Rao, K. N., et al. (1971), *JFM*, 48, 339.
Roshko, A. (1975), Turbulent Mixing of Nonreactive and Reactive Flows, Plenum Press, New. York, p.295.
Schubert, G. & Corcos, G. M. (1967), *JFM*, 29, 113.
Willmarth, W. W. (1958), *JAS*, 25, 332.
Willmarth, W. W. & Wooldridge, C. E. (1962), *JFM*, 14, 187.
Willmarth, W. W. & Wooldridge, C. E. (1963), AGARD. Rep., 456.
Willmarth, W. W. & Lu, S. S. (1971), JFM, 55, 481.
Willmarth, W. W. (1975), Advances in Applied Mechanics, Vol. 15, Academic Press, p.159.
Willmarth, W. W. (1977), CRP Orsay, A, 1.
Winant, C. D. & Browand, F. K. (1974), *JFM*, 63, 237.
Zaric, Z. (1977), CRP Orsay, M, 1.

叶轮机械气动计算正、反问题的一些分析

中国科学院力学研究所　　陈静宜

摘要　本文指出了叶轮机械气体流面上运动方程组的矛盾型方程组性质，在此基础上分析了正、反问题之间的求介等价性，并介释了与方程类型判据不一致性存在矛盾的原因；对三维流动方程组和流线曲率法方程组的类型判据也进行了讨论。

目前，在叶轮机械气动计算中，广泛采用着以流面理论为基础的正、反问题计算方法。我们知道，正、反问题方程类型的判别准则是不同的，例如在S_2流面计算中，为保持方程按椭园型求介，对正问题应使气流全速度不超过音速；而对反问题应使气流子午分速不超过音速，可见，只要子午分速尚不超音，就可以采用亚音速的方法来进行超、跨音速叶轮机械S_2流面的反问题计算，但对于正问题计算却不行，为了克服这一障碍，有一种作法是采用反问题的迭代来求介正问题，显然存在这样的疑问：既然正、反问题方程类型的判据不同，这种作法是否正确？如果正确，又应如何介释与类型判据不同的矛盾。

正、反问题的分类是以流面理论为基础的，因此我们就从引进流面关系式后带来什么效果开始分析，为方便起见，采用直角坐标系中的绝对运动方程组，并假设运动为定常。

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1}$$

$$\begin{cases} v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_x}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_y}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ v_x\dfrac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \tag{1a}$$

这里暂不涉及热力参数p、ρ，即暂不讨论包括连续方程和能量方程的整个气动热力方程组，因此，方程组（1a）可视为三个自变量x、y、z和三个未知函数v_x、v_y、v_z的一阶拟线性偏微分方程组。

以引进z流面为例：

$$z = z(x, y) \tag{2}$$

即 $$v_z = \frac{\partial z}{\partial x} v_x + \frac{\partial z}{\partial y} v_y \tag{2a}$$

这时有沿流面的偏导数：

$$\frac{\overline{\partial} A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\overline{\partial} A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \tag{3}$$

A为流面上的任意物理量。

利用（3）改写（1a），可得到：

$$\left\{\begin{aligned} & v_x \frac{\overline{\partial} v_x}{\partial x} + v_y \frac{\overline{\partial} v_x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(v_x \frac{\overline{\partial} v_z}{\partial x} + v_y \frac{\overline{\partial} v_z}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial} p}{\partial x} && (4a) \\ & v_x \frac{\overline{\partial} v_y}{\partial x} + v_y \frac{\overline{\partial} v_y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(v_x \frac{\overline{\partial} v_z}{\partial x} + v_y \frac{\overline{\partial} v_z}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial} p}{\partial y} && (4b) \end{aligned}\right.$$

注意此时独立方程的个数仍是三个，即（4a）、（4b）和（2a），可以看出，引进流面关系式的效果是：

1）降维：自变量由x、y、z减为x、y，即由三维降为二维。

2）但未知函数增"维"：未知函数由v_x、v_y、v_z增为v_x、v_y、v_z和z，即由三个增为四个。

因此，为求介方程组（4a）、（4b）和（2a），要人为地对某一未知函数作出规定，这一规定对流面上的二维问题是任意的；但对于完全的三维流动介，因为它是由两个流面上的二维问题交叉迭代而得，这一规定则不应是任意的，而应满足两个流面的衔接条件。

由此，我们可将正、反问题定义为：

1）若对未知函数中的流面形状作出规定，如给定z，称为正问题。

2）若对未知函数中的速度参量作出规定，如给定v_z，称为反问题。

显然，这里正、反问题的分类是针对流面上的二维问题而言的。

下面分别写出正、反问题的运动方程组：

正问题：已知z＝z(x，y)，将已知函数记为：

$a = \frac{\partial z}{\partial x}$，$b = \frac{\partial z}{\partial y}$，可得：

$$\left\{\begin{aligned} & (1+a^2)\left(v_x \frac{\overline{\partial} v_x}{\partial x} + v_y \frac{\overline{\partial} v_x}{\partial y} \right) + ab\left(v_x \frac{\overline{\partial} v_y}{\partial x} + v_y \frac{\overline{\partial} v_y}{\partial y} \right) + a\left(v_x^2 \frac{\overline{\partial} a}{\partial x} + v_x v_y \frac{\overline{\partial} a}{\partial y} + \right. \\ & \qquad \left. + v_x v_y \frac{\overline{\partial} b}{\partial x} + v_y^2 \frac{\overline{\partial} b}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial} p}{\partial x} && (5a) \\ & (1+b^2)\left(v_x \frac{\overline{\partial} v_y}{\partial x} + v_y \frac{\overline{\partial} v_y}{\partial y} \right) + ab\left(v_x \frac{\overline{\partial} v_x}{\partial x} + v_y \frac{\overline{\partial} v_x}{\partial y} \right) + b\left(v_x^2 \frac{\overline{\partial} a}{\partial x} + v_x v_y \frac{\overline{\partial} a}{\partial y} + \right. \\ & \qquad \left. + v_x v_y \frac{\overline{\partial} b}{\partial x} + v_y^2 \frac{\overline{\partial} b}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial} p}{\partial y} && (5b) \end{aligned}\right.$$

反问题：已知v_z，将已知函数记为：

$u=\frac{\partial v_z}{\partial x}$、 $\nu=\frac{\partial v_z}{\partial y}$、 $w=\frac{\partial v_z}{\partial z}$，可得：

$$\begin{cases} v_x\frac{\bar{\partial} v_x}{\partial x}+v_y\frac{\bar{\partial} v_x}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}(uv_x+\nu v_y+wv_z)=-\frac{1}{\rho}\frac{\bar{\partial} p}{\partial x} & (6a) \\ v_x\frac{\bar{\partial} v_y}{\partial x}+v_y\frac{\bar{\partial} v_y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}(uv_x+\nu v_y+wv_z)=-\frac{1}{\rho}\frac{\bar{\partial} p}{\partial y} & (6b) \\ v_x\frac{\partial z}{\partial x}+v_y\frac{\partial z}{\partial y}=v_z & (2a) \end{cases}$$

可以看出，正、反问题方程组的区别是：正问题为求介二个未知函数v_x、v_y的二个方程的一阶偏微分方程组（5a)(5b)；而反问题为求介三个未知函数v_x、v_y、z的三个方程的一阶组(6a)(6b)和(2a)。正、反问题方程组的共同点是：正、反问题实质上是求介同一流面方程组的两种不同途径，因此，无论那种，它们的介都能满足方程组(4a)(4b)和(2a)，或者说，它们的介当中只要有一个参量对应相等，则另外的参量必一一对应相等，这就是正、反问题求介之间的等价性，对这一事实可描述如下：今设由反问题方程组（6a)(6b）和（2a）的求介得到$\tilde{v}_x$、$\tilde{v}_y$和$\tilde{z}$，而由正问题方程组（5a)(5b）的求介得到v_x、v_y、v_z和z，它们的等价性表现在：若在正问题求介中令$z=\tilde{z}$，则按正问题求解必得到$v_x=\tilde{v}_x$、$v_y=\tilde{v}_y$和$v_z=\tilde{v}_z$，反之亦然。

需要说明，当气流全速度出现超音时，正问题方程组是双曲型，有实特征方向存在，沿此方向存在介的间断，但在利用反问题迭代作正问题求介时，由于反问题方程组是椭圆型，所以不存在介的间断，因此用这种办法求介，则恰在间断面处相当于把气流参数拉平，这里正、反问题之间的等价性是在平均意义下近似满足的。

至此，我们对两个互相矛盾的事实均作了肯定的回答，即正、反问题之间既有求介的等价性，又有类型判据的不一致性，这种现象似非而是，如何介释呢？问题仍源于流面方程组（4a)(4b)和(2a)，由前面分析看出：这是一个矛盾方程组，它只有在对某一未知函数作出规定后才能求介，因此，选取不同的未知函数作出规定，就会得到不同的方程组，它们的判型准则也就可能不同，换言之，它们虽然都派生于同一流面方程组，但这一方程组是矛盾方程组，它并不能给出任何判型准则的规定；另外，矛盾方程组有无穷多介，这无穷多介可让作为规定值的某一未知函数作其上下限之间的变化而分别得到，而与作为规定值的未知函数的选取无关，这就是正、反问题又可以有等价性的原因。

从物理问题上看，只有三维的气动热力方程组才正确地反映了叶轮机械中气体流动的物理模型，下面将要证明，这时方程类型的判别准则是以气流全速度超音或亚音为界，这一判据是与物理问题一致的。而二维的正、反问题方程组均仅代表一些简化的物理模型，如正问题是在已知形状和厚度的流片中（此流片中心面的方程就是流面方程）求介气流参数分布的方程组；反问题是将一个气流参数，例如v_z给定，而求介其他气流参数和与之相适应的流片形状（厚度分布已知）的方程组，由于它们所代表的物理模型不同，判型准则也就不一样，而且，它们的判型结果当然也可以与实际的物理问题不一致。

以下给出叶轮机械三维气动热力学方程组的判型，这时除上述运动方程（1a）外，还要考虑连续方程：

$$\nabla\cdot(\rho\bar{v})=0$$

和能量方程：

$$\frac{dH}{dt}=0$$

这里自变量为x、y、z，未知函数有五个，即v_x、v_y、v_z和p、ρ。为了构成拟线性方程组的特征方程，只需写出方程组中含未知函数偏导数的各项即可：

$$
\begin{cases}
\rho\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial v_y}{\partial y}+\rho\dfrac{\partial v_z}{\partial z}+v_x\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial\rho}{\partial z}+\cdots\cdots=0\\[2ex]
v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_x}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0\\[2ex]
v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_y}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0\\[2ex]
v_x\dfrac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=0\\[2ex]
v_x\dfrac{h}{p}\dfrac{\partial p}{\partial x}+v_y\dfrac{h}{p}\dfrac{\partial p}{\partial y}+v_z\dfrac{h}{p}\dfrac{\partial p}{\partial z}-v_x\dfrac{h}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}-v_y\dfrac{h}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial y}-v_z\dfrac{h}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial z}+v_x^2\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+
\end{cases}
$$

$$
+v_xv_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_xv_z\frac{\partial v_x}{\partial z}+v_xv_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y^2\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_yv_z\frac{\partial v_y}{\partial z}+v_xv_z\frac{\partial v_z}{\partial x}+
$$

$$
+v_yv_z\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z^2\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{7}
$$

方程组（7）的特征方程为：

$$
\begin{vmatrix}
\rho\xi_1 & \Omega & 0 & 0 & v_x\Omega\\
\rho\xi_2 & 0 & \Omega & 0 & v_y\Omega\\
\rho\xi_3 & 0 & 0 & \Omega & v_z\Omega\\
\Omega & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{h}{\rho}\Omega\\
0 & \dfrac{1}{\rho}\xi_1 & \dfrac{1}{\rho}\xi_2 & \dfrac{1}{\rho}\xi_3 & \dfrac{h}{p}\Omega
\end{vmatrix}=0
$$

其中记$\Omega=v_x\xi_1+v_y\xi_2+v_z\xi_3$

$\xi=\{\xi_1、\xi_2、\xi_3\}$为特征方向所属积分曲面之法向量。

将特征方程展开，可得对于ξ_1、ξ_2、ξ_3的五阶齐次方程：

$$
\Omega^3\left[\frac{h}{\rho}(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)-\Omega^2\left(\frac{h}{p}-\frac{1}{\rho}\right)\right]=0
$$

由第二个因子为零，再注意到$c^2=\dfrac{h/\rho}{h/p-1/\rho}$，其中c为音速，可得：

$$
c^2(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)-\Omega^2=0
$$

展开后得：

$$
(c^2-v_x^2)\xi_1^2+(c^2-v_y^2)\xi_2^2+(c^2-v_z^2)\xi_3^2-2v_xv_y\xi_1\xi_2-2v_yv_z\xi_2\xi_3-2v_xv_z\xi_1\xi_3=0
$$

按二阶曲面理论，可由上式左端二次多项式的正交不变量I_1、I_2、I_3和I_4来判断该二阶曲面的类型，这里：

$I_1=3c^2-v^2$

$I_2=c^2(3c^2-2v^2)$

$I_3=c^4(c^2-v^2)$

$I_4=0$

对于 $I_4=0$ 情况，按二阶曲面理论知：若 $I_1I_3\leqslant0$ 或 $I_2\leqslant0$、$I_3\neq0$，则有实二阶锥面；若 $I_1I_3>0$ 和 $I_2>0$，则有虚二阶锥面。

对照我们的结果有：

若 $v<c$，则 $I_2<0$，$I_1I_3>0$；

若 $c<v<c\sqrt{\frac{3}{2}}$，则 $I_2>0$，$I_1I_3<0$；

若 $c\sqrt{\frac{3}{2}}\leqslant v<c\sqrt{3}$，则 $I_2\leqslant0$，$I_1I_3<0$，$I_3\neq0$；

若 $v\geqslant c\sqrt{3}$，则 $I_2<0$，$I_1I_3\geqslant0$，$I_3\neq0$。

显然，后三种情况均满足实特征条件，因此得到叶轮机械三维气动热力方程组的判型准则为 $v\gtrless c$，可见这时的判据是与物理问题一致的。

另外，若令（1a）中所有的 $\frac{\partial}{\partial z}$ 项为零，可得到与园柱座标系中"轴对称方程组"类似的二维方程组：

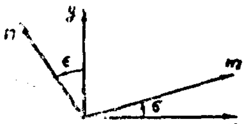
$$\begin{cases} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}=0 \end{cases} \tag{8}$$

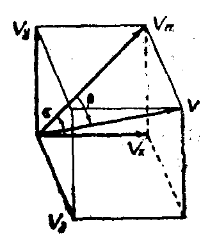
注意轴对称方程组所代表的物理模型是叶轮机械中远离叶片排的通道中的流动（一般近似地认为是间隙中的流动）。方程组（8）也是二个自变量的二维问题，但它已不是矛盾方程组，而是求介三个未知函数 v_x、v_y、v_z 的一阶拟线性偏微分方程组，因此不存在正、反问题的分类，也不存在判型准则的矛盾，可以证明，这一方程组的判型准则是 $v_x^2+v_y^2\gtrless c^2$。

最后我们将要分析采用流线曲率法计算时的速度梯度方程和相应的气动热力方程组，意在指出此时正、反问题方程组的类型受到与前述直角坐标系x、y、z方程组同样的判型准则的约束，从而说明采用流线曲率法时也不能直接用椭园型方程的求介方法来计算叶轮机械中的超、跨音速流动。

以下仍以z流面为例说明。

流线曲率法方程组的特点是采用斜交曲线坐标，且其中之一为流线在子午面(这里是x、y坐标面)上的投影m方向，另外一个是子午面上的任意方向n(如图示)；另一个特点是未知函数不采用速度分量 v_x、v_y、v_z，而是采用一个速度参量v（或其某一分量）和另外两个流线的几何参数σ和β(如图示)，因此，由直角坐标系中的z流面方程组（4a）（4b），通过以下变换即可得到流线曲率法方程组：





自变量变换：

$$\frac{\bar{\partial} A}{\partial m}=\frac{\bar{\partial} A}{\partial x}\cos\sigma+\frac{\bar{\partial} A}{\partial y}\sin\sigma$$

$$\frac{\bar{\partial} A}{\partial n}=-\frac{\bar{\partial} A}{\partial x}\sin\varepsilon+\frac{\bar{\partial} A}{\partial y}\cos\epsilon \tag{9}$$

未知函数变换：

$$v_x=v\cos\beta\cos\sigma \qquad v_z=v\sin\beta$$

$$v_y=v\cos\beta\sin\sigma \qquad v_m=v\cos\beta \tag{10}$$

使用（9）(10) 后，可将（4a)(4b) 和（2a）变换为：

$$\begin{cases} \sin(\sigma-\epsilon)v\cos\beta\dfrac{\bar{\partial} v\cos\beta}{\partial m}+\cos(\sigma-\epsilon)v^2\cos^2\beta\dfrac{\bar{\partial}\sigma}{\partial m}+v\cos\beta\dfrac{\bar{\partial} v\sin\beta}{\partial m}\dfrac{\bar{\partial} z}{\partial n}= \\ \qquad =-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\bar{\partial} p}{\partial n} & (11a) \\ v\dfrac{\bar{\partial} v}{\partial m}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\bar{\partial} p}{\partial m} & (11b) \\ \dfrac{\bar{\partial} z}{\partial m}=\mathrm{tg}\beta & (11c) \end{cases}$$

这就是z流面上采用流线曲率法计算时的运动方程组，它的特点和原方程组(4a)(4b)(2a)一样，即：

1). 降维：自变量由x、y、z减为m、n。

2). 增“维”：未知函数由v_x、v_y、v_z增为v、β、σ和z。

由此，可有同样的正、反问题定义：

1). 正问题：给定z。

2). 反问题：给定v（或v_z）。

现在就来讨论流线曲率法正、反问题方程组的判型，为此需将方程组写为正交坐标系中，以便采用一阶偏微分方程组理论中的判型方法，令式（11a）中$\epsilon=\sigma$，可得：

$$v^2\cos^2\beta\frac{\bar{\partial}\sigma}{\partial m}+v\cos\beta\frac{\bar{\partial} v\sin\beta}{\partial m}\frac{\bar{\partial} z}{\partial n}=-\frac{1}{\rho}\frac{\bar{\partial} p}{\partial n} \tag{12}$$

判型时除运动方程组外，还需包括连续方程和能量方程：

由$\dfrac{\bar{\partial}(\rho\tau v_x)}{\partial x}+\dfrac{\bar{\partial}(\rho\tau v_y)}{\partial y}=0$

变换后得：

$$\frac{\bar{\partial}\sigma}{\partial n}+\frac{1}{v\cos\beta}\frac{\bar{\partial} v\cos\beta}{\partial m}+\frac{\bar{\partial}\ln\rho}{\partial m}+\frac{\bar{\partial}\ln\tau}{\partial m}=0 \tag{13}$$

由$v_x\dfrac{\bar{\partial} H}{\partial x}+v_y\dfrac{\bar{\partial} H}{\partial y}=0$

变换后得：

$$v\cos\beta\frac{\bar{\partial} H}{\partial m}=0$$

由于利用（14）式后可写出：$\dfrac{\bar{\partial}\ln\rho}{\partial m}=-\dfrac{v}{c^2}\dfrac{\bar{\partial} v}{\partial m}$，所以（13）又可写成：

$$v\frac{\bar{\partial}\sigma}{\partial n}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\bar{\partial} v}{\partial m}-v\,\mathrm{tg}\,\beta\frac{\bar{\partial}\beta}{\partial m}+v\frac{\bar{\partial}\ln\tau}{\partial m}=0 \tag{13a}$$

注意（13a）中已不含未知函数ρ。

如前述，判型时只需写出方程组中含未知函数偏导数的各项：

1). 正问题：已知z＝z(x、y)，由(11c)知β也为已知，判型方程组可由(12)(11b)(13a)构成；

$$\begin{cases} v^2\cos^2\beta\frac{\overline{\partial}\sigma}{\partial m}+v\sin\beta\cos\beta\frac{\overline{\partial}z}{\partial n}\frac{\overline{\partial}v}{\partial m}+\frac{1}{\rho}\frac{\overline{\partial}p}{\partial n}+\cdots\cdots=0 & (15a)\\ v\frac{\overline{\partial}v}{\partial m}+\frac{1}{\rho}\frac{\overline{\partial}p}{\partial m}=0 & (15b)\\ v\frac{\overline{\partial}\sigma}{\partial n}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\overline{\partial}v}{\partial m}+\cdots\cdots=0 & (15c)\end{cases}$$

这里未知函数是v、σ、p。

方程组（15）还可化简为：

$$\begin{cases} v^2\cos^2\beta\frac{\overline{\partial}\sigma}{\partial m}-\sin\beta\cos\beta\frac{1}{\rho}\frac{\overline{\partial}z}{\partial n}\frac{\overline{\partial}p}{\partial m}+\frac{1}{\rho}\frac{\overline{\partial}p}{\partial n}+\cdots\cdots=0 & (16a)\\ v\frac{\overline{\partial}\sigma}{\partial n}-\frac{1}{\rho v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\overline{\partial}p}{\partial m}+\cdots\cdots=0 & (16b)\end{cases}$$

这里未知函数是σ、p，方程组（16）的特征方程是：

$$\begin{vmatrix} v^2\cos^2\beta & -v\frac{dm}{dn}\\ -\sin\beta\ \text{con}\beta\frac{\overline{\partial}z}{\partial n}-\frac{dm}{dn} & -\frac{1}{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\end{vmatrix}=0$$

展开，并利用$\frac{\overline{\partial}z}{\partial n}=\frac{\overline{\partial}z}{\partial m}\frac{dm}{dn}=\text{tg}\,\beta\frac{dm}{dn}$，得：

$$(1+\sin^2\beta)\left(\frac{dm}{dn}\right)^2+\cos^2\beta\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=0$$

其判别式为$4\cos^2\beta(1+\sin^2\beta)c^2(v^2-c^2)$，因此得正问题的判型准则是$v\lesssim c$。

2）．反问题：已知v_s，判型方程组可由（12）（11b)(11c）和（13a）构成：

$$\begin{cases} v_m^2\frac{\overline{\partial}\sigma}{\partial m}+v_m\frac{\overline{\partial}v_s}{\partial m}\frac{\overline{\partial}z}{\partial n}+\frac{1}{\rho}\frac{\overline{\partial}p}{\partial n}=0 & (17a)\\ -\frac{v_m^2}{\sin\beta\cos\beta}\frac{\overline{\partial}\beta}{\partial m}+\frac{1}{\rho}\frac{\overline{\partial}p}{\partial m}+\cdots\cdots=0 & (17b)\\ \frac{\overline{\partial}z}{\partial m}+\cdots\cdots=0 & (17c)\\ \frac{\overline{\partial}\sigma}{\partial n}-\frac{1}{\sin\beta\cos\beta}\left(1-\frac{v_m^2}{c^2}\right)\frac{\overline{\partial}\beta}{\partial m}+\cdots\cdots=0 & (17d)\end{cases}$$

这里未知函数是p、σ、β、z，方程组（17）的特征方程是：

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\rho}\frac{dm}{dn} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0\\ v_m^2 & 0 & -\frac{dm}{dn} & 0\\ 0 & -\frac{v_m^2}{\sin\beta\cos\beta} & -\frac{1}{\sin\beta\cos\beta}\left(1-\frac{v_m^2}{c^2}\right) & 0\\ -v_m\frac{\overline{\partial}v_s}{\partial m}\frac{dm}{dn} & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

展开后得 $\left(\frac{dm}{dn}\right)^2+\left(1-\frac{v_m^2}{c^2}\right)=0$，其判别式为 $4c^2(v_m^2-c^2)$，因此得反问题的判型准则是 $v_m \leqslant c$。

综合上面分析，可以得到如下有益的结论：

1）．只有三维的气动热力方程组才正确地反映了叶轮机械中气体流动的物理模型，它的类型判据是以气流全速度超音或亚音为界，这一判据是与实际物理问题一致的，因此，为了提高叶轮机械的气动设计水平，应该努力介决工程实用的三维方程组的求介方法。

2）．目前在叶轮机械气动计算中广为采用的正，反问题计算均属于流面上的二维问题，它们均不反映实际三维问题的物理模型，其数值结果也只是完全三维流动介的一个中间步骤，因此，应该寻求合适的修正方法对它们的计算结果进行校正。

参 考 文 献

〔1〕吴仲华，NACA TN 2604，1952。

〔2〕Courant, R., Hilbert, D., The Methods of Mathematical Physics, vol. II, 1962。

〔3〕中国科学院计算所三室，用流线迭代法求介叶轮机械的气动问题，叶轮机械气动热力计算、设计与试验经验交流会文集，1976。

〔4〕陈静宜，刘殿魁，叶轮机械沿任意曲线运动方程的通用形式及其应用，同上交流会文集，1976。

数学、力学和我们关于物理世界的概念*

H.B.G. Casimir**

1958年庆祝我们荷兰皇家科学院150周年的时候，我有幸作过《精密科学的确定性》的报告。我举了一些例子，试图主要从力学来阐明物理学理论的性质。这样做的理由很多。力学不仅是描述物理现象的头一个定量的数学理论例子，它的成果十分丰富，并且还深刻地影响着我们关于自然界的思维方法；自从牛顿发表他的《自然哲学的数学原理》以来，力学便是自然哲学的一个主要分支。

正如我在1958年的报告中所说的，我们信赖物理学理论的根据是，产生定量结果的实验具有重复性（这点对所有观察者来说都一样）；从逻辑推理和数学表述的理论可以作出各种予估。重复性、予估和数学表述，这些是检验物理学各分支的标准；力学是符合这些标准的头一个分支。

当我们处理的对象是活生生的人时，物理学可作的简化就不允许了。任何两颗卵石不会完全一样，但它们下落时，就精确地按相同的方式运动来说，它们却是充分一致的。任何两个人不会完全一样，他们的个性可以对病程或外科手术的成功与否起决定性影响。物理系统可以跟它的环境分隔开来。一个完全孤独的活人却会是极端变态的。因此，用力学方法来研究活生生的人时应当十分谨慎。在这个报告中我想指出，甚至沿着力学的途径来描述物理现象也是有局限性的。

牛顿力学的基本概念不仅能够应用于天体和地上固体的运动，而且还能够应用于固体内部的变形（弹性理论）和液体及气体内部的运动（水动力学和空气动力学）。人们曾越来越倾向于认为，力学

* 第14届国际理论与应用力学会议上的第一个总报告。 ** 荷兰皇家科学院院长。