

# 气动激光器的非平衡流计算

中国科学院力学研究所 严海星 陈丽吟\*

**摘要** 本文对  $\text{CO}_2\text{-N}_2\text{-H}_2\text{O}$  激光体系提出了三振型四温度的振动弛豫模型,并给出了较严格的弛豫方程组。对准一维非平衡流计算中有关的一系列问题作了分析,并用自己整理的弛豫速率数据进行了大量的数值计算。我们的计算结果消除了其他作者的计算与实验不能很好相符的现象,加大膨胀面积比,可有效地改进器件性能,适当地减小喉道高度,对性能也有所改进。对于燃烧型气动激光器,滞止温度有一个最佳值,在  $1400\text{--}1600\text{K}$  范围内,与 Anderson 的论证相异,我们的计算结果表明,在高滞止温度、大面积比的喷管流中,水的最佳含量仍在 1% 附近,器件性能随水含量的增加而迅速变坏。研究了各段喷管型线对器件性能的影响。初步讨论了弛豫模型、方程和数据对计算的影响,表明它们对结果影响颇大。

## 一、引 言

气动激光器是六十年代末期出现的新型大功率激光器件,近几年来受到广泛重视,得到迅速发展<sup>[1]</sup>。理论分析对于气动激光器的产生和发展的各个阶段都起了决定性的指导作用。特别是准一维振动非平衡流的计算,为气动激光器的设计和改进提供了有力的手段。

准一维非平衡流计算可分为两大类。一类是 Басов 等首先采用的定常方法<sup>[2-6]</sup>。这是将准一维流动方程与振动弛豫方程联立,对定常后的常微分方程组用 Runge-Kutta 法求解。由于在收缩-扩张喷管喉道附近的声速点处方程有奇点,因此对整个喷管不能简单地统一求解。为了简化计算,一般都把喷管的亚声速段假定为平衡流,从喉道起计算;并且为了克服奇点的困难,采用某种参数调整技术来求得方程组的收敛解。

另一类为 Anderson 采用的非定常方法<sup>[7]</sup>。这是对非定常的联立方程组中各未知变量,假定一个  $t = 0$  时刻的初始值分布,再按一定的差分格式由  $t$  时刻的各变量求出  $t + \Delta t$  (时间步长  $\Delta t$  要求满足一定的稳定性条件) 时刻的值,多次重复,直到相当大的  $t$  值后,各参数均收敛于其定常值为止。这种形式的方程组对整个喷管均为双曲型的,在喉道区域不存在奇点,对于整个喷管可直接采用统一的方法求解,结果便把喷管亚声速段的非平衡效果也自然计入,并且避免了数值计算过程中的人为调整可能造成的误差。由于这种方法显见的优点,近几年来被广泛用来作气动激光器的理论计算<sup>[8-13]</sup>。

但是,国外的计算都采用了简化的弛豫模型或采用的弛豫方程有误,并且大都未包括最新的弛豫数据。因此,理论计算结果与实验测量之间存在某些偏差或矛盾<sup>[14,10]</sup>。

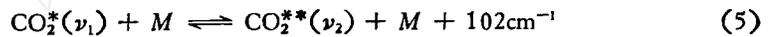
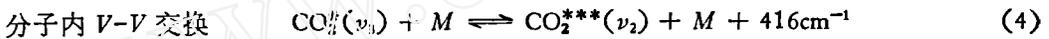
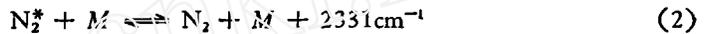
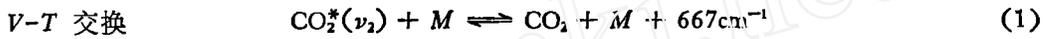
本文提出了三振型四温度的弛豫模型,并给出了较严格的弛豫方程组;列出了非平衡流的计算公式;讨论了有关数值计算的一些问题;给出了主要的计算结果,与别人的理论、

\* 盛家宁同志曾参加编制计算程序的部分工作。

实验结果作了比较,并对一些问题进行了分析.

## 二、弛豫模型和弛豫方程

CO<sub>2</sub>-N<sub>2</sub>-H<sub>2</sub>O 激光体系中的“催化剂” H<sub>2</sub>O 的振动弛豫速率极快,总可以把它的各振型都近似地看作随时与平动平衡. 这样, H<sub>2</sub>O 与 CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> 的分子间 V-V 交换就等价于把 H<sub>2</sub>O 只看作 CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> 分子弛豫过程的碰撞伴侣<sup>[15]</sup>. 激光体系的振动能级图和能量交换过程见图1. 振动弛豫过程为:



其中 \* 表示一个振动能量子,碰撞伴侣  $M = CO_2, N_2, H_2O(C, N, H)$ . 弛豫方程组为:

$$\frac{dE_1}{dt} = \left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{\nu_1 \rightarrow 2\nu_1} + \left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{\text{辐射}} \quad (6)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = -\frac{2\theta_2}{\theta_1} \left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{\nu_1 \rightarrow 2\nu_1} + \left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{\nu_2 \rightarrow T} + \left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{\nu_3 \rightarrow 3\nu_3} \quad (7)$$

$$\frac{dE_3}{dt} = -\frac{\theta_3}{3\theta_2} \left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{\nu_3 \rightarrow 3\nu_3} + \left(\frac{dE_3}{dt}\right)_{\nu_3 \rightarrow \nu_N} + \left(\frac{dE_3}{dt}\right)_{\text{辐射}} \quad (8)$$

$$\frac{dE_N}{dt} = -\frac{\theta_N}{\theta_3} \left(\frac{dE_3}{dt}\right)_{\nu_3 \rightarrow \nu_N} + \left(\frac{dE_N}{dt}\right)_{\nu_N \rightarrow T} \quad (9)$$

其中  $E_1, E_2, E_3, E_N$  分别为单位质量(g)混合气体中 CO<sub>2</sub>( $\nu_1$ ), CO<sub>2</sub>( $\nu_2$ ), CO<sub>2</sub>( $\nu_3$ ) 及 N<sub>2</sub> 等振型中储存的振动能:

$$E_i = \frac{g_i N_i k \theta_i}{e^{\theta_i/T_i} - 1} \quad (10)$$

式中  $N_1 = N_2 = N_3 = N_C$  和  $N_N$  分别为每克混合气体中 CO<sub>2</sub> 和 N<sub>2</sub> 的分子数;  $g_i$  为简并度,除  $g_2 = 2$  外均为 1;  $T_i$  为振动温度;  $\theta_i$  为振动特征温度;  $k$  为 Boltzmann 常数.

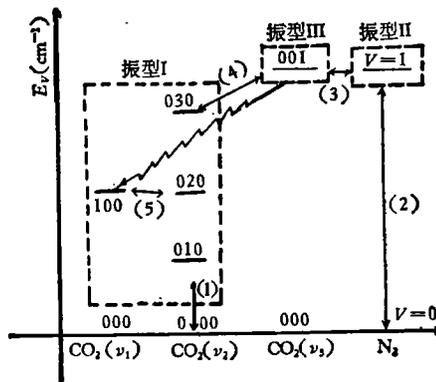


图1 CO<sub>2</sub>-N<sub>2</sub> 振动能级图

由普遍形式的振动弛豫方程<sup>[16]</sup>可以推得:

$$\left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{\nu_2 \rightarrow T} = \sum_M N_M^{(V)} K [C2(1 \rightarrow 0); M] \times [E_2(T) - E_2] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{\nu_3 \rightarrow 3\nu_2} &= \sum_M N_M^{(V)} K [C3(1 \rightarrow 0), C2(0 \rightarrow 3); M] \times 3N_c k \theta_2 \\ &\times \left[ \left(\frac{E_3}{N_c k \theta_3}\right) \left(\frac{E_2}{2N_c k \theta_2} + 1\right)^3 - \left(\frac{E_3}{N_c k \theta_3} + 1\right) \left(\frac{E_2}{2N_c k \theta_2}\right)^3 e^{(3\theta_2 - \theta_3)/T} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE_3}{dt}\right)_{\nu_3 \rightarrow \nu_N} &= N_N^{(V)} K [C3(1 \rightarrow 0), N(0 \rightarrow 1)] \times N_c k \theta_3 \\ &\times \left[ e^{(\theta_N - \theta_3)/T} \left(\frac{E_3}{N_c k \theta_3} + 1\right) \left(\frac{E_N}{N_N k \theta_N}\right) - \left(\frac{E_3}{N_c k \theta_3}\right) \left(\frac{E_N}{N_N k \theta_N} + 1\right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\left(\frac{dE_N}{dt}\right)_{\nu_N \rightarrow T} = \sum_M N_M^{(V)} K [N(1 \rightarrow 0); M] \times [E_N(T) - E_N] \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{\nu_1 \rightarrow 2\nu_1} &= \sum_M N_M^{(V)} K [C1(1 \rightarrow 0), C2(0 \rightarrow 2); M] \times N_c k \theta_1 \\ &\times \left[ \left(\frac{E_1}{N_c k \theta_1} + 1\right) \left(\frac{E_2}{2N_c k \theta_2}\right)^2 e^{(2\theta_2 - \theta_1)/T} - \left(\frac{E_1}{N_c k \theta_1}\right) \left(\frac{E_2}{2N_c k \theta_2} + 1\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

其中平衡振动能  $E_2(T)$ ,  $E_N(T)$  分别为(10)式中将振动温度  $T_2$ ,  $T_N$  换成平动温度  $T$  后的值.  $N_M^{(V)}$  为单位体积(每立方厘米)内  $M$  组分的粒子数密度

$$N_M^{(V)} = \rho N_M \quad (16)$$

$\rho$  为密度(g/cm<sup>3</sup>),  $K$  为振动弛豫过程的速率系数.

由于 CO<sub>2</sub> 的  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  振型之间存在着 Fermi 共振, CO<sub>2</sub>( $\nu_1 \rightarrow 2\nu_2$ ) 过程进行得极快, 即  $K[C1(1 \rightarrow 0), C2(0 \rightarrow 2); M]$  值很大. 如果在某个时刻  $\nu_1$  与  $\nu_2$  振型的振动能量不满足

$$\left(\frac{E_1}{N_c k \theta_1} + 1\right) \left(\frac{E_2}{2N_c k \theta_2}\right)^2 e^{(2\theta_2 - \theta_1)/T} - \left(\frac{E_1}{N_c k \theta_1}\right) \left(\frac{E_2}{2N_c k \theta_2} + 1\right)^2 \approx 0 \quad (17)$$

从式(15)可知, 大的  $K$  值将使  $E_1$  有大的时间变化率  $\left(\frac{dE_1}{dt}\right)$ ,  $\nu_1$  振型将在极短的时间内与  $\nu_2$  振型达成平衡. 换言之, 只要  $E_1$ ,  $E_2$  不满足式(17), 快速的 CO<sub>2</sub>( $\nu_1 \rightarrow 2\nu_2$ ) 弛豫过程总会在可以忽略的短时间内使式(17)的左端趋于 0. 这样, 我们认为式(17)是一个很好的近似. 由式(17)很易推得

$$\frac{\theta_1}{T_1} - \frac{2\theta_2}{T_2} = \frac{\theta_1 - 2\theta_2}{T} \quad (18)$$

此即为  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  振型的平衡条件. 值得注意的是, 只在进一步假设  $\theta_1 \approx 2\theta_2$  或  $T_2 = T$  的条件下, 才有 Anderson 等人采用的  $T_1 = T_2$ , 否则总有  $T_2 > T_1 > T$ .

现在, 我们可将  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  振型组合在一起看成振型 I, 其振动能

$$E^I = E_1 + E_2 \quad (19)$$

由式(6), (7)有

$$\frac{dE^I}{dt} = \left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{\nu_1 \rightarrow 2\nu_1} + \frac{\theta_1 - 2\theta_2}{\theta_1} \left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{\nu_1 \rightarrow 2\nu_2} + \left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{\nu_3 \rightarrow 3\nu_2} + \left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{\nu_2 \rightarrow T} \quad (20)$$

我们来分析一下各项大小. 尽管式 (15) 右端的 [ ] 项很小, 但由于  $K$  值甚大, 所以  $\left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{v_1 \rightarrow 2v_2}$  并不一定小. 事实上, 无辐射场时可有

$$\frac{\left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{v_1 \rightarrow 2v_2}}{\left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{v_2 \rightarrow T} + \left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{v_3 \rightarrow 3v_2}} \approx \frac{2e^{\theta_2/T_2}}{(e^{\theta_2/T_2} + 1)^2} \quad (21)$$

其值在  $T_2$  为 350, 1000 和 1500°K 时, 分别为 0.10, 0.39 和 0.45. 这也就是说, 在式 (6) 和 (7) 中将  $\left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{v_1 \rightarrow 2v_2}$  项削去是不妥的. 但在式 (20) 中, 由于  $(\theta_1 - 2\theta_2)/\theta_1 = 0.0387$ , 所以  $\frac{\theta_1 - 2\theta_2}{\theta_1} \left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{v_1 \rightarrow 2v_2}$  项与式中其余项相比则可忽略. 应该承认, 略去此项的部份原因是由于至今尚缺少可靠的  $K[C1(1 \rightarrow 0), C2(0 \rightarrow 2); M]$  的数据. 否则, 只需在式 (6), (7) 中直接采用式 (15), 按四振型四温度计算即可, 对计算并不会带来什么困难.

利用平衡条件 (18), 可进一步将式 (20) 化为

$$\begin{aligned} \frac{dE_2}{dt} = & \left[ \frac{4N_C^2 k \theta_1 k \theta_2 e^{(\theta_1 - 2\theta_2)/T} (2N_C k \theta_2 / E_2 + 1)}{E_2^2 \{ e^{(\theta_1 - 2\theta_2)/T} (2N_C k \theta_2 / E_2 + 1)^2 - 1 \}^2} + 1 \right]^{-1} \\ & \times \left[ \left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{\text{辐射}} + \left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{v_3 \rightarrow 3v_2} + \left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{v_2 \rightarrow T} \right. \\ & \left. - \frac{N_C k \theta_1 (2N_C k \theta_2 / E_2 + 1)^2 e^{(\theta_1 - 2\theta_2)/T}}{\{ e^{(\theta_1 - 2\theta_2)/T} (2N_C k \theta_2 / E_2 + 1)^2 - 1 \}^2} \times \frac{\theta_1 - 2\theta_2}{T^2} \times \left(\frac{dT}{dt}\right) \right] \quad (22) \end{aligned}$$

此式与式 (8), (9) 一起, 就构成了本文的三振型四温度弛豫模型的方程组. 式中各项由式 (11) — (14) 给出.

弛豫速率数据的不准确性对于非平衡流计算的结果有较大的影响<sup>[17,13]</sup>. 多数计算都是基于文献 [15] 中的数据. 后来发表的许多弛豫实验结果, 补充和修正了几个对产生粒子数反转影响较大的弛豫过程的数据. 本文收集和整理了过程 (1) — (4) 的弛豫速率系数的实验数据, 并将  $K$  与温度  $T$  的关系整理成

$$\log_{10} \left( \frac{K}{G} \right) = A + BT^{-1/3} + CT^{-2/3} + DT^{-1}$$

形式, 给出了相应于各反应的系数  $A, B, C, D$  值.  $G$  为组合因子, 对于反应 (1) — (3),  $G = 1$ ; 对于反应 (4),  $G = 4$ .

本文的计算采用了上述三振型四温度的弛豫模型和较严格的弛豫方程组, 并使用了自已收集、处理的弛豫数据.

Anderson 提出的弛豫模型和方程, 现仍被广泛采用, 对此作简短的评述是有意义的. 他将  $\text{CO}_2(v_3)$  与  $\text{N}_2$  的振型看作平衡, 并认为振动温度相同, 组成模式 II. 在有辐射场时, 这种假设是不能允许的. 由于激射过程在很大程度上决定于  $\text{N}_2$  中贮存的振动能传输给  $\text{CO}_2(v_3)$  振型的弛豫速率, 将二振型看作平衡, 相当于认为弛豫速率无穷大, 显然是不妥的. 即使在小信号增益计算中, 这样作也有误差. 一方面从弛豫时间上分析, 对于典型的激光组分  $X_C : X_N : X_H = 0.14 : 0.85 : 0.01$  算出的弛豫时间如表 1.

表 1

$T(^{\circ}\text{K})$	300	500	1000	1500
$\tau_{\text{PCO}_2(\nu_3 \rightarrow 3\nu_2)} (\mu\text{s} \cdot \text{atm})$	3.02	2.04	0.405	0.096
$\tau_{\text{PCO}_2(\nu_3) \rightarrow \text{N}_2} (\mu\text{s} \cdot \text{atm})$	0.078	0.174	0.480	0.630

由表可见,在高温下  $\text{CO}_2(\nu_3) \rightarrow \text{N}_2$  的弛豫速率甚至比  $\text{CO}_2(\nu_3 \rightarrow 3\nu_2)$  的还慢. 另一方面从计算结果看,对于  $A/A^* \approx 30$ ,  $h^* = 0.3\text{mm}$  的喷管,  $T_0 = 1500^{\circ}\text{K}$ ,  $p_0 = 30\text{atm}$ ,  $X_C:X_N:X_H = 0.14:0.85:0.01$ ,在喷管内  $T_N$  高于  $T_3$ ,最长达  $130^{\circ}\text{K}$ ,喷管出口  $T_N$  亦高于  $T_3 40^{\circ}\text{K}$ .  $A/A^*$  加大、 $h^*$  减小时,  $T_N$  与  $T_3$  的差别更大.

另一个问题是,Anderson 对模式 I 和 II 都采用了线性化的弛豫方程

$$\frac{dE^{\text{I}}}{dt} = \frac{1}{\tau_{\nu_3 \rightarrow T}} [E_1(T) + E_2(T) - E_1 - E_2] \quad (23)$$

$$\frac{dE^{\text{II}}}{dt} = \frac{1}{\tau^{\text{II}}} [E_3(T) + E_N(T) - E_3 - E_N] \quad (24)$$

式(24)相当于把  $\text{CO}_2(\nu_3 \rightarrow 3\nu_2)$  的弛豫项即式(12)展开后只取一项线性项,而略去了其余各项.这只有在  $T_2 = T$  的条件下才成立,而在气动激光器中,这条件并不成立.式(23)中,他略去了  $\text{CO}_2(\nu_3 \rightarrow 3\nu_2)$  的过程对模式 I 的影响,并且人为地增加了  $[E_1(T) - E_1]/\tau_{\nu_3 \rightarrow T}$  的一项,而

$$\frac{E_1(T) - E_1}{E_2(T) - E_2} \approx \frac{e^{\theta_1/T_2} + e^{\theta_2/T}}{(e^{\theta_1/T_1} + 1)(e^{\theta_2/T} + 1)}$$

在  $T_2 \approx T = 300^{\circ}\text{K}$  时,此因子为 0.075,而在  $1000^{\circ}\text{K}$  时,则大至 0.78,即人为地增加了一项相当不小的项. Anderson 的有些计算结果与实验较符合,可能是由于弛豫模型和弛豫方程中的近似有某种误差抵消,特别是用不太准确的弛豫数据补偿了模型和方程的缺欠.

### 三、公 式

对于气动激光器通常采用的二维喷管,假设各参数在垂直于流动方向上是常数,问题便简化为准一维流动.此外,假设流体为理想流体,忽略各种流场不均匀性(边界层,尾流,激波等)和传热的效应.这种近似对于单喷管比列阵喷管要更好些.

用状态方程  $p = \rho RT$  将  $p$  消去后,准一维流动方程为:

$$\text{质量守恒方程} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\rho u}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (25)$$

$$\text{动量守恒方程} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{RT}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - R \frac{\partial T}{\partial x} \quad (26)$$

$$\text{能量守恒方程} \quad \frac{dE}{dt} = -\frac{uRT}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - RT \frac{\partial u}{\partial x} \quad (27)$$

其中  $A = A(x)$  表示喷管的截面积,  $u$  为流速,  $E$  为一克混合气体的总内能:

$$E = \frac{5}{2} RT + \frac{X_H}{2} RT + \sum_{i=1}^3 \frac{N_H k \theta_{H_i}}{e^{\theta_{H_i}/T} - 1} + \sum_{i=1}^4 E_i \quad (28)$$

$R$  为一克混合气体的气体常数,  $X_H$  为  $H_2O$  的克分子数,  $i = 4$  代表  $N_2$  分子。

如果我们只想计算小信号增益, 则认为辐射场强近似为 0, 即有

$$\left(\frac{dE_1}{dt}\right)_{\text{辐射}} = \left(\frac{dE_3}{dt}\right)_{\text{辐射}} = 0 \quad (29)$$

在这种条件下, 可将式(27)化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & -u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\left(\frac{5 + X_H}{2}\right)R + \sum_{i=1}^3 \frac{N_H k \theta_{H_i}^2 e^{\theta_{H_i}/T}}{T^2 (e^{\theta_{H_i}/T} - 1)^2}} \left[ \frac{3\theta_2 - \theta_3}{3\theta_2} \left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{v_1 \rightarrow 3v_2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{dE_2}{dt}\right)_{v_2 \rightarrow 7} + \frac{\theta_3 - \theta_N}{\theta_3} \left(\frac{dE_3}{dt}\right)_{v_2 \rightarrow v_N} + \left(\frac{dN_N}{dt}\right)_{v_N \rightarrow 7} + \frac{uKT}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + RT \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (30) \end{aligned}$$

以  $\rho, u, T, E_2, E_3, E_N$  为未知变量, 式(25), (26), (30), (9)和代入式(29)后的式(22), (8)构成完备方程组。

用非定常方法解出非平衡流的定常解后, 还需进而求出粒子数反转、增益和最大可用激光能量。先由式(10), (18)求出振动温度  $T_1 - T_4$ , 进而由统计力学的公式求出  $CO_2$  上下激光振动能级的粒子数密度  $N_{(001)}^{(V)}$  和  $N_{(100)}^{(V)}$ 。

增益公式为<sup>[18]</sup>

$$G(\nu) = \left(N_2^{(V)} - \frac{g_2}{g_1} N_1^{(V)}\right) \frac{c^2}{8\pi\nu_0^2 t_{\text{自衰}}} g(\nu) \quad (31)$$

其中  $N_2^{(V)}, N_1^{(V)}$  分别为上下激光振转能级的单位体积粒子数,  $g_i$  为简并度,  $\nu_0$  为激光跃迁的中心频率,  $c$  为光速,  $g(\nu)$  为线形因子,  $t_{\text{自衰}}$  为自发辐射寿命。

由统计力学可得,  $CO_2(001) - (100)$  的  $p(J)$  支激光跃迁的粒子数反转

$$\begin{aligned} \Delta N^{p(J)} &= N_2^{(V)} - \frac{g_2}{g_1} N_1^{(V)} \\ &= (\alpha N_{001}^{(V)} - N_{100}^{(V)}) \times \frac{2\theta_{r100}(2J+1)}{T} e^{-\theta_{r100}(J+1)(J+2)/T} \quad (32) \end{aligned}$$

其中因子

$$\alpha = \frac{\theta_{r001} \exp[-\theta_{r001}J(J+1)/T]}{\theta_{r100} \exp[-\theta_{r100}(J+1)(J+2)/T]} \quad (33)$$

转动特征温度  $\theta$ , 由光谱常数<sup>[19]</sup>确定。对于室温下大多数情况发生的  $p(20)$  支跃迁为

$$\Delta N^{p(20)} = (\alpha N_{001}^{(V)} - N_{100}^{(V)}) \frac{43.735}{T} \exp(-235.5/T) \quad (34)$$

$$\alpha = 0.992045 \exp(24.12/T) \quad (35)$$

$T$  为 1500, 1000, 500, 300°K 时,  $\alpha$  分别为 1.008, 1.016, 1.041 和 1.075。显然, Anderson 计算增益时用的

$$\Delta N_{\text{Anderson}}^{p(20)} = (N_{001}^{(V)} - N_{100}^{(V)}) \frac{45.6}{T} \exp(-234/T) \quad (36)$$

是有误差的。在  $N_{001}^{(V)} \ll N_{100}^{(V)}$  时, 误差为 1—8%, 在  $N_{001}^{(V)}$  可与  $N_{100}^{(V)}$  相差不多时误差更大。

增益公式(31)中另一需考察的因素是线形因子  $g(\nu)$ 。对于  $CO_2$  激光跃迁来说, 自然线宽远较碰撞加宽和 Doppler 加宽小, 可忽略不计, 而腔压高时, 以碰撞加宽为主, 腔压

很低时,以 Doppler 加宽为主. 对于气动激光器典型的组分和腔温为室温的条件下,腔压若为 0.1atm 只考虑碰撞加宽,约有 1% 的误差;在腔压为 0.05atm 时,只考虑碰撞加宽,误差约为 3%<sup>[20]</sup>. 只考虑碰撞加宽时,谱线中心处的增益计算公式为

$$G^{p(J)}(\nu_0) = \Delta N^{p(J)} \frac{c^2}{4\pi^2 \nu_0^2 f_{自激} \Delta\nu_p} \quad (37)$$

其中  $\Delta\nu_p$  为碰撞加宽的半宽度. 若要更精确地计入 Doppler 加宽的影响,可采用更准确的计算公式<sup>[20]</sup>.

文献[7]定义的最大可用激光能量可以粗略地描述激活介质中可取用激光能的上限. 它是  $\text{CO}_2(\nu_3)$  和  $\text{N}_2(\nu)$  中贮存的振动能与增益降为 0 时还保留的振动能之差,再乘上量子效率,可近似用下式计算:

$$E_{\max} = \left[ E_3(T_3) + E_N(T_N) - E_3\left(\frac{\theta_3}{\theta_1} T\right) - E_N\left(\frac{\theta_3}{\theta_1} T\right) \right] \times 0.409 \quad (38)$$

#### 四、数值计算

对准一维非平衡流动方程组,类似于文献[7],采用了文献[21]的差分格式. 不难证明这种计算格式具有二阶精度. 而其计算量比用取至二次项的 Taylor 展开式要小得多,并且十分有利于编制计算程序.

用舍时法计算准一维流时存在的一个问题是定常后的  $\rho$ ,  $u$  并不一定满足质量守恒定律. 本来,由式(25)有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} \quad (39)$$

定常后  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , 即  $\rho u A$  在喷管的各点均应为常数. 但数值计算中存在的问题,常使收敛解的质量通量在不同  $x$  处并不相等. 文献[7]的计算结果中,喷管不同部份的  $\rho u A$  值相差可达 20—30%. 由式(39)可知

$$\Delta(\rho u A) = |(\rho u A)_{x+\Delta x} - (\rho u A)_x| = \left| \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \right| A \Delta x$$

即相邻格点上质量通量的差,不仅与差商  $\Delta \rho / \Delta t$  有关,还与空间步长  $\Delta x$  有关. 为使  $\Delta(\rho u A)$  小,除大大增加计算次数,以使  $|\Delta \rho / \Delta t|$  绝对地减小外,用加密格点的方法,可能更为有效. 另外,用式(39)的右端代替展开了的式(25)的右端,也会消除差商计算带来的误差,而使  $\Delta(\rho u A)$  减小.

我们编制了程序,在国产的 TQ-16 电子计算机上进行了计算. 为了考察影响计算精度的诸因素,并摸索在达到一定精度的要求下减少计算时间的手段,我们首先作了大量的数值实验.

每一个时间步长的计算中,有三分之一到二分之一的的时间化费在弛豫时间的计算上. 弛豫时间主要与  $T$  有关,而相邻的时间步长之间,  $T$  的变化不大,且越接近收敛变化越小. 据此,我们采用跳  $\tau$  (几个时间步长内只计算一次弛豫时间  $\tau$ ) 的方法显著减少了计算时间.

为了减少计算时间,Anderson 采用两种不同空间步长的格点,将整个喷管的计算分

成两个阶段进行. 我们采用了变间隔的三阶段计算, 而且每阶段都只算到交界点的下游几点, 加快了计算速度. 但是, 计算结果在几个不同阶段的衔接点上  $\rho u A$  值有些跳跃. 这种跳跃可以通过抹平 (即以已收敛的解为初值再次进行计算) 来消除. 计算表明, 抹平对我们感兴趣的喷管出口下游的增益、 $E_{\max}$  和流动参数的影响很小.

将一组已经收敛的非平衡流的解, 作为求条件略有不同的另一组解时的初始分布, 将会显著减少计算时间. 这在考察某参数 (如  $T_0$  或  $p_0$  等) 连续变化的影响时特别有利.

我们对于不同阶段分界点的位置、每阶段计算的下游端位置、初始值分布、喷管各区段格点排布的密度、跳  $\tau$  的程度、收敛标准、时间步长的大小、喷管亚音速段起点 (整个计算的上游端) 位置等因素的选取, 对于收敛性、结果精度和计算速度的影响作了细致的考察.

值得指出的是, 空间格点排布不当时, 喷管流的非定常计算虽然可以收敛, 但常在亚声速段出现参数不平滑现象, 即参数不是单调变化而是出现起伏, 甚至高于滞止值 (如  $T$ ,  $p$ ). 这种从物理上看显然不合理的现象, 是由于数值计算的不当造成的. 加密格点, 主要是加密喉道附近的格点, 常可解决此问题, 而得到平滑解. 当然, 这要增加计算时间. 幸运的是, 即使解不平滑, 喷管出口下游的诸参数都与平滑解相差甚小.

另外, 时间步长的大小选取不当也会造成解的不平滑, 甚至发散.

## 五、结果与讨论

**1. 与实验结果比较** 为了检验弛豫模型、方程、数据方面改进的效果, 并与 Anderson 的结果作对比, 我们对于已发表的一批结果作了计算. 由于文献未给出详细的喷管型线数据, 我们计算采用的是喉道高度相同、面积比极其相近的最小长度喷管. 计算表明, 喷管出口的小信号增益对于型线的差别并不敏感 (见下文).

由图 2, 3 可见, Anderson 的计算并不能很好地符合小信号增益的实验结果. 采用他

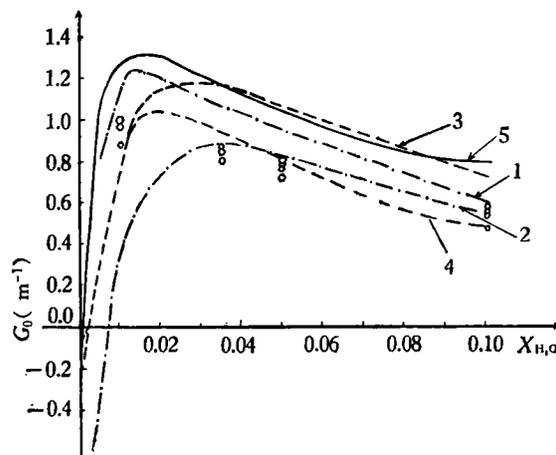


图 2  $G_0-X_{H_2O}$  关系 (喷管出口下游 1.27cm 处)  $T_0 = 1800^\circ\text{K}$   $p_0 = 37.5\text{atm}$   $X_{\text{CO}_2} = 0.07$   
 $A_{\text{出口}}/A^* = 50$   $h^* = 0.0356\text{cm}$  最小长度喷管  $\circ$  实验数据<sup>[14]</sup>

1. 文献[13]的计算, 无 Sharma 势垒时
2. 文献[13]的计算, 有 Sharma 势垒时
3. 文献[7, 8]的计算 (旧速率)
4. 文献[17]的计算 (新速率)
5. 本文的计算

的新数据<sup>[17]</sup>,在  $A/A^* = 50$  的情况下可与实验结果大致相符,但  $A/A^* = 20$  的喷管计算结果大大低于实验,这是无法解释的<sup>[14]</sup>. 对比之下,我们的计算结果变化趋势与实验数据吻合,  $A/A^* = 20$  的喷管的结果与实验相符,而  $A/A^* = 50$  的喷管的理论结果高于实验 30% 左右. 这是可以理解的,因为对于膨胀更强烈的喷管,计算中忽略的流动非理想性效应、二维效应以及设计喷管时忽略的振动非平衡效应均会加大,喷管加工和装配中的偏差(这几乎是无法避免的)的影响也将更大. 可以认为,我们的计算解决了 Anderson 计算中存在的矛盾.

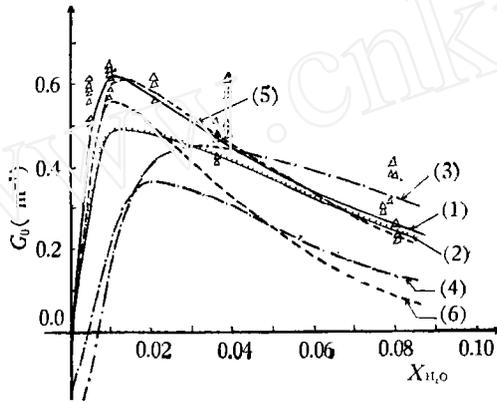


图3  $G_0-X_{H_2O}$  (喷管出口下游 1.27cm 处) (比较不同的弛豫模型、弛豫速率)  
 $T_0 = 1800^\circ K$   $p_0 = 20atm$   $X_{CO_2} = 0.07$   $A_{出口}/A^* = 20$   $h^* = 0.1cm$  最小长度喷管  
 $\Delta$  实验数据<sup>[14]</sup>

- 1. 本文的计算
- 2. 文献[12]的速率, 本文的模型
- 3. 文献[7, 8]的速率(旧), 本文的模型
- 4. 文献[17]的速率(新), 本文的模型
- 5. 文献[7, 8]的速率(旧), Anderson 模型(转引自[14])
- 6. 文献[17]的速率(新), Anderson 模型(转引自[14])

由图 2 可见, Anderson 基于旧数据和他有较大误差的计算程序得到的结果, 认为第二代气动激光器中加大  $H_2O$  含量仍能保持基本不降的增益, 这一观点并不正确. 实际上, 对于大面积比、高滞止温度、高滞止压力的气动激光器, 最佳水含量仍在 1% 附近, 增益随水含量的加大而迅速减小.

**2. 喷管型线的影响** 超声速段: 用  $A/A^* \approx 30$  ( $M = 5.0$ ) 的圆喉道喷管与最小长度喷管(图 4), 对于相同条件进行了计算, 结果见图 5(a) 和 5(b). 结果表明, 最小长度喷管的增益偏高  $< 8\%$  ( $T_0 > 1500^\circ K$  后差别就更小了),  $E_{max}$  偏高 10% 左右. 出于加

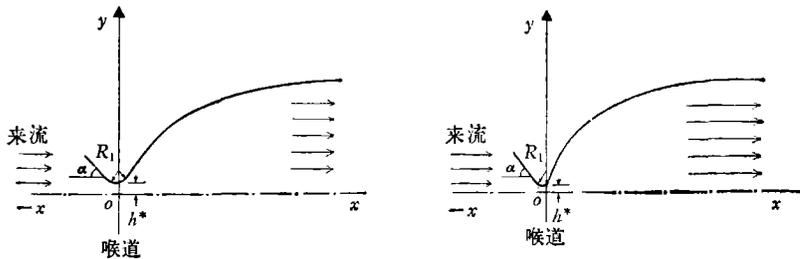


图 4 喷管型线示意图  
 (a) 圆喉道喷管 (b) 最小长度喷管

工、装配、流场等方面的考虑,放弃这部分利益,而采用圆喉道型线喷管也是可以的。

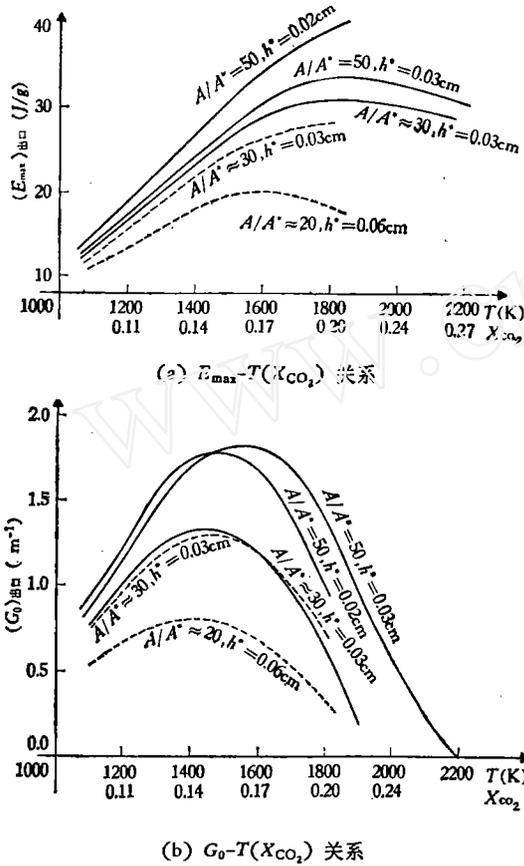


图 5  $(E_{max})_{出口}, (G_0)_{出口}-T(X_{CO_2})$  关系 (CO 计量燃烧)  
 $p_0 = 30atm$   $X_{H_2O} = 0.01$   
—— 最小长度喷管 —— 圆喉道型线喷管

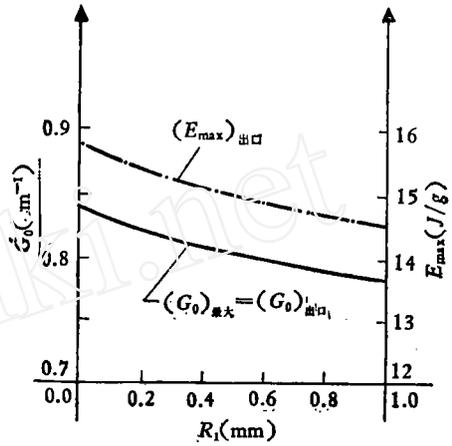


图 6  $G_0, E_{max}-R_1$  关系  
 $R_1$  为喉道圆弧半径  $T_0 = 1300K$   $p_0 = 23atm$   
 $A/A^* = 20$   $h^* = 0.06cm$   $X_{CO_2} = 0.13$   
 $X_{N_2} = 0.86$   $\alpha = 45^\circ$   $X_{H_2O} = 0.01$

亚声速段: 计算中喷管亚声速段, 由一圆弧和与之相切并与中心线成一定倾角的直线组成. 圆弧半径  $R_1$  不变而倾角  $\alpha$  由  $30^\circ$  变到  $75^\circ$  时,  $G_0, E_{max}$  均基本不变, 喷管出口的  $G_0$  由  $0.796$  变到  $0.799 (m^{-1})$ ,  $E_{max}$  由  $14.90$  变至  $14.93 (J/g)$ . 倾角固定,  $G_0, E_{max}$  随  $R_1$  而变化(图 6). 由图 6 可见, 随喉道附近亚声速段圆弧半径的减小,  $G_0$  与  $E_{max}$

均单调提高,以直线( $R_1 = 0$ )为最高,幅度为百分之几. 计算表明,亚声速段面积比大于 5 的部份几乎无冻结效果,其型线可任意选择.

光腔段: 由于贮存在  $N_2$  和  $CO_2$  中的振动能要通过弛豫过程最终交给平动,从而使下游平动温度有所提高,有激射时此过程会更强烈. 为了提高光腔段下游的增益,可使光腔段进一步膨胀.

**3. 喷管膨胀面积比的影响** 由于弛豫过程会将振动能转移给平动,所以非平衡流的平动温度会比等熵流估算的高达几十度. 这对产生粒子数反转十分不利. 为了充分利用贮存的振动能来增加喷管的冻结效果,加大面积比以降低下游温度,可使  $G_0, E_{max}$  均显著提高. 这是改善气动激光器性能的一个重要手段.

计算结果列于图 5(a) 及 5(b).  $A/A^* = 50$  的喷管比  $A/A^* = 30$  的,  $G_0$  提高 30—40%,  $E_{max}$  提高 5% 左右. 对于燃烧型气动激光器,随面积比的加大,滞止温度的最佳值稍有提高.

**4. 喉道高度的改变** 设计喷管时采用的是无量纲参数. 喉道高度的减小相当于叶片

变短,即达到同样的膨胀程度只需较少的流动时间.这显然对振动能的冻结、产生反转有利(图7).减小喉高也是改善器件性能的手段之一.但随着喉高及叶片的减小,叶片加工、装配的难度将加大,并且边界层的影响变得越来越不能忽略.

**5. 滞止温度的改变** 在燃烧型气动激光器中,热激励的能量来自燃料(如 $\text{CO}$ ,  $\text{H}_2$ )的燃烧,所以滞止温度 $T_0$ 的改变要通过改变组分来实现.文献中均未对这种有实际意义的情况作过计算.我们的结果示于图5.

$G_0$ 一般均在 $1400\text{--}1600^\circ\text{K}$ 附近有一平坦的极值(不同型线略有不同). $E_{\max}$ 一般随 $T_0$ 的提高而有所增加,但在高温下趋势并不强烈.可见,对于某种燃料,过分地提高工作温度并无多大益处,而且 $T_0$ 的增高将使热损失加大,并造成器件制造上的困难.

**6. 滞止压力的改变** 压力的提高造成粒子数密度的提高,碰撞次数增加,弛豫速率加快.这将使 $G_0$ ,特别是 $E_{\max}$ 下降.计算结果如表2和图8. $p_0$ 提高, $E_{\max}$ 和 $G_0$ 的极大值均单调下降,并且增益的最佳点向上游方向移动.这都对器件的工作不利.

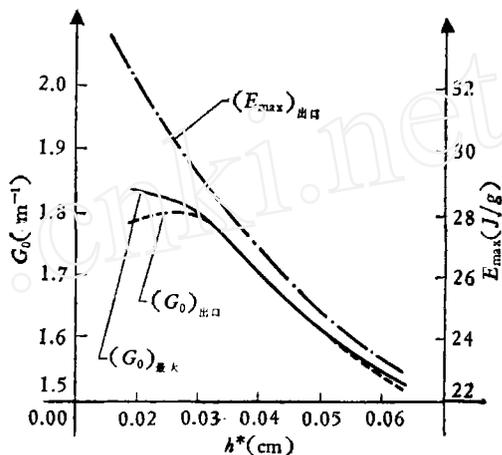


图7 喉高对 $G_0$ ,  $E_{\max}$ 的关系

$$T_0 = 1500^\circ\text{K} \quad p_0 = 30 \text{ atm} \quad A/A^* = 50 \\ X_{\text{CO}_2} = 0.14 \quad X_{\text{N}_2} = 0.85 \quad X_{\text{H}_2\text{O}} = 0.01$$

表2 滞止压力与 $G_0(\text{m}^{-1})$ ,  $E_{\max}(\text{J/g})$ 的关系

压力 (atm)	$A/A^* \approx 50, h^* = 0.3\text{mm}, 1500^\circ\text{K}, 0.14:0.85:0.01$				$A/A^* \approx 30, h^* = 0.3\text{mm}, 1500^\circ\text{K}, 0.14:0.85:0.01$			
	出口 $G_0$	最大 $G_0$ 位置	最大 $G_0$	出口 $E_{\max}$	出口 $G_0$	最大 $G_0$ 位置	最大 $G_0$	出口 $E_{\max}$
23	1.814	下游2cm	1.838	31.26	1.282	下游2cm	1.360	28.54
30	1.799	出口	1.799	29.28	1.286	下游1cm	1.300	26.13
40	1.689	出口	1.689	26.64	1.196	出口	1.196	22.90

改进器件的启动性能,改善扩压器的性能,降低工作压力,可以提高单位质量工作介质的出光功率.相反,提高滞止压力,虽单位质量的出光功率减小,但同样大小器件的总输出功率将有提高.

**7. 组分变化** 组分改变造成 $T_0$ 变化产生的影响已如上述.在燃烧型气动激光器中,不可避免的热损失使得为达到预计的 $T_0$ 需消耗较多的燃料,从而使 $X_C$ (或 $X_H$ )有所提高.为考察这种效应,作了如表3所示的计算.由表可见,高组分 $G_0$ 稍有提高,这是由于 $G_0$ 与 $X_C$ 成正比[见式(37)]的缘故.但是, $X_C$ 加大会加快振动能的消激发并减小振动能的有效贮存( $X_N$ 下降),从而使 $E_{\max}$ 明显下降,即贮存在分子内可供激射的振动能减小,出光不能加大.而且在有激射时,高 $X_C$ 对增益的饱和效应也有不利的影响.可

表 3 组分对  $G_0, E_{max}$  的影响

$X_C:X_N:X_H$	$A/A^* \approx 50, h^* = 0.3\text{mm}, p_0 = 30\text{atm}, T_0 = 1500^\circ\text{K}$		$A/A^* \approx 30, h^* = 0.3\text{mm}, p_0 = 30\text{atm}, T_0 = 1500^\circ\text{K}$	
	出口 $G_0$	出口 $E_{max}$	出口 $G_0$	出口 $E_{max}$
0.14:0.85:0.01	1.799	29.28	1.286	26.13
0.15:0.84:0.01	1.823	28.24	1.297	25.11

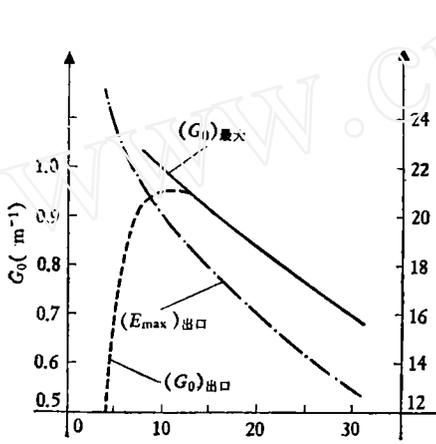


图 8 压力对  $G_0, E_{max}$  的影响  
 $T_0 = 1300^\circ\text{K}$   $A/A^* = 18.9$   $h^* = 0.06\text{cm}$   
 $X_{CO_2} = 0.13$   $X_{H_2O} = 0.01$

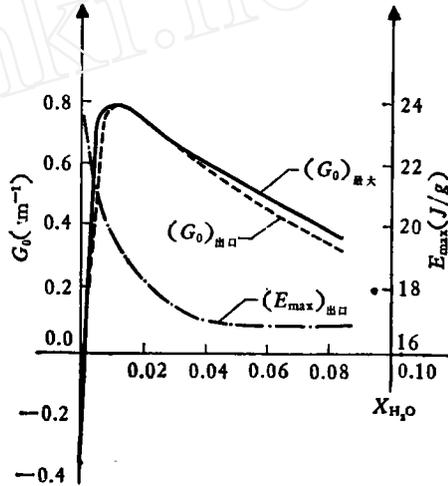


图 9  $X_{H_2O}$  对  $G_0, E_{max}$  的影响  
 $T_0 = 1500^\circ\text{K}$   $p_0 = 23\text{atm}$   $A/A^* = 20$   
 $h^* = 0.06\text{cm}$   $X_{N_2} = 0.85$

见,在考察影响器件性能的因素时,不能只看  $G_0$  一个参数,必须全面分析。

为达相同的滞止温度,可以改变燃气配比。由于  $CO$  与  $H_2$  的燃烧热及产物的比热相近,可以近似地认为,  $X_C + X_H$  等于常数的气体对应相同的滞止温度。计算结果如图 9。燃烧型气动激光器的最佳水含量也在 1% 附近。水含量加大,会使  $G_0, E_{max}$  锐减。这是由于水量加多会大大增快振动能的消激发所致。

**8. 弛豫模型、方程和弛豫数据的影响** 文献 [7,17] 和文献 [12] 都是将弛豫时间的对数取成  $T^{-1/3}$  的直线关系,但在包括低温的大温度范围内,直线关系并不能很好地成立,因此用直线拟合总会顾此失彼。本文是将弛豫数据对  $T^{-1/3}$  的关系都取到二次或三次项。所以严格地说,本文与它们在每一个反应的数据上均有差别。现只将主要的差别列于表 4。由表可见,文献 [17] 的新速率只是在两个能量交换反应上数据有变化,并且依然没有理想地拟合弛豫实验数据;文献 [12] 的数据比较接近本文的,但激光下能级消激发速率仍有明显差别。

图 3 给出采用本文的弛豫模型、方程和几种不同的弛豫数据[由于文献 [7,17,12] 均未考虑反应 (3),对此反应仍采用本文的数据]计算的结果(曲线 1—4),以及取自文献 [1] 的采用文献 [17,7] 的模型、方程以及新、旧速率算出的结果(曲线 5,6)。很明显,采用同样的模型和方程但弛豫数据不同,计算结果相差颇大。文献 [13] 的计算也表明了这

一点。我们认为,即使是文献[17]的新数据也是不够适宜的。曲线3与5及4与6之间的比较表明,弛豫数据相同,但模型、方程不同,计算结果的差别也相当大,并且变化规律也可以很不相同。可以推断,文献[7,17]采用的弛豫模型和方程带来的误差与弛豫数据带来的误差,相当大的一部份相互抵消掉了。但是,这种抵消不可能总是理想的,终于出现了曲线6大大低于实验结果的不合理现象。

关于弛豫模型、方程和弛豫数据对非平衡流计算结果的影响,还可以作更细致的考察和分析。

表4 比较不同文献采用的弛豫数据

能量交换反应	$\tau p(\mu s \cdot atm)$	$T(^{\circ}K)$				
	文 献	300	500	1000	1500	1800
$CO_2(\nu_3 \rightarrow 3\nu_2) - H_2O$	本文	0.045	0.046	0.070	0.093	0.104
	[12]	0.045	0.053	0.073	0.093	0.105
	[7,17]	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055
$N_2(\nu = 1 \rightarrow T) - H_2O$	本文	9.49	3.85	1.83	1.44	1.35
	[12]	8.73	3.79	1.50	1.50	1.50
	[17]	7.75	1.75	0.334	0.151	0.108
	[7]	1052	459.2	182.8	116.6	92.4
$CO_2(\nu_2 \rightarrow T) - H_2O$	本文	0.00245	0.00697	0.0167	0.0241	0.0231
	[12]	0.00393	0.0118	0.040	0.0725	0.0921
	[7,17]	0.0167	0.0167	0.040	0.0725	0.0921
$CO_2(\nu_2 \rightarrow T) - N_2$	本文	12.61	4.22	1.25	0.749	0.625
	[12]	11.99	3.010	0.649	0.307	0.227
	[17]	14.19	5.44	1.906	1.17	0.905
	[7]	28.38	10.88	3.810	2.23	1.81
	[8]	2.36	0.91	0.318	0.189	0.151

### 参 考 文 献

- [1] Anderson, J. D., Jr., AD-A010484(1974). 亦见 *Gasdynamic Lasers: An Introduction*, Academic Press (1976).
- [2] Басов, Н. Г., и др., *ЖТФ*, **38**, 12 (1968), 2031.
- [3] Tulip, J. & Seguin, H., *J. Appl. Phys.*, **42**, 9(1971), 3393.
- [4] Генералов, Н. А., и др., *ПМТФ*, 5 (1971) 24.
- [5] Munjee, S. A., *Phys. Fluids*, **15**, 3(1972), 506.
- [6] Brunne, M., et al., *AIAA J.*, **14**, 3(1976), 352.
- [7] Anderson, J. D., Jr., *AIAA J.*, **8**, 3(1970), 545; **8**, 12(1970), 2280; AD-718805 (1970); AD-735878(1971).
- [8] Anderson, J. D., Jr., et al., *Phys. Fluids*, **13**, 8(1970), 1983.
- [9] Anderson, J. D., Jr. & Harris, E. L., *AIAA Paper* 72-143; 亦见 *Laser Focus* (May, 1972), 32.

- [10] Lee, G., et al., *AIAA J.*, **10**, 1(1972), 65.
- [11] Lee, G., *Phys. Fluids*, **17**, 3(1974), 644.
- [12] Brunner, M. J., AD-783218 (1974).
- [13] Jones, A. T., *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **9**, 8(1976), 1193.
- [14] Vamos, J. S., *AIAA Paper* 74-177.
- [15] Taylor, R. L. & Bitterman, S., *Rev. Mod. Phys.*, **4**, 1(1969), 26.
- [16] MacDonald, J. D., AD-718131(1970).
- [17] Anderson, J. D., Jr., *AIAA J.*, **12**, 12(1974), 1699; 亦见 AD-A015790(1974) 或 *AIAA Paper* 74-176.
- [18] Yariv, A., *Quantum Electronics*, Wiley, New York (1957).
- [19] Herzberg, G., *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules*, Van Nostrand, New York (1945).
- [20] Penner, S. S., *Quantitative Molecular Spectroscopy and Gas Emissivities*, Pergamon, London (1959).
- [21] MacCormack, R. W., *AIAA Paper* 69-354.