子为常数时，代表一最小磁能状态，又发现当流体静止时，其 α 必须是常数[3]；Jette 证明了电阻型无力场，若流体静止，其 α 必为常数[4].

一团受强磁场约束的稀薄导电气体，无论其系统的起始状态如何，经过演化，趋于稳

* 1977 年 11 月 30 日收到.

定平衡时，这时系统的势能，也就是磁能，趋于最小状态．本文对固定空间磁能进行变分处理，结果发现：气体无论是静止的或运动的，其电导率无论是无限的或有限的，稳定的无力场的 α 必是常数．此外，还对固定空间欧姆损失进行变分，发现 α 为常数也表征某些特殊情况的最小欧姆损失．

二、变分处理

变分处理就是在无力场约束条件下，对磁能 Q^B 进行变分[3]．磁能是

$$Q^B = \frac{1}{8\pi}\int_v \mathbf{B}^2 d\tau. \tag{3}$$

式中 v 代表固定空间．

下面证明表示无力场的约束条件应是

$$\int_v \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}d\tau = 常数, \tag{4}$$

式中 $\mathbf{A}$ 为磁矢势，即

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}. \tag{5}$$

取 $\delta\mathbf{A}$ 为变量，引进拉格郎日乘子 $-\alpha/8\pi$，由（3）式得变分为

$$\begin{aligned}\delta Q &= \delta Q^B - \frac{\alpha}{8\pi}\delta\int_v \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{A}d\tau\\ &= \frac{1}{8\pi}\int_\Gamma \hat{n}\cdot(-2\nabla\times\mathbf{A}+\alpha\mathbf{A})\times\delta\mathbf{A}d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_v [\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})\\ &\quad - \alpha\nabla\times\mathbf{A}]\delta\mathbf{A}d\tau = 0\end{aligned} \tag{6}$$

式中 $d\sigma$ 为界面 Γ 上的面积微元，$\hat{n}$ 为其外向法向单位向量．在 Γ 上 $\delta\mathbf{A}$ 应取为零，因此（6）式简化为

$$\mathbf{J} = \alpha\mathbf{B} \tag{7}$$

其 α 为常数．从以上证明来看，（4）式代表了无力场这一约束条件．因此对稳定的无力场，其 α 必是常数，也可以理解为无力场的最后归宿．

三、满足（4）式的边界条件

现在来探索满足（4）式的边界条件．由（4）式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{A}d\tau = \int_\Gamma \hat{n}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\times\mathbf{A}d\sigma + 2\int_v \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\cdot\nabla\times\mathbf{A}d\tau. \tag{8}$$

引进欧姆定律

$$\frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}. \tag{9}$$

式中 σ 为电导率，$\mathbf{E}$ 为电场，$\mathbf{v}$ 为流体的流速．$\mathbf{E}$ 应为

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi. \tag{10}$$

$\nabla\phi$ 为势函数梯度，在一般电动力学中用它来调整 $\nabla\cdot\mathbf{A}$ 为零．但在此则作如下规范来满足：

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0. \tag{11}$$

取 $\mathbf{B}\cdot$(9) 式，再利用上式，得

$$\frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{B}}{\sigma}=-\mathbf{B}\cdot\nabla\phi. \tag{12}$$

利用 (1) 式，积分上式得

$$\phi=-\int_0^l \frac{c\alpha\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}}{4\pi\sigma}. \tag{13}$$

式中 $d\mathbf{l}$ 为沿磁力线的微元，以 $\phi=0$ 处的点为积分起点. 这就是本文对 ϕ 所作的特殊规范. 将 (11) 式代入 (8)，则该式简化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{A}d\tau=\int_\Gamma \hat{n}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\times\mathbf{A}d\sigma. \tag{8'}$$

此结果和文 [3] 处理冻结型无力场的结果一致. 本文引入单位向量 $\hat{A}$，将上式推广为:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{A}d\tau=\int_\Gamma A^2\hat{n}\cdot\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\times\hat{A}d\sigma. \tag{8''}$$

从 (8″) 式知，界面 Γ 上必须满足下列条件之一，(4) 式方能成立:

$$\begin{cases}(a)\ A_\Gamma=0, & (14)\\ (b)\ \left.\dfrac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right|_\Gamma=0. & (15)\end{cases}$$

(i) $A_\Gamma=0$ 的物理意义.

从 (5) 式知

$$\mathbf{B}=\nabla A\times\hat{A}+A\nabla\times\hat{A}. \tag{16}$$

引进条件 (a)，则在 Γ 面上存在下列关系:

$$\mathbf{B}_\Gamma=\nabla A|_\Gamma\times\hat{A}_\Gamma. \tag{17}$$

因此 $A_\Gamma=0$ 代表的界面是一磁面，而且是固定在空间的磁面，这是稳定无力场的一种边界情况.

(ii) $\left.\dfrac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right|_\Gamma=0$ 的物理含义.

将 (13) 式代入 (10) 式，然后将其结果代入(9)式，并利用条件 (b)，得 Γ 面上物理量的关系为:

$$\mathbf{J}_\Gamma/\sigma=-\frac{1}{c}\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_\Gamma\hat{A}_\Gamma+\frac{c}{4\pi\sigma}\nabla_\Gamma\int_0^l\alpha\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}+\mathbf{V}_\Gamma\times\mathbf{B}_\Gamma/c. \tag{18}$$

将上式改写为:

$$-\frac{1}{c}\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_\Gamma\hat{A}_\Gamma+\frac{c}{4\pi\sigma}\nabla_\Gamma\int_0^l\alpha\mathbf{B}dl-\mathbf{J}_\Gamma/\sigma=\mathbf{B}_\Gamma\times\mathbf{V}_\Gamma/c,$$

并定义

$$\mathbf{E}_\Gamma=-\frac{1}{c}\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_\Gamma\hat{A}_\Gamma+\frac{c}{4\pi\sigma}\nabla_\Gamma\int_0^l\alpha\mathbf{B}dl,$$

$$\mathbf{E}_\Gamma^{(e)}=\mathbf{E}_\Gamma-\mathbf{J}_\Gamma/\sigma=-\frac{1}{c}\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_\Gamma\hat{A}_\Gamma+\frac{c\alpha}{4\pi\sigma}\nabla_{\Gamma\perp}\int_0^l\bar{B}\cdot d\bar{l} \tag{19}$$

式中 $E_\Gamma^{(e)}$ 为界面的有效电场. $\nabla_{\Gamma\perp}$ 指垂直于 $\hat{B}$ 的梯度. 取上式 $\hat{A}$ 向、$\hat{B}$ 向和 $\hat{\gamma}$ 向分量,

其 $\hat{T}$ 的定义为

$$\hat{A}\times\hat{B}=\hat{T}. \tag{20}$$

则

$$\begin{cases} E^{(c)}_{\Gamma\hat{B}}=0, & (21)\\ E^{(\sigma)}_{\Gamma\hat{A}}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A}{\partial t}\Big|_{\Gamma}+\dfrac{c}{4\pi\sigma}\hat{A}\cdot\nabla\displaystyle\int_0^{l_\Gamma}(\alpha B)\hat{B}\cdot d\mathbf{l}-\mathbf{J}_{\Gamma\hat{A}}/\sigma=B_\Gamma V_{\Gamma\hat{T}}/c & (22)\\ E^{(\sigma)}_{\Gamma\hat{T}}=+\dfrac{c\alpha}{4\pi\sigma}\hat{T}\cdot\nabla\displaystyle\int_0^{l_\Gamma}B\hat{B}\cdot d\mathbf{l}-\mathbf{J}_{\Gamma\hat{T}}/\sigma=-B_\Gamma V_{\Gamma\hat{T}}/c & (23)\end{cases}$$

从 (20—23) 式知：当 $\dfrac{\partial\hat{A}}{\partial t}\Big|_{\Gamma}=0$ 时，$\hat{A}_\Gamma$ 垂直于 $\hat{B}_\Gamma$，有效电场 $E^{(\sigma)}_\Gamma$ 的 $\hat{T}$ 分量只在电阻型情况下才存在，当 $\sigma\to\infty$ 时则消失，这时的 $\mathbf{E}_\Gamma$ 形态不变．这就是稳定无力场应有的另一种边界情况．关于 $\dfrac{\partial\hat{A}}{\partial t}=0$ 的物理含义另文讨论．

四、常数 α 的物理量

根据本文变分法，不能得出更多的物理量．兹为搞清稳定无力场的物理图案，现引入下列两项假定（本文作者已在另一工作中得出证明）：

（A）如果 α 为常数，则 $\left|\dfrac{\partial\hat{B}}{\partial t}\right|$ 必为零，即

$$\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\Big|_{\alpha=\text{常数}}=0; \tag{24}$$

（B）α 为常数的必要充分条件是

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}=0, \tag{25}$$

$$\nabla\times\mathbf{D}=\alpha\frac{1}{\mathbf{D}}, \tag{26}$$

此处定义

$$\mathbf{D}=\nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B})=\beta\mathbf{B}. \tag{27}$$

利用以上假设，对 (9) 式两端取旋度：

$$\frac{c\alpha^2\mathbf{B}}{4\pi\sigma}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}\hat{B}+\mathbf{D}/c. \tag{28}$$

从 $\mathbf{D}$ 的定义 (27) 和 (26) 式知

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=0. \tag{29}$$

因此

$$\hat{B}\cdot\nabla\beta=0. \tag{30}$$

将 (27) 式代入 (26) 式，得

$$\nabla\beta\times\hat{B}=0. \tag{31}$$

从 (30—31) 式知，β 是独立于空间的函数，因此积分 (28) 式得

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0\exp\left(-\frac{c^2\alpha^2}{4\pi\sigma}t+\int_0^t\beta\,dt\right). \tag{32}$$

若流体静止，则 $\beta=0$，结果和文 [1] 的结果一致．$\mathbf{B}_0$ 只是空间的函数，(32) 式说明磁

场因有电阻而以因子 $\exp(-c^2\alpha^2 t/4\pi\sigma)$ 衰变，流体的运动产生的边界波因亭能流，使 B 以因子 $\exp\int_0^t \beta dt$ 增加。

积分 (27) 式得

$$\mathbf{V}\times\mathbf{B}=\beta\mathbf{B}/\alpha+\nabla\Theta. \tag{33}$$

和 ϕ 的规范 (13) 一样，对 Θ 作如下规范：

$$\Theta=-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^l \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}. \tag{34}$$

将 (33、34) 式代入 (18) 式得

$$\left.\frac{c\alpha\mathbf{B}}{4\pi\sigma}\right|_\Gamma=\left[-\frac{\partial A}{c\partial t}\hat{A}+\nabla\int_0^l\left(\frac{c\alpha}{4\pi\sigma}-\frac{\beta}{\alpha c}\right)\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}+\beta\mathbf{B}/\alpha c\right]_\Gamma. \tag{35}$$

从 (32) 和上式并引用 (28) 式知 A 为

$$\left.\begin{aligned}A&=A_0\exp\left(-\frac{c^2\alpha^2}{4\pi\sigma}t+\int_0^t\beta dt\right).\\ \mathbf{A}_0&=\mathbf{B}_0/\alpha-\nabla\int_0^l\mathbf{B}_0\cdot d\mathbf{l}/\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

将上式代入 (10) 得

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=\mathbf{E}_0\exp\left(-\frac{c^2\alpha^2}{4\pi\sigma}t+\int_0^t\beta dt\right),\\ \mathbf{E}_0&=\left(\frac{c\alpha^2}{4\pi\sigma}-\beta/c\right)\mathbf{A}_0+\frac{c\alpha}{4\pi\sigma}\nabla\int_0^l\mathbf{B}_0\cdot d\mathbf{l}.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

从 (9) 和上式，知

$$\mathbf{V}=c\mathbf{E}_0\times\hat{B}/B_0. \tag{38}$$

注意 $\mathbf{V}$ 独立于 t，是定常漂移场，这说明磁场和等离子气体没有交换机械能量，这是无力场应有的特性. 从 (37) 式知 $\sigma\to\infty$ 时，$\mathbf{E}_0$ 形态不变，和 (22、23) 式结果一致；此外 (37) 式还表明电场 $\mathbf{E}$ 的 $\hat{B}$ 向分量和电流位降平衡，其垂直于 $\hat{B}$ 的分量是 $\hat{A}$ 向，是由电阻电流和流体运动所控制.

五、最小欧姆损失

和处理磁能的变分类似，也可在限制条件

$$\int_v \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{B}d\tau=\text{常数} \tag{39}$$

下，对给定空间 v 的欧姆损失

$$Q^{a}=\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\int_v(\nabla\times\mathbf{B})^2 d\tau \tag{40}$$

进行变分. 取变量 $\delta\mathbf{B}$，相应于(6)式的变分为(取拉格朗日乘子 $-c^2\alpha/16\pi^2\sigma$)

$$\begin{aligned}\delta Q&=\delta Q^{(a)}+\delta\left[-\frac{c^2\alpha}{16\pi^2\sigma}\int_v\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{B}d\tau\right]\\&=\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\int_v[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})-\alpha\nabla\times\mathbf{B}]\cdot\delta\mathbf{B}d\tau=0.\end{aligned} \tag{41}$$

从上式知

$$\nabla \times \mathbf{J} = \alpha \mathbf{J}, \tag{42}$$

α 为常数.

进行相应于 (8) 式的证明，由 (39) 式得:

$$\int_v \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) d\tau$$

$$= \int_\Gamma \mathbf{B}^2 \hat{n} \cdot \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} \times \hat{B} d\sigma + 2\int_v \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \nabla \times \mathbf{B} d\tau = 0. \tag{43}$$

满足 (43) 式有两类条件，其一是界面条件:

$$(a)\quad \left.\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}\right|_\Gamma = 0, \tag{44}$$

$$(b)\quad B_\Gamma = 0. \tag{45}$$

(44) 式和 (24) 式提出的条件一致，这是一切 α 为常数的情况所必须满足的，(45)式说明界面无磁场，但根据维里定理[5]，在系统内部不可能存在一无力场，所以不讨论. 另一类条件来自 (43) 式后一积分为零，即

$$\int_v \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \nabla \times \mathbf{B} d\tau = \int_v \alpha B \frac{\partial B}{\partial t} d\tau = 0. \tag{46}$$

上式给出两条件，满足其一则 (46) 成立:

$$(c)\quad \alpha = 0, \tag{47}$$

$$(d)\quad \frac{\partial B}{\partial t} = 0. \tag{48}$$

(47) 式说明系统内部无电流，结合界面条件 (44)，知 (32)、(37) 式当 $\alpha = 0$ 时便是这一情况的解，同样的 (48) 式 $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ 是 (32) 式中 $\beta = \frac{c^2\alpha^2}{4\pi\sigma}$ 时的特殊情况.

从以上分析来看，$\alpha =$ 常数也表征无力场的最小欧姆损失状态，它是最小磁能状态 $\alpha = 0$，或 $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ 的特殊情况.

六、讨论和结论

1. α 为常数表征冻结型和电阻型无力场的最小磁能状态，是稳定的无力场，或无力场的归宿；其物理意义为: (1) 磁场形态不变，(2) 磁场以 $\exp(-c^2\alpha^2 t/4\pi\sigma)$ 因子衰变，也以 $\exp\int_0^t \beta dt$ 因子增长或减弱，(3) 电场的 $\hat{B}$ 向分量是电流位降，即有效电场垂直于 $\mathbf{B}$，(4) 气体的 $V_\perp$ 是有效电场引起的漂移，是定常的，即不受磁场的加速或减速作用，气体和磁场之间无机械能量交换.

2. α 为常数也表征无力场的最小欧姆损失状态，它的物理量是最小磁能状态物理量的 $\alpha = 0$，或 $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ 的一种特殊情况.

3. Ferraro 和 Plumpton[6] 曾估计 $\alpha =$ 常数是自然的归宿，从本文的证明来看，在强磁

场下能维持为无力场的磁场形态只是 $\alpha=$ 常数，否则这种无力场是不稳定的，系统要演化，其归宿是不能用本文的分析来断言的。

4. 有必要讨论一下（12）式的规范，积分（12）式得

$$\frac{c}{4\pi}\int\frac{\alpha B^2}{\sigma}d\tau=-\int_v \mathbf{B}\cdot\nabla\phi d\tau=-\int_\Gamma \hat{n}\cdot\mathbf{B}\phi d\sigma. \tag{49}$$

如果 Γ 为磁面而 ϕ 为单值，则（49）式右边为零，因此左边亦为零，因而 $\alpha=0$ 或 $B=0$，没有什么物理意义；但是从（13）知 ϕ 可以是多值函数，所以避免了没有物理意义的困难。

（5）气体总是有一些电阻的，作者发现电阻不单使磁场扩散，而且对 α 也有扩散作难。考虑长期演化问题应考虑电阻，但考虑某一短期的未稳定无力场或似稳无力场仍可以作为冻结型无力场处理。

参 考 文 献

[1] Lundquist, S., "Magneto-Hydrostatic Fields", *Arkiv. Fysio.*, 2 (1950), 361.

[2] Chandrasekhar, S. and Woltjer L. "On Force-Free Magnetic Fields", *Proc. Nat. Acad. Sci.* (Washington), 44 (1958), 285.

[3] Woltjer, L. "A Theorem on Force-Free Magnetic-Fields" *Proc. Nat. Acad. Sci.* (Washington), 44 (1958), 489.

[4] Jette, A. D., "Force-Free Magnetic Field in Resistive Magnetohydrostatics" Journal Mathematical Analysis and Applications 29 (1970), 109—122.

[5] Shafranov, V. D., Reviews of plasina Physics, Vol. 2.

[6] Ferraro, V. C. A. and Plumpton C., "Introduction to Magneto-Fluidmechanics" (Oxford Univ. Press, London, 1966) 2nd. Ed. p. 35.

ON FROZEN-IN AND RESISTIVE FORCE-FREE MAGNETIC FIELDS

PAN LIANG-RU

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

By taking the variation of the magnetic energy of a given system

$$\int_v\frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}d\tau=\int_v\frac{(\nabla\times\mathbf{A})^2}{8\pi}d\tau$$

with the constraint that

$$\int_v \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{A}d\tau=\text{const.}$$

and under the condition that the potential part $\nabla\phi$ of $\bar{E}$ is defined as

$$\nabla\phi=\frac{c}{4\pi\sigma}\nabla\int\alpha\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$$

which satisfies the relation that $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\cdot\mathbf{B}=0$,

it is found out that the force-free factor α for a stable magnetic field is a constant.