

# 高速流动激光器的稳定振荡条件、 模式结构与输出功率特性

中国科学院力学研究所 陈嗣熊

**1. 高速流动激光器的稳定振荡条件与 GDL 输出功率表达式** 假定介质沿  $x$  方向流动(图1), 两块平面反射镜  $M_1, M_2$  也沿  $x$  方向放置, 光轴平行于  $x$  轴而垂直于流动方向. 激励区位于坐标原点上游. 当气体到达光腔的上游边界  $x = 0$  时, 在气体中产生了

初始振动粒子数反转, 在  $x \geq 0$  的光腔区, 分子碰撞引起的能量交换与激光光腔内的受激辐射, 使气体的振动粒子数反转逐渐衰减下来. 我们假定所有的物理量都与  $y$  无关, 即假定问题可以作为二维来处理.

假定在一个波长范围内, 复介电常数  $\epsilon$  的变化不大(这是由于饱和增益在一个波长范围内变化不大), 这时光腔中的辐射场方程可写成

$$\nabla^2 E + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E = 0 \quad (1)$$

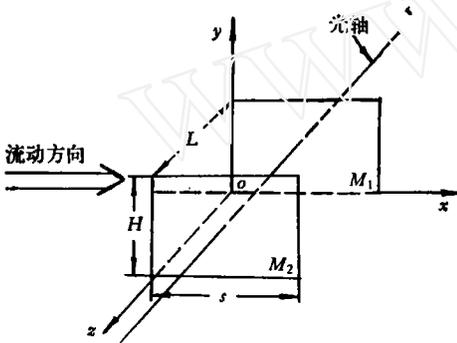


图1 高速流动激光器光腔略图

这里  $E$  是电矢量分量,  $\omega$  为角频率,  $c$  为真空中的光速,  $\epsilon = \epsilon_0 - i \frac{c}{\omega} g$ ,  $\epsilon_0$  为复介电常数的实部, 这里我们近似取作 1,  $g$  为饱和增益. 在我们的情形可以把  $g$  看作仅为  $x$  的函数, 事实上, 在用 Rensch<sup>[1]</sup> 的方法作数值计算时, 可以发现  $g$  随  $z$  的变化不大. 我们把  $g$  看作是沿  $z$  方向在  $L$  长度上的平均值.

我们假定在光腔进口与出口的边界条件为

$$E(0, z) = E(s, z) = 0 \quad (2)$$

事实上, 由于高速流动激光器光腔的 Fresnel 数一般较高, 因此, 由平行平面镜的空腔结果<sup>[2]</sup> 知道, 在高 Fresnel 数下, 条件(2)近似被满足. 这也就是说在高 Fresnel 数下, 衍射损失可以忽略. 这样, 在光腔进口, 我们可以假定  $g(0)$  的值就等于进口小讯号增益  $g_0$ .

方程(1)在边界条件(2)下求解, 我们可以假定解的形式为

$$E(x, z) = X(x) \cdot Z(z) \quad (3)$$

将式(3)代入式(1), 并分离变量, 可得

$$X'' + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - i \frac{\omega}{c} g \right) X = 0 \quad (4)$$

$$Z(z) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z} \quad (5)$$

这里  $k_x$  为分离常数,  $C_1, C_2$  为积分常数, 它们将由二镜面上的边界条件来确定。

设二平面反射镜  $M_1, M_2$  的反射率分别为  $R_1, R_2$ 。则由式(5), 对  $M_1$  镜而言, 我们可假定入射的辐射场(指电矢量)为

$$\mathbf{E}_i(x, z)|_{z=0} = X(x) \cdot e^{-ik_x z} \mathbf{e}_1|_{z=0} \quad (6)$$

这里  $\mathbf{e}_1$  为入射波的偏振方向单位矢量,  $k_x$  一般为复数。则经  $M_1$  镜反射的辐射场就可写为

$$\mathbf{E}_r(x, z)|_{z=0} = \sqrt{R_1} X(x) \cdot e^{ik_x z} \mathbf{e}_2|_{z=0} \quad (7)$$

这里  $\mathbf{e}_2$  为反射波的偏振方向单位矢量。被  $M_1$  镜吸收的辐射场可写为

$$\mathbf{E}_a(x, z)|_{z=0} = (1 - \sqrt{R_1}) X(x) \cdot e^{ik_x z} \mathbf{e}_3|_{z=0} \quad (8)$$

这里  $\mathbf{e}_3$  为镜面吸收波的偏振方向单位矢量,  $k_{3z}$  为吸收波的复波矢量在  $z$  轴上的投影。

若  $\mathbf{e}_1$  沿  $y$  轴的正方向(负方向的情形可由  $X(x)$  变号而化为正方向), 则  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  亦沿  $y$  轴方向, 且由镜面交界面条件知

$$E_{iy}|_{z=0} + E_{ry}|_{z=0} = E_{ay}|_{z=0} \quad (9)$$

这里下标“ $y$ ”表示各矢量在  $y$  轴上的投影。将式(6)–(8)代入式(9), 并注意到  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  都沿  $y$  轴方向( $\mathbf{e}_1$  沿  $y$  轴正方向), 可知  $\mathbf{e}_2$  是沿  $y$  轴的负方向, 故在  $M_1$  镜镜面上的辐射场可写成

$$E(x, z)|_{z=0} = (X(x) e^{-ik_x z} - \sqrt{R_1} X(x) e^{ik_x z})_{z=0} \quad (10)$$

若  $\mathbf{e}_1$  平行于  $xz$  平面, 则  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  亦分别平行于  $xz$  平面, 且由镜面交界面条件知

$$E_{ix}|_{z=0} + E_{rx}|_{z=0} = E_{ax}|_{z=0} \quad (11)$$

这里下标“ $x$ ”表示各矢量在  $x$  轴上的投影。由于激光光腔中的电磁波可以近似看作横电磁模(TEM), 因而, 我们可以把  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  近似看作沿  $x$  轴(为确定起见, 我们可假定  $\mathbf{e}_1$  沿  $x$  轴正方向)。将式(6)–(8)代入式(11), 可知  $\mathbf{e}_2$  是沿着  $x$  轴的负方向。因此, 在  $M_1$  镜镜面上的辐射场亦可由式(10)表示。由此, 对任意偏振方向,  $M_1$  镜镜面上的辐射场都可用式(10)来表示。

由式(10)可得

$$k_x \frac{E(x, 0)}{\partial E(x, 0)} = i \frac{1 - \sqrt{R_1}}{1 + \sqrt{R_1}} \quad (12)$$

同理, 对  $M_2$  镜而言, 在  $M_2$  镜镜面上的辐射场可写为

$$E(x, z)|_{z=L} = [X(x) \cdot e^{ik_x z} - \sqrt{R_2} X(x) e^{ik_x(2L-z)}]_{z=L} \quad (13)$$

这里因子  $e^{2Lk_x}$  由入射波与反射波在镜面的连接条件得到。由式(13)可得

$$k_x \frac{E(x, L)}{\partial E(x, L)} = -i \frac{1 - \sqrt{R_2}}{1 + \sqrt{R_2}} \quad (14)$$

镜面边界条件(12), (14)文献[3]曾采用过。由这里的推导知条件(12), (14)对一般的平行平面镜腔激光器是可以适用的。

文献[4]由式(3)–(5)与边界条件(2), (12), (14), 导出了高速流动激光器的普遍稳

定振荡条件:

$$\int_0^s g f^2 dx - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \int_0^s f^2 dx = 0 \quad (15)$$

它反映了从光腔进口至光腔出口,由流动激活介质建立辐射场所需满足的条件(这里符号意义同文献[4]).

我们也可把式(15)写成

$$\int_0^s g f^2 dx / \int_0^s f^2 dx = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \quad (16)$$

这里等号左边相当于  $g(x)$  按  $f^2(x)$  进行加权平均. 当辐射强度分布  $\bar{I}(x) = f^2(x)$  接近均匀分布(此时在  $x=0$  与  $x=s$  处,  $f^2(x)$  可能会有很大的梯度), 则式(16)左边就比较精确地接近于  $g(x)$  沿流动方向的平均值, 因而条件(16)就化成文献[5]的稳定振荡条件. 在一般情形, 正如下面将指出的,  $f^2(x)$  有图 2 的分布形状, 其峰值位置正好近似地在满足等式  $g(x_{\max}) = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2}$  的  $x_{\max}$  处, 而在  $x_{\max}$  的左右二边,  $f^2(x)$  随着离开  $x_{\max}$  的距离的增加而逐渐缓慢下降 ( $f^2(x)$  对应于高阶模), 故式(16)在  $g(x)$  变化不甚剧烈时(即对应于辐射强度不是特别大的情形)可近似化为

$$\frac{1}{s} \int_0^s g(x) dx \approx \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \quad (17)$$

这说明 Lee<sup>[5]</sup> 的稳定振荡条件在一般情形下可近似适用.

对于  $\text{CO}_2$  GDL 的情形, 文献[4]利用 Siegman 等<sup>[6]</sup>所采用的流动饱和增益表达式与普遍的稳定振荡条件(16), 导出了 GDL 输出功率表达式

$$P = \frac{2tHLA_0}{(a+B) \ln \frac{1}{R_1 R_2}} \left[ g_0 - g(s) - \frac{as}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right] \quad (18)$$

这里符号的意义都同文献[4]. 并由式(18)导出了最佳耦合公式, 由公式(18), 对 Gerry<sup>[7]</sup>发表的 GDL 典型实验进行了计算, 计算结果与 Gerry 的实验结果基本一致. 文献[4]把公式(18)与非流动激光器的 Rigrod 功率公式进行了比较, 指出了 Rigrod 公式对流动激光器的不适用性, 同时, 由公式(18)分析了 GDL 输出功率与各种参量间的关系, 指出了由式(18)与 Siegman 的饱和增益公式近似确定出口  $g(s)$  与输出功率  $P$  的方法.

**2. 用几何光学近似求流动激光器光腔的横模分布** 我们把镜面损失作为分布于介质中的吸收来处理, 这样, 光腔中的辐射场方程变成

$$\nabla^2 E + \left[ k^2 - ik \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) \right] E = 0 \quad (19)$$

至于单位长度的损失写成  $\frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2}$ , 这可由非流动情形的稳定振荡条件  $e^{2sL} \cdot R_1 \cdot R_2 = 1$  看出. 对光波情形,  $k$  甚大, 令  $E$  取下列形式

$$E(x, z) = f(x, z) e^{ikS(x, z)} \quad (20)$$

将式(20)代入式(19), 等式二边除以  $k^2$ , 忽略含  $1/k^2$  的项, 并使  $1/k$  的同次幂的系数相等, 最后得: 由  $(1/k)^0$  的系数得

$$\nabla S \cdot \nabla S = 1 \quad (\text{Eiconal 方程}) \quad (21)$$

由  $(1/k)^2$  的系数可得

$$2 \nabla S \cdot \nabla f + f \cdot \left[ \nabla^2 S - \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) \right] = 0 \quad (\text{输运方程}) \quad (22)$$

用特征方法解方程(21)<sup>[8]</sup>, 可得

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\sigma^2} = 0 \quad (23)$$

$$S = S_0 + \sigma \quad (24)$$

这里  $\sigma$  是沿光线的弧长,  $S_0$  是积分常数,  $\mathbf{r}$  是光线上点坐标的径矢量。由式(23)知, 在几何光学近似下光线是直线。将式(24)代入式(22), 可得

$$2 \frac{df}{d\sigma} - f \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) = 0 \quad (25)$$

由于在几何光学近似下,  $\frac{dx}{d\sigma} = \pm \frac{k_x}{k}$ , 故式(25)又可写成

$$\pm 2 \frac{k_x}{k} \cdot \frac{df}{dx} - f \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) = 0$$

解出  $f$ , 最后得

$$f = f_0 \exp \left[ \pm \frac{k}{2k_x} \int_0^x \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) dx' \right] \quad (26)$$

这里  $f_0$  是积分常数。注意, 这里的推导中并没有用到模式高阶的假定, 故式(26)应该对任意横模都成立。

由于我们主要研究横模的构造, 由式(3)~(5), (19)可以看出, 横模  $X(x)$  的位相因子为  $e^{\pm ik_x x}$ , 故我们由式(26)可得方程(19)的二个横模近似解:

$$\begin{aligned} X_1(x) &= C_1 \exp \left[ \frac{k}{2k_x} \int_0^x \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) dx' + ik_x x \right] \\ X_2(x) &= C_2 \exp \left[ -\frac{k}{2k_x} \int_0^x \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) dx' - ik_x x \right] \end{aligned}$$

这里  $C_1, C_2$  是积分常数。显然,  $X_1(x)$  表示向  $x$  正方向传播的波, 而  $X_2(x)$  表示向  $x$  负方向传播的波。实际的波是这二种波的叠加, 故实际的近似解应为

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \exp \left[ \frac{k}{2k_x} \int_0^x \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) dx' + ik_x x \right] \\ &\quad + C_2 \exp \left[ -\frac{k}{2k_x} \int_0^x \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) dx' - ik_x x \right] \end{aligned} \quad (27)$$

由边界条件(2), 得  $C_2 = -C_1$ 。代入式(27), 得

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \left\{ \exp \left[ \frac{k}{2k_x} \int_0^x \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) dx' + ik_x x \right] \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[ -\frac{k}{2k_x} \int_0^x \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) dx' - ik_x x \right] \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

由式(28)求  $|X(x)|^2$  可得

$$|X(x)|^2 = X_0^2 \left\{ \sin^2 k_x x + \sin k^2 \left[ \frac{k}{2k_x} \int_0^x \left( g - \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right) dx' \right] \right\} \quad (29)$$

这里  $X_0^2$  是常数。考虑到近似稳定振荡条件(17)与边界条件(2),由式(29)得

$$k_x = \frac{(n+1)\pi}{s} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (30)$$

即当  $k_x$  满足式(30)时,解(29)近似满足边界条件(2)。式(29),(30)就是我们欲求的横模分布解析表达式。

由式(29),可以看出  $k_x$  越大 ( $k_x \ll k$ ),  $|X(x)|^2$  的曲线越趋近平坦,从而模体积越大(参看图 2)。正如文献[9]曾指出的,实验结果表明场强分布较平坦,横模结构是高阶的。事实上,由于  $N_2$  的  $V=1$  能级的能量是通过与  $\text{CO}_2(001)$  能级的近共振交换而释放出来的,故能量的释放需要一定时间,也就是需要一定的流动方向长度。因此,对于模体积较大的高阶模将从介质中获取更多的能量,这样,由于模式竞争的结果将是高阶模占主要地位。但是随着横模阶数的增加,衍射损失亦会增加。对于充有均匀激活介质的 Fabry-Perot 腔,由文献[10]的结果知道,在大 Fresnel 数情形,衍射损失主要对应于逃逸损失(walk-off loss),此时的逃逸损失可写为

$$- \frac{\cos \theta_0}{L} \ln \left( 1 - \frac{2L}{s} \sin \theta_0 \right)$$

这里  $\sin \theta_0 = k_x/k$ 。为使竞争结果能占主要地位,一方面要求模体积大,同时也须使衍射损失远小于镜面损失,即要求

$$- \frac{\cos \theta_0}{L} \ln \left( 1 - \frac{2L}{s} \sin \theta_0 \right) \ll \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2}$$

由于  $k_x \ll k$ ,  $\sin \theta_0 = k_x/k$ , 故上式又可简化成

$$\frac{2k_x}{sk} \ll \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \quad (31)$$

当然,这里所考虑的是小讯号增益  $g_0$  并不甚大的情形(如  $g_0$  很大,衍射损失较大的模将也能振荡)。虽然要求  $k_x$  对应于高阶模,且有(31)式的限制,  $k_x$  仍可取许多值,说明实际情形一般是多模振荡。

式(29)中的  $X_0^2$  可由下式确定(假定一个模占优势):

$$iH \int_0^s |X(x)|^2 dx = P \quad (32)$$

这里输出功率  $P$  可由式(18)求出。把  $|X(x)|^2$  的表达式(29)与选定的  $k_x$  值代入(32),可以定出  $X_0^2$  值。

由式(29)可以看出,花括弧中的第一项对应于空腔的模,而第二项反映了流动增益畸变的影响,除了很大的  $k_x$  值或  $g_0$  十分接近于  $\frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2}$  的情形外,模式形状主要取决

于式(29)花括弧中的第二项。本文讨论的主要都属于这种情况。由式(29)花括弧中的第二项可以看出:  $|X(x)|^2$  从  $x=0$  时的零值开始,随着  $x$  值的增加逐渐递增(在  $x=0$  与  $x=s$  附近,由于  $\sin^2 k_x x$  项的影响,可能会有某些小的起伏),直到峰值位置  $x_{\max}$ , 这里峰值位置近似由

$$g(x_{\max}) = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \quad (33)$$

确定. 当  $x$  越过  $x_{\max}$  后,  $|X(x)|^2$  将随着  $x$  值的增加而减小, 直到  $|X(x)|^2 = 0$  (其图形见图 2). 由式(33)可知, 不管模式怎么不同, 但其峰值位置都基本相同, 都由式(33)确定.

为了能用解析式表示  $x_{\max}$ , 我们近似用  $f^2$  沿流动方向的平均值

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{s} \int_0^s f^2 dx = \frac{P}{tHs}$$

来代替文献[6]的  $g(x)$  表达式中的  $\bar{I}(x)$  (当然, 这只有在  $f^2(x)$  变化不大时才允许), 并将  $g(x)$  表达式代入式(33), 解出  $x_{\max}$ , 可得

$$x_{\max} \approx - \frac{A_0 + \bar{f}^2}{aA_0 + (a+B)\bar{f}^2} \ln \left[ \frac{1 + \bar{f}^2/A_0}{2\bar{f}_0 L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \right] \quad (34)$$

式(34)给出了峰值位置与各参量之间的关系. 例如: 由式(34)可看出, 耦合度的增加, 一般将使峰值位置向原点方向移动; 由于  $a, B$  都正比于  $x_{\text{CO}_2}/x_{\text{N}_2}$ , 故  $\text{CO}_2$  成分的增加, 也将使  $x_{\max}$  向原点方向靠近.

我们对 Gerry<sup>[7]</sup> 的典型实验, 计算了横模形式 (图 2). 由于  $\frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \approx 1 \times 10^{-3}$ ,  $s = 20 \text{ cm}$ , 且考虑到条件(31), 我们若取  $k_x = 1.55\pi$ , 把它代入式(29) (我们近似有  $\bar{f}^2 \approx 5000 \text{ W/cm}^2$ ). 最后得

$$|X(x)|^2 = X_0^2 \{ \sin^2 1.55\pi x + \sin^2 (-13.65 e^{-0.1025x} - 0.61x + 13.65) \} \quad (35)$$

图 2 画出了  $|X(x)|^2/X_0^2$  随  $x$  变化的曲线. 若  $k_x$  值取为  $2\pi$ , 曲线将平坦得多. 将式(35)代入式(32), 可以求得 (对应于一个模占优势的情形)

$$X_0^2 \approx 218 \text{ W/cm}^2$$

将它代入式(35), 最后得到当  $k_x$  取  $1.55\pi$  时的横模分布函数

$$|X(x)|^2 = 218 \sin^2 1.55\pi x + 218 \sin^2 (-13.6 e^{-0.1025x} - 0.61x + 13.65)$$

若  $k_x$  取  $2\pi$ , 同样由式(32)可求得  $X_0^2 \approx 714 \text{ W/cm}^2$ . 由式(34)可求得峰值位置  $x_{\max} = 8.1 \text{ cm}$ . 由图 2 可以看出,  $k_x = 2\pi$  所对应的曲线与文献[11]的多孔输出烧蚀结果比较相似.

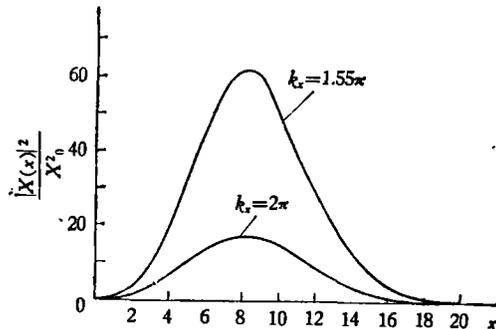


图 2 对 Gerry<sup>[7]</sup> 的典型实验, 用公式(29)算得的横模分布图 ( $k_x$  分别取  $1.55\pi$  与  $2\pi$ )

## 参 考 文 献

- [1] Bensch, D. B., *Appl. Opt.*, **13**, 11 (1974).
- [2] Вайнштейн, Л. В., Открытые Резонаторы и Открытые Волноводы, Советское Радио (1966).
- [3] Красицкая, Л. С. и Напартовиг, А. П., *Теплофизика Выс. Темп.*, **11**, 4(1978), 736.
- [4] 陈嗣熊, 气动激光器的稳定振荡条件与输出功率激光, **5**, 2 (1978).
- [5] Lee, G., *The Phys. of Fluids*, **17**, 3 (1974).
- [6] Siegman, A. E. and Sziklas, E. A., *Appl. Opt.*, **13**, 12 (1974).
- [7] Gerry, E. T., AIAA Paper No. 71-23.
- [8] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons (1973), 374.
- [9] Tulip, J. and Seguin, H., *J. Appl. Physics*, **42**, 9 (1971).
- [10] Kotik, J. and Newstein, M. C., *J. Appl. Physics*, **32**, 2 (1961).
- [11] Pratt, H. L., AD-723961 (1971).

www.cnki.net