关于动脉血流线性理论的基础

中国科学院力学研究所　陶祖莱

提要　用量纲分析方法分析了动脉脉冲血流线性理论的基础．结论是：1．目前流行的线化条件 $\frac{U}{c} \ll 1$，$\frac{R}{\lambda} \ll 1$ 不适于动脉血流．正确的线化条件应为 $\left(\frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L}\right) \ll 1$，或 $\frac{R}{L} \ll St$．据此，线性理论适于中等动脉；对主动脉，用以分析压力–流量关系及脉冲波传播特性尚可，不能用来求速度分布．这和实验研究的结论吻合．2．与流动迁移惯性力相比，压力径向梯度的作用是次要的．故在线化条件下考虑径向压力梯度的影响是不必要的．最后用 Lou 的有限幅度位移模型和最简流动方程给出了解，所得波速公式和计及 $\frac{\partial p}{\partial r}$ 时一样．

一、引　言

血管内径大于 1mm 时红细胞个性不直接影响血液流动的宏观特性．此时，血液动力学的根本问题是求粘弹性管系中非 Newton 流体脉冲运动的解．

如已确知血液和血管的本构方程，则在给定起始条件下，用计算机求单一血管中脉冲流场的数值解是可能的．但是，血液和血管材料的准确的本构方程至今尚未建立．而且研究心血管流动的目的之一就是要通过血流特征的观测来评价人体动脉系的功能．因此单凭计算技术是不解决问题的．即使有了准确的本构方程，计算成本也是个问题．据文献[5]，用最简单的幂次律和线弹性模型，在大型计算机上计算一个速度分布就需 7，8 小时，且所得结果不比近似理论好．所以，在计算技术高度发展的今天，对血液动力学来说，简单的近似理论仍有重大意义．

在动脉血流的各种近似理论中，应用最广的是线性理论．它基于假设：1．血液是不可压缩的 Newton 流体，因而流动服从 Navier-Stokes 方程．2．流动方程中迁移项可以忽略不计．假设 1 已为血液流变实验所证实．但什么条件下流动方程可以线性化？合理的简化形式是什么？什么条件下哪些参数起重要作用？哪些参数可不予考虑？等等，这些基本问题都缺乏严格分析．

最初，文献[14]把流动方程线化条件归结为

$$\frac{U}{c} \ll 1, \quad \frac{\omega R}{c} \ll 1 \tag{1}$$

U 为血流轴向速度，c 为脉冲波速，ω 为脉冲元频率，R 为血管内半径．但导出此结论的前提是：压力脉冲 $p = p_1(r)\exp[i(\omega t - kx)]$ 引起的血流脉动为 $u = u_1(r)\exp[i(\omega t - kx)]$．这仅当系统线性时才成立．显然这样导出的线化条件(1)不正确．

目前，一般把线化条件归结为脉冲波速远高于特征流速，波长 λ 远大于管径[6,13]：

$$\frac{U}{c} \ll 1, \quad \frac{R}{\lambda} \ll 1 \tag{2}$$

测量表明，正常生理条件下，$\frac{U}{c}\lesssim 10^{-1}$，$\frac{R}{\lambda}\lesssim 10^{-2}$—$10^{-3}$，这满足线化条件(2)，线性理论应该适用．但实验结果表明，对主动脉血流，线性理论的误差相当大．尤其是速度分布，据 Ling-Atabek 实验[9]，管心理论速度比测量值高 50%．他们认为这是非线性效应所致．但主动脉中，$\frac{U}{c}=\frac{u_{\max}}{c}\sim 10^{-1}$，$\frac{R}{\lambda}\sim 10^{-2}$，条件(2)成立．这是个矛盾．

其次，由于未对线化条件作深入分析，理论的发展也走了一些弯路．Womersley[14]，冯元祯[3]等径直从线化 Navier-Stokes 方程出发求解，在忽略迁移惯性力的同时，考虑压力径向梯度的作用．近年来 Lou[10]，Flaud[2]，Schwerdt & Canstantinnesco[12] 等也照此办理．这样做是否合理？流动非线性效应与在力径向梯度相比孰重孰轻？这也是个问题．

本文首先通过量纲分析导出正确的线化条件，由此建立合理的线化流动方程．最后结合 Lou 的有限幅度位移模型给出了脉冲波传播特性，所得结果和文献[10]一致．

二、流动方程线性化及相似参数

假设血液是不可压缩 Newton 流体，血流是充分发展的轴对称层流．取柱坐标 $\{r,\theta,x\}$，速度场 $\mathbf{v}=\{v,0,u\}$，壁面位移 $\boldsymbol{\Delta}=\{\eta,0,\xi\}$．血液流动服从

连续方程
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}=0 \tag{3}$$

运动方程
$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\frac{v}{r^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

边界条件
$$r=\mathscr{R}\ \text{时},\quad u=\frac{\partial\xi}{\partial t},\quad v=\frac{\partial\eta}{\partial t} \tag{5}$$

$\mathscr{R}=R+\eta$ 为瞬时内半径、R 为平衡态血管内半径，η，ξ 服从壁面运动方程，因具体模型而异．

欲简化，首先要判别方程中哪些项在什么条件下是相对小量；然后判断整个定解系统对这些相对小量是否敏感．忽略不敏感的相对小量，这样才能确定近似定解系统的合理形式及其适用范围．

为此，将方程(3)，(4)无量纲化．这里关键是选择每个变量的固有尺度作为其参考量，使无量纲方程中每一项等于一个代表该项量级的无量纲参数与量级为 1 的无量纲因子的乘积．这样，可从参数的量级来判断该项的量级，以决定其弃取．若所选参考量不是相应变量的固有尺度，则无量纲参数的量级不代表该项的量级．

对定常流，时间、长度、速度三种尺度只有两个是独立的．非定常流则三者均独立．轴对称脉冲流有两个长度尺度(L，R)，两个速度尺度(U，V)，一个时间尺度(T)．取 L 为血管长度或流程；R 为平衡态血管内半径；U 为最大平均流速
$$\bar{w}=\left\{\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r u\,dr\right\}_{\max}$$
或瞬时速度分布的最大值 $u_{\max}$；V 为径向特征速度，由连续方程规定；T 为心搏周期，可

用心率 f 或基波波长 λ 及波速 c 表示:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c} \tag{6}$$

设

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T} = \frac{ct}{\lambda} \\ &\bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{v} = \frac{v}{V} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

由式(3)得 $\frac{U}{L}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{R}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}}\right) = 0$, 故

$$V \sim \frac{R}{L} U \tag{8}$$

由式(4)得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{U}{c}\frac{\lambda}{L}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}}\right) \\ &\quad = -\frac{\lambda}{\rho U c}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{RU}\left(\frac{U}{c}\cdot\frac{\lambda}{L}\right)\cdot\frac{L}{R}\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \left(\frac{R}{L}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}\right] \\ &\frac{R}{L}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{R}{L}\left(\frac{U}{c}\cdot\frac{\lambda}{L}\right)\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}}\right) \\ &\quad = -\frac{1}{\rho U c}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nu}{\rho U}\left(\frac{U}{c}\cdot\frac{\lambda}{L}\right)\left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} + \left(\frac{R}{L}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

由此可见: I. $\dfrac{\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}}{\rho\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}} \sim \dfrac{U}{c}\cdot\dfrac{\lambda}{L}$. 故正确的流动方程的线化条件应为

$$\frac{U}{c}\cdot\frac{\lambda}{L} \ll 1 \tag{10}$$

引进 Strouhl 数

$$\mathrm{St} = \frac{fR}{U} \tag{11}$$

则条件(10)变为

$$\frac{R}{L} \ll \mathrm{St} \tag{10'}$$

当 $\frac{\lambda}{L} \sim 1$ 时,条件(10)与条件(2)等价;当 $\frac{\lambda}{L} \ll 1$ 时,条件(2)比条件(10)更强,只要条件(2)成立,流动方程肯定可以线化;但当 $\frac{\lambda}{L} \gg 1$ 时,条件 (2) 仅是线性化的必要条件,但不充分,只有当 $\frac{c}{U} \ll \frac{L}{\lambda} \ll 1$ 时,才能线性化.

据生理测量[4,11],从主动脉口到远端支动脉,流程约为基波波长的1/5;管径约1.50(主动脉)—0.1cm (远端支动脉);波速约 5—10m/s; 平均流速约 25—10cm/s; 最大流速约 40—15cm/s; 若取 $f = (5/4)$Hz, 则 λ 约为 4—8m. 由此得如下量级估计[1)]:

1) 据文献[8],任一数 A, 若 $3\times10^{n-1} < A \leqslant 3\times10^{n}$, 则 A 的量级为 10^{n}.

主动脉	远支动脉
$\dfrac{L}{\lambda} \sim 10^{-1}$	10^{-1}
$\dfrac{R}{L} \sim 10^{-2}$	10^{-3}—10^{-4}
$\dfrac{U}{c} = \dfrac{\bar{w}}{c} \sim 10^{-1}(0.05)$	10^{-2}
$\dfrac{U}{c} = \dfrac{\bar{u}_{\max}}{c} \sim 10^{-1}(0.09)$	10^{-2}
$\dfrac{U}{c}\cdot\dfrac{\lambda}{L} \sim \begin{cases} 10^{-1}(U=\bar{w}) \\ 1 \quad (U=u_{\max}) \end{cases}$	10^{-1}—10^{-2}
$\mathrm{St} \sim \begin{cases} 10^{-1}(U=\bar{w}) \\ 10^{-2}(U=u_{\max}) \end{cases}$	10^{-2}

因此可知：1. 目前流行的线化条件(2)不准确，不适于分析动脉血流．可以证明，若在无量纲化时取 λ 为纵向特征尺度（如文献[7]等所作），所得的就是线化条件(2)．但实际上 λ 不是流场固有的纵向尺度，而是时间尺度（与 c 结合）的反映，它比流场特征尺度大一个量级．故若以 λ 为参考长度，则无量纲方程中迁移项的系数 U/c 小并不一定意味着迁移项本身小．此即条件(2)错误的根源．

2. 支动脉流动满足条件(10)，线化理论适用．实验结果已证明这一点．

3. 对主动脉流动，若取 $U = u_{\max}$，则条件(10)不成立，故用线性理论求主动脉内流动速度分布必然引起很大误差．这样第一节引言中所说的矛盾就迎刃而解了．另一方面，若取 $U = \bar{w}$，则条件(10)勉强满足．故压力流量关系、波传播特性等仍可用线性理论处理．这也已被实验所证实．

II. $\dfrac{\rho\dfrac{\partial v}{\partial t}}{\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}} \sim \dfrac{\rho\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)}{\rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)} \sim \dfrac{\nu\Delta v}{\nu\Delta u} \sim \dfrac{R}{L}$. 故 $\dfrac{\partial p/\partial r}{\partial p/\partial x} \sim \dfrac{R}{L}$. 因此，若

$$R/L \ll 1 \tag{12}$$

则 $\partial p/\partial r = 0$，因而线化流动方程有两种可能的形式：

1. 若 $\left(\dfrac{U}{c}\dfrac{\lambda}{L}\right) \ll 1$ 且 $\dfrac{R}{L} \ll 1$，则式(4)简化为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right] \\ &\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

2. 若 $\left(\dfrac{U}{c}\cdot\dfrac{\lambda}{L}\right) \ll 1$，但条件(12)不成立，则式(4)变为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \\ &\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

生理测量表明，动脉系中条件 $R/L \ll 1$ 总是成立的，而线化条件要求 $R/L \ll 10^{-1}$—10^{-2}，它比 $R/L \ll 1$ 苛刻得多．故可断言，若流动满足条件(10)，必定同时满足式(12)．因此线性理论应以式(13)为基础．近年来许多新的线化模型从方程(14)出发，表面上看来更准确，实则不合理，徒增麻烦，于精度无补．还需指出：

1. $\frac{\partial p}{\partial r} \approx 0$ 并不意味着 $v = 0$．管是可膨胀的，解必须满足边界条件(5)及壁运动方程．若因 $R/L \ll 1$ 而忽略径向运动，则边界条件变为 $r = \mathscr{R}$ 时，$\partial\eta/\partial t = 0$，可变形管成了刚性管，问题的物理本质变了．

2. 按方程(13)，压力 p 为

$$p(x, t) = p_0 \exp[i(\omega t - kx)] \tag{15}$$

k 为传播系数，由频率方程确定．故式(3)，(13a)及壁面运动方程构成一完备的定解系统．

III. $\frac{\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}}{\mu\Delta\mathbf{v}} \sim \frac{UL}{\nu} = \mathrm{Re}\frac{L}{R}$,

$$\mathrm{Re} = \frac{UR}{\nu} \tag{16}$$

$$\frac{\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}}{\mu\Delta\mathbf{v}} \sim \frac{cR^2}{\lambda\nu} = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega}{\nu}R^2 = \frac{1}{2\pi}\alpha^2$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}R \tag{17}$$

由式(11)，(16)，(17)得

$$\alpha^2 = 2\pi\mathrm{Re}\cdot\mathrm{St} \tag{18}$$

一般大血管的 Re 为 10^3——10^2，St 为 10^{-1}—10^{-2}，故 α^2 约为 10^2—1．因此，在主动脉内，若不考虑血管壁的纵向运动，粘性效应可以忽略不计．但在支动脉中，必须计及粘性作用．如果管壁没有纵向约束，则即使 $\alpha^2 \gg 1$，由于壁纵向运动方程对粘性项是敏感的(见下节)，粘性作用也不可忽略．

IV. 当管壁物性、截面形状相同时，轴对称脉冲流的相似参数为：

细长比： $$\varepsilon = \frac{R}{L} \tag{19}$$

Strouhal 数： $$\mathrm{St} = \frac{fR}{U} = \frac{\omega R}{2\pi U}$$

Reynolds 数： $$\mathrm{Re} = \frac{UR}{\nu}$$

频率参数： $$\alpha = R\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

St, Re, α 中只有两个是独立的．

三、关于管壁运动方程

流动方程必须与壁运动方程相结合方能求解．现有种种线化理论的差异主要在于所

用的壁运动模型．这里不拟评述各种线化模型，仅以最简单的薄膜线弹性管小位移模型为例，讨论一些基本问题．壁运动方程

$$
\left.\begin{aligned}
\rho_w h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= p - \frac{Eh}{1-\sigma^2}\left[\frac{\sigma}{R}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\eta}{R^2}\right] \\
\rho_w h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{r=R} + \frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{R}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\}
\tag{20}
$$

这里 ρ_w 为壁材料密度；E 为壁材料 Young 氏模量；σ 为 Poisson 比；h 为壁厚．

设径向、轴向位移幅度为 ξ_0，η_0，令

$$
\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{\xi_0} \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U c}
\tag{21}
$$

则式(20)无量纲化为

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{t}^2} &= \frac{\rho U}{\rho_w c}\frac{\lambda^2}{\eta_0 h}\bar{p} - \frac{E}{\rho_w c^2(1-\sigma^2)}\frac{\lambda^2}{R^2}\left[\sigma\frac{\xi_0}{\eta_0}\frac{R}{L}\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} + \bar{\eta}\right] \\
\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{t}^2} &= -\frac{\mu}{\rho U R}\frac{\rho U^2}{\rho_w c^2}\frac{\lambda^2}{h\xi_0}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \left(\frac{R}{L}\right)^2\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right]_{\bar{r}=1} \\
&\quad + \frac{E}{\rho_w c^2(1-\sigma^2)}\frac{\lambda^2}{LR}\cdot\frac{\eta_0}{\xi_0}\left[\frac{\xi_0}{\eta_0}\frac{R}{L}\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{x}^2} + \sigma\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}\right]
\end{aligned}\right\}
\tag{22}
$$

因为

$$
\frac{\rho U}{\rho_w c}\frac{\lambda^2}{\eta_0 h} \sim \left(\frac{U}{c}\cdot\frac{\lambda}{L}\right)\frac{\lambda}{L}\left(\frac{L}{R}\right)^2\frac{R^2}{\eta_0 h} \gg 1.
$$

$$
\frac{E}{\rho_w c^2(1-\sigma^2)}\frac{\lambda^2}{R^2} \sim \frac{R}{h}\left(\frac{L}{R}\right)^2 \gg 1.
$$

$$
\frac{E}{\rho_w c^2(1-\sigma^2)}\frac{\lambda^2}{LR}\frac{\eta_0}{\xi_0} \sim \frac{R}{h}\left(\frac{\lambda}{L}\right)^2\left(\frac{L}{R}\right) \gg 1.
$$

所以可以看出：I．壁面惯性力是相对小量，对流动影响很小，可忽略．这样式(20)简化为

$$
\left.\begin{aligned}
p &= \frac{Eh}{1-\sigma^2}\frac{\eta}{R^2} \\
\mu\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} &= \frac{Eh}{1-\sigma^2}\frac{\sigma}{R}\frac{\partial \eta}{\partial x}
\end{aligned}\right\}
\tag{23}
$$

即壁可看作无质量的，其运动对流场的影响仅表现为边界位移．故分析流场时，用简单的静力平衡关系 (23) 与流动方程相结合可望得良好近似．由于外周组织的约束，壁纵向位移可不计．因此由式(23)可得如下简单压力-半径关系：

$$
p = \rho c_0^2\left(\frac{\mathscr{R}}{R} - 1\right) = \rho c_0^2\left(\sqrt{\frac{A}{A_0}} - 1\right)
\tag{24}
$$

$$
c_0^2 = \frac{Eh}{2\rho R(1-\sigma^2)}
\tag{25}
$$

$$
A = \pi\mathscr{R}^2, \qquad A_0 = \pi R^2
$$

II．实验证明壁材料粘弹性对脉冲波的传播有显著影响．但材料粘弹性只有在动力学行为中才显示出来．忽略壁惯性力后，动力学问题就成了静力学问题，问题的性质变了．因此，尽管壁惯性力是小量，对于脉冲波传播特性的影响却是不可忽视的．

III. 壁面粘性剪应力应和纵向弹性应力梯度同量级，但符号相反．故若管壁无约束，尽管流动粘性效应与流动惯性力相比是小量，亦不可忽略．否则壁面纵向力无法平衡．

IV. 因为 $p \sim \frac{Eh}{1-\sigma^2}\left[\frac{\sigma}{R}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\eta}{R^2}\right]$，所以

$$\frac{\eta_0}{R} \sim \frac{U}{c} \tag{26}$$

故线性壁运动方程要求

$$U/c \ll 1 \tag{27}$$

结合流动方程，式(26)意味着要求

$$\frac{\eta_0}{R} \sim 10^{-2} \quad 即 \quad \frac{\eta_0}{R} \lesssim 3\%$$

确实，许多实验都证明，壁位移超过管半径的 3% 时，线性小位移方程引起的误差相当可观．生理测量[1]表明，人体动脉 η_0/R 一般小于 3%，但主动脉的壁位移可达平衡半径的 5—10%，此时必须考虑有限位移效应．

因此，若着眼于流动速度分布、压力、流量的准确度，则重要的是计及流动非线性项，壁运动模型不妨简单些，用静力平衡关系(23)即可．另一方面，波的传播主要受壁运动影响，流动影响仅表现为管壁的脉动以运动的流体为边界．故若着眼于脉冲波传播，则首要的是改善壁运动模型，流动仍可用线化理论处理．

四、管壁作有限幅度位移时脉冲流的解

文献[10]在假设血管纵向因约束而不能位移的前提下，提出管壁径向位移模型为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\eta}{R} &= [1-\bar{\alpha}e^{i\omega t}]^{-\frac{1}{4}}e^{-ikx} \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} &= R\frac{i\bar{\alpha}\omega}{4}[1-\bar{\alpha}e^{i\omega t}]^{-\frac{5}{4}}e^{i(\omega t-kx)} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{6P_0}{E\epsilon}\ (称为载荷因子) \tag{29}$$

$$\epsilon = \left(\frac{R_0}{R_i}\right)^2 - 1\ (R_0\ 为外径，R_i\ 为内径) \tag{30}$$

$$p(x,t) = P_0 e^{i(\omega t-kx)} \tag{15}$$

方程(28)与式(13)，(3)联立求解，假设边界条件(5)在 $\mathscr{R} \equiv R$ 处满足．

设
$$\left.\begin{aligned} u(x,r,t) &= u_1(r)\frac{i\bar{\alpha}\omega R}{4}[1-\bar{\alpha}e^{i\omega t}]^{-\frac{5}{4}}e^{i(\omega t-kx)} \\ v(x,r,t) &= v_1(r)\frac{i\bar{\alpha}\omega R}{4}[1-\bar{\alpha}e^{i\omega t}]^{-\frac{5}{4}}e^{i(\omega t-kx)} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

代入式(13)得

$$\frac{d^2u_1}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{du_1}{dy} + u_1 = -\frac{iBkR}{\alpha^2 TD\mu}P_0 \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}&y=\gamma\frac{r}{R}\qquad \gamma=i^{\frac{3}{2}}\sqrt{T}\cdot\alpha\\&T=\frac{1+\frac{1}{4}\bar{\alpha}e^{i\omega t}}{1-\bar{\alpha}e^{i\omega t}}\\&D=\frac{\bar{\alpha}\omega}{4}\\&B=(1-\bar{\alpha}e^{i\omega t})^{\frac{5}{4}}\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

应用管心条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=0$，式(29)的解为

$$u_1(y)=C\frac{J_0(\gamma y)}{J_0(\gamma)}-i\frac{BkR}{\alpha^2TD\mu}P_0\tag{34}$$

C 为待定常数；J_0 为零阶第一类 Bessel 函数.

以式(31)代入式(3)得

$$\frac{dv_1}{dr}+\frac{v_1}{r}=ikv_1\tag{35}$$

$$v_1(y)=\frac{ikR}{2}\left[C\frac{2J_1(\gamma y)}{\gamma J_0(\gamma)}-\frac{iBkR}{\alpha^2TD\mu}P_0\right]\tag{36}$$

应用边界条件

$$r=R\text{ 时},\qquad u=0,\qquad v=\frac{\partial\eta}{\partial t}\tag{37}$$

即 $y=1$ 时，$u_1=0$，可得

$$C=\frac{iBRP_0}{\alpha^2TD\mu}k\tag{38}$$

$v_1=1$，可得

$$\frac{ikR}{2}F_{10}(\gamma)C+\frac{BR^2P_0}{2\alpha^2TD\mu}k^2-1=0\tag{39}$$

$$F_{10}(\gamma)=\frac{2J_1(\gamma)}{\gamma J_0(\gamma)}\tag{40}$$

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2}[1-F_{10}(\gamma)]\frac{BR^2}{\alpha^2TD\mu}P_0\tag{41}$$

由式(31),(34),(36),(38),(41)可得：I. 纵向和径向速度分布

$$\left.\begin{aligned}u(x,r,t)&=\frac{\bar{\alpha}\omega BP_0R^2k}{4\alpha^2TD\mu}\left[1-\frac{J_0(\gamma y)}{J_0(\gamma)}\right][1-\bar{\alpha}e^{i\omega t}]^{-\frac{5}{4}}e^{i(\omega t-kx)}\\v(x,r,t)&=\frac{i\bar{\alpha}\omega BP_0R^3k^2}{8\alpha^2TD\mu}\left[1-\frac{2J_1(\gamma y)}{\gamma J_0(\gamma)}\right][1-\bar{\alpha}e^{i\omega t}]^{-\frac{5}{4}}e^{i(\omega t-kx)}\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

式中 k 由式(41)给出．式(42)的实部即为纵向和径向速度分布.

II. 流量 Q 及平均速度 W

$$\left.\begin{aligned} Q &= \int_0^R 2\pi r u dr = \frac{\pi R^2 P_0}{\rho c}\left[\frac{1-\bar{\alpha}e^{i\omega t}}{1+\frac{1}{4}\bar{\alpha}e^{i\omega t}}\right][1-F_{10}(\gamma)]e^{i(\omega t-kx)} \\ \text{或}\quad Q &= \frac{\sqrt{3}\pi R^2 P_0}{\rho c_0}\frac{\sqrt{1-F_{10}(\gamma)}}{(1-\bar{\alpha}e^{i\omega t})^{\frac{1}{8}}\left(1+\frac{1}{4}\bar{\alpha}e^{i\omega t}\right)^{\frac{1}{2}}}e^{i(\omega t-kx)} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{P_0}{\rho c}\left[\frac{1-\bar{\alpha}e^{i\omega t}}{1+\frac{1}{4}\bar{\alpha}e^{i\omega t}}\right][1-F_{10}(\gamma)]e^{i(\omega t-kx)} \\ \text{或}\quad W &= \frac{\sqrt{3}P_0}{\rho c_0}\frac{\sqrt{1-F_{10}(\gamma)}}{(1-\bar{\alpha}e^{i\omega t})^{\frac{1}{8}}\left(1+\frac{1}{4}\bar{\alpha}e^{i\omega t}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{i(\omega t-kx)} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$c = \omega/k \quad \text{为复波速} \tag{45}$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{E\varepsilon}{\rho}} \tag{46}$$

式(43),(44)的实部即为流量和截面平均流速.

III. 脉冲波速及衰减

由式(41)直接得复波速公式

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 &= \frac{1}{3}[1-F_{10}(\gamma)]\frac{B}{T} \\ \text{或}\quad \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 &= \frac{1}{3}\frac{(1-\bar{\alpha}e^{i\omega t})^{\frac{9}{4}}}{1+\frac{1}{4}\bar{\alpha}e^{i\omega t}}[1-F_{10}(\gamma)] \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

式(47)的实部为脉冲波相速度,其虚部描述脉冲波的衰减.

值得指出的是式(47)和文献[10]中相应的公式完全一样,而文献[10]是从流动方程(14)出发的. 这也说明在线性化前提下考虑 $\partial p/\partial r$ 是不必要的.

任意脉冲 $p(x,t)$ 都可分解为

$$p(x,t) = \sum_{n=0}^{N} p_{0n}\exp[i(n\omega t - k_n x)] \tag{48}$$

对每个谐波分量均可用式(41)—(47)求出 u_n, v_n, Q_n, W_n, c_n, k_n, 然后叠加得速度分布,流量,平均速度. 但此时若 $k = k(\omega)$, 且 $\frac{d\omega}{dk} \neq$ 常数, 则波传播要用群速度来描述:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{49}$$

五、结 语

对近似理论,至为重要的是确定其适用范围. 在不影响其准确度的条件下,采用尽可

能简单的数学定式．迄今，动脉血流线化理论的研究对这两方面都不够注意，造成了一些混乱．

本文基于量纲分析得如下结论：

1. 目前流行的流动方程线性化条件 $\frac{U}{c} \ll 1$, $\frac{R}{\lambda} \ll 1$ 是错误的，正确的线化条件应为 $\left(\frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L}\right) \ll 1$，或 $\frac{R}{L} \ll \mathrm{St}$. 正常生理条件下，线性理论宜用于中等动脉．对主动脉流动，用于处理压力-流量和波传播问题尚可，不宜用于分析流场细节．

2. 合理的线化流动方程应为式(13)．

3. 壁面运动小位移线化模型的条件为 $\frac{\eta_0}{R} \lesssim 10^{-2}$. 故不适于主动脉．

我们认为，进一步发展动脉血流理论的方向应该是：1. 考虑流动非线性项，以获得较准确的速度分布及压力-流量关系，壁面模型可从简．2. 改进壁运动模型，首要的是考虑有限幅度位移及壁材料非线性粘弹性的影响，以便更准确地掌握脉冲波传播特性．此时流动仍可用线性方程处理．

参　考　文　献

[1] Attinger, E. O., Attinger, F. M., *Ann. Rev. Biophys. Bioeng.*, 2(1973).
[2] Flaud, P., et al., *J. de Physique*, 35, 11 (1974).
[3] Fung, Y. C., *Advances Appl. Mech.*, 11(1974).
[4] Hamilton, W. E., Handbook of Physiology, Section III, Circulation, Vol. 1(1962).
[5] Huckaba, C. E., Hahn, A. W., *Bull. Math. Biophs.*, 30(1969), 645—62.
[6] Kenner, T., Biomechanics, Its Foundations and Objectives (1972).
[7] Lee, J. S., Biomechanics (1966).
[8] Lin, C. C. Mathematics Applied to Deterministic Problems in Natural Sciences (1972).
[9] Ling, S. C., Atabek, B., *J. F. M.*, 55, 3(1972).
[10] Lou, Y. S., *J. Biomechanics*, 8(1975), 57—63.
[11] McDonald, D. A., Blood Flow in Arteries (1974).
[12] Schwerdt, H., Constantinesco, A., *Biorheology*, 13, 11(1976).
[13] Skalak, R., Biomechanics (1966).
[14] Womersley, J. R., *Phil. Mag.* [7] 46(1955), 199—221.