

任意回转面上，可压缩流动轴流式叶栅 最佳壁面速度分布的计算方法

中国科学院力学研究所 邹滋祥

提 要

本文在边界层理论分析和叶栅损失计算的基础上，通过近代应用数学“最优控制论”的工具，首先提供了一个二元、不可压、稳定流动叶栅壁面最佳速度分布的理论计算方法。又通过一些转换的方法把它推广到了可压缩流动和任意回转面上。同时证明了二元不可压稳定流动叶栅壁面最佳速度分布经推广到可压缩流动任意回转面上去后，仍然是后者叶栅壁面的最佳速度分布。并且可以推广到二元扩压器，喷管以及轴对称细长旋成体表面最佳速度分布的计算。

一 导 言

随着科学技术的迅速发展以及对叶片机械性能愈来愈高的要求，最佳叶栅的设计以至最佳级的设计问题也就愈来愈多地受到人们的重视了。所谓最佳叶栅的设计，就是要求在给定的进、出气条件（即给定环量）和某些设计上特定的要求（如强度、振动、冷却、最大速度、边界层不分离等）下，使气流通过所设计的叶栅通道时动能（或总压）损失最小。最佳叶栅的设计通常有两种途径来实现：一种是系统的改变叶栅几何参数，作叶栅族的系统试验，从中选取最佳的叶栅。在过去通常是采用这种方法如 C_4 叶型^[16]；65系列叶型^[15]； C_r 系列叶型^[7]等可以说明。这种方法要求有比较复杂的设备，要求很高的测量手段和相当长的时间，并具有很大的局限性。另一种是通过气体动力学及边界层的理论和近代应用数学工具与电子计算机结合的理论分析方法。但要满足上述要求的最佳叶栅的理论设计方法也是十分复杂的。多年来，国内外很多作者都企图这样做，但迄今在设计中仍极少采用，其根本原因是各种参数之间的关系十分复杂，很难建立起变分问题的数学表达式。另一方面，在数学上，这是一种多个不等式型“相”约束和“控制”约束的问题，经典的变分学是无能为力的。但近年来由于应用数学工具的迅速发展，特别是“最优控制论”的发展^{[1][2][3]}，过去认为难以实现的问题，现在就变成可解的了。文献^[4]，^[5]中关于二元不可压最佳叶栅的设计问题以及它们的解，作了全面的理论论述。实际上，比利时Von-Karman流体力学研究所^[6]和捷克国立机械科学院^[7]已经对平面叶栅不可压流动提出了简化解法，文献^[8]利用^[6]提出的方法设计了二

元扩压器，经实验证明，效果都是良好的。

本文所建立的物理模型在提法和求解上与上述方法相类似。是把一个全面的，十分复杂的最佳叶栅求解问题，简化和分解成几个弱相关的“子问题”来分别处理。这就是首先在给定进、出气条件和叶栅稠度下，求得叶型单背弧上的流速最佳分布（使得气流通过流道时的动能或总压损失最小）；相应条件下的最佳叶栅稠度可通过经验的办法取得；第二个问题是在满足强度、振动、冷却、工艺等要求的叶型截面分布以及给定的叶栅稠度和背弧最佳流速分布的条件下求得叶型（凹面流速分布是由叶型封闭条件适当地，但并非最佳地确定）。

在这里，仅对第一部分作详细的研究及求解。通过上述的简化和分解，对第一部分的求解就简单多了。这样，就可以把多个不等式型“相”约束和“控制”约束的最优化问题降低到最少数目的不等式型约束，并且在某种特定的边界层理论计算方法（如Buri法^[9]）下，可以化简到仅带有单个不等式“控制”约束的最优化问题。

本文采用了Buri^[9]的边界层理论计算方法和文献[10]、[11]中的损失计算方法，并应用了近代变分学——最优控制论中著名的Понмрягин极大值原理和文献[3]中的“分段式极大值原理”，“约束分离原理”等方法，并在某些具体问题的物理特点上作预先分析的基础上，提供了一个二元、不可压流叶栅壁面最佳速度分布的解析解。然后再通过[12]、[13]以及[11]中提供的各类问题的转换方法把它推广到可压缩流，任意回转面上去。并且证明了前者叶栅壁面最佳速度分布的解转换到可压缩流、任意回转面上以后仍然是后者叶栅壁面上的最佳速度分布。

这种计算方法还可以很简单地推广到二元扩压器，喷管以及轴对称细长旋成体壁面型线的最佳设计中。

二 二元，不可压流动叶栅壁面的最佳速度分布

1. 问题的提法

假定：

- a. 是带有粘性的牛顿流体；
- b. 流动是可压缩纯紊流的稳定流动；
- c. 给定叶栅的进、出气角和速度矢。并且令尾缘上的气流角等于排气角，尾缘上的速度等于排气速度；
- d. 给定接装角。

所谓最佳叶栅，就是要在满足上述要求（即给定环量要求）的情况下，流体通过所设计的叶栅通道时动能损失（或总压损失）最小。

根据文献[10]中的(22)式，不可压流动叶栅的型面动能损失系数表示如下：

$$\bar{\xi}_{\text{型面}} = \frac{\theta_1^* \cdot E_1^*}{1 - (\delta_1^* + \delta_{1,2}^*)} \dots \dots \dots (A) \quad \text{其中 } \theta_1^* = \frac{\varepsilon \theta_1}{t \cos \beta_1};$$
$$\delta_1^* = \frac{\varepsilon \delta_1}{t \cdot \cos \beta_1}, \quad \delta_{1,2}^* = \frac{\delta_{1,2}}{t \cdot \cos \beta_1}, \quad E_1^* = H_{32}.$$

注脚“1”，“te”表示出气边尾缘上的量，“—”表示长度尺寸是用叶栅轴向宽度来无因次化。

作为单壁面的动能损失系数可以近似地用下式来表示：

$$\bar{\xi} = \frac{E \cdot \bar{\theta}_1}{t \cdot \cos \beta_1 - \delta_1} = \frac{H_{32} \cdot \bar{\theta}_1}{t \cdot \cos \beta_1 - H_{12} \cdot \bar{\theta}_1} \dots \dots \dots (B)$$

其中 H_{32} 和 H_{12} 在后面的分析中，可以近似地认为是常数，而且稠度 t 仅是给定的，则在(B)式中的右端除 $\bar{\theta}$ 外就都是常数了。

我们令 $D = t \cdot \cos \beta_1$ ，(B)式可以用下式来表示：

$$\bar{\xi} + \frac{H_{32} \cdot \bar{\theta}_1}{D - H_{12} \cdot \bar{\theta}_1} \dots \dots \dots (C)$$

我们的目的是要求出动能损失最小 $\bar{\xi}_{min}$ 时的壁面速度分布。但为了求解的方便，可以通过下面的分析来改变问题的提法。将 $\bar{\xi}$ 对 $\bar{\theta}_1$ 求导数得：

$$\frac{d \bar{\xi}}{d \bar{\theta}_1} = \frac{(D - H_{12} \cdot \bar{\theta}_1) \cdot H_{32} + H_{32} \cdot H_{12} \cdot \bar{\theta}_1}{(D - H_{12} \cdot \bar{\theta}_1)^2}$$

上式右边的分母恒大于0，分子也恒大于0，

因此 $\frac{d \bar{\xi}}{d \bar{\theta}_1} > 0$ ，这说明 $\bar{\xi}$ 是 $\bar{\theta}_1$ 的单调函数，并且它的极值同时发生，因此在求 $\bar{\xi}_{min}$ 的问题

就可以改变成求出气边上最小冲量损失厚度 $\bar{\theta}_{1,min}$ 的问题了，这样会使问题简单化。

2. 微分方程组与极大值原理的应用：

在本节中对Понмрягин极大值原理以及文献[3]中的“分段极大值原理”等方法不作详细的说明和推导，仅作所需的应用。并假定是纯紊流边界层流动。

a, 二元，不可压，紊流边界层的冲量积分方程如下：

$$\frac{d\theta}{dx} + (H_{12} + 2)\theta \frac{dw_r}{w_r dx} = \frac{\tau_w}{\rho_l w_r^2} \quad (1)$$

b, Buri法求解不可压紊流边界层中应用的准则函数 Γ 表示如下：

$$\Gamma = \theta R_e^{-\frac{1}{4}} \frac{dw_r}{w_r dx}$$

因此

$$\frac{dw_r}{dx} = \frac{w_r}{\theta} R_e^{-\frac{1}{4}} \Gamma \quad (2)$$

其中 $R_e = \frac{w_r \theta}{\nu_0}$;

上列方程组中的 θ ， w_r 为状态变量， Γ 称为控制变量。为了使边界层流动不分离， Γ 的临界值对于紊流边界层控制在 $\Gamma_{临界} \geq -0.04$ ；

我们的目的是要求解在边界层不分离约束下的 $\bar{\xi}_{min}$ 或 $\bar{\theta}_{1,min}$ 时的壁面速度分布。在

Понрягин极大值原理中要求在微分方程组中加进作为求解极值目标函数 $\bar{\xi}$ 的微分方程。

c, 目标函数 $\bar{\xi}$ 作为附加状态变量的微分方程与极小值的充分条件,
由公式(B)得:

$$\frac{d\bar{\xi}}{dx} = \frac{H_{32} \cdot D}{(D - H_{12} \cdot \bar{\theta}_1)^2} \frac{d\bar{\theta}}{dx} \quad (3)$$

并且 $\bar{\xi}(x_0) = 0$;

在这种情况下, 求解最小值的Payoff函数S由下式表示:

$$S = \bar{\xi}(xl) \quad (4)$$

其中 (xl) 表示在出气边上的终点值。

在控制变量 $\Gamma \geq mK$ 的条件下(其中 mK 为常数), 当S函数达到最小值时, 要求 $\Delta S > 0$; 而要求 $\Delta S > 0$ 的充分条件是要求由于控制变量 Γ 的变化所引起的Hamilton函数H的变化, 必须满足 $\Delta H < 0$;

在我们的具体情况下, Hamilton函数由下式来表示:

$$H = \sum_{i=1}^N p_i \cdot f_i = \left[\frac{w_f}{\theta} R_0^{-\frac{1}{4}} \cdot p_2 - (H_{12} + 2) p \theta^{-\frac{1}{4}} \cdot p_1 \right] \cdot \Gamma + P_3 \frac{H_{32} \cdot D}{(D - H_{12} \cdot \bar{\theta}_1)^2} \frac{d\bar{\theta}}{dx} + \frac{\tau_w}{\rho_f w_f^2} \cdot P_1 \quad (5)$$

其中 f_i 表示状态变量的微分方程, i 表示总的方程个数。

方程(5)中控制变量 Γ 的系数 K 称之为开关函数。

$$K = \left(p_2 \frac{w_f}{\theta} R_0^{-\frac{1}{4}} - (H_{12} + 2) R_0^{-\frac{1}{4}} \cdot p_1 \right) \quad (6)$$

其中 p_i 是Понрягин极大值原理中的附加变量, 它的微分方程组相当于变分法中的欧拉方程组。

$$\dot{p}_i = - \sum_{i=1}^N p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad i = 1 \dots N。$$

为了要使 $\Delta H < 0$ (极小值的充分条件), 则由方程(5)式分析得知:

当 $K > 0$ 时 $\Gamma \rightarrow \min$;

当 $K < 0$ 时 $\Gamma \rightarrow \max$;

当 $K = 0$ 时 Γ 在方程中不起控制作用, 这时的解称之为奇异解。

控制变量 Γ 的不等号控制条件约束可以转化为下列等式型条件:

$$\Gamma = mK \cdot \text{Sgn} \sum_{i=1}^N K \quad (7)$$

在我们的具体情况下K只有一个，则

$\Gamma = mK \cdot \text{Sgn} \cdot K$ 。而 Γ 的符号是由K的符号来决定的。

d, 状态变量的初始条件, 控制量以及附加约束条件:

①初始条件:

$$\left. \begin{aligned} w_t(0) &= 0, \\ \bar{\theta}(0) &= 0, \\ \bar{\xi}(0) &= 0, \end{aligned} \right\} 8a,$$

②控制量: 文献[21]推荐:

$$\Gamma \geq -0.04 \dots 8b,$$

③附加约束:

$$w_t(xl) = w_{t1} \dots 8c.$$

在满足上述条件下联立求解方程(1), (2), (3)和(5), (6)就可以得到全部沿壁面的最佳速度分布。

通常来说, 联立求解上述方程组要得到解析解是很困难的, 但在我们的具体情况下, 当我们能事先判别K的符号时就没有必要求出辅助变量 P_i 来, 仅需在满足初始条件, 控制条件以及附加约束条件下求解微分方程组(1), (2), (3)就可以了。

3. 微分方程组的求解:

方程(1), (2)结合, 可以写成下列形式:

$$\frac{d\theta}{dx} + (H_{12} + 2)R_0^{-\frac{1}{4}} \cdot \Gamma = \frac{\tau_w}{\rho_t w_t^2} \quad (9)$$

由方程(9)当我们采用“约束分离法”后可以看出, Γ 等于临界极限值时有一部分解, 而当 Γ 大于临界极限值 mK 时(即控制变量 Γ 在不受限时)又有一部分解, 因此整个解是有两部分组成。

a, $\Gamma = mK$ 的常数时的解;

根据Buri的假定: 壁面 X_p , 应力 τ_w 和形参数 H_{12} 是准则函数 Γ 的唯一的函数。并且有:

$$\frac{\tau_w}{\rho_t w_t^2} R_0^{\frac{1}{4}} = f_1(\Gamma) = \eta \quad (10)$$

$$H_{12} = \frac{\delta^*}{\theta} = f_2(\Gamma) \quad (11)$$

由此方程(9)可以写成下列形式:

$$R_0^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta R_0^{\frac{1}{4}}}{w_t} \frac{dw_t}{dx} (H_{12} + 2) = \eta$$

$$\frac{4}{5} \frac{d(\theta R_0^{-\frac{1}{4}})}{dx} + \frac{\theta R_0^{-\frac{1}{4}}}{w_f} \frac{dw_f}{dx} \left(\frac{9}{5} + H_{12} \right) = \eta$$

$$\frac{4}{5} \frac{d(\theta R_0^{-\frac{1}{4}})}{dx} + \Gamma \cdot \left(\frac{9}{5} + H_{12} \right) = \eta$$

$$\therefore \frac{d(\theta R_0^{-\frac{1}{4}})}{dx} = \frac{5}{4} \left\{ \eta - \Gamma \left(\frac{9}{5} + H_{12} \right) \right\} \quad (12)$$

Buri进一步发现方程(12)的右边是 Γ 的唯一的函数,并且可以近似地认为是线性函数 $A - B\Gamma$,

这样,

$$\frac{d(\theta R_0^{-\frac{1}{4}})}{dx} = A - B\Gamma \quad (13)$$

$$\text{其中 } A = \frac{5}{4}\eta, \quad B = \left(\frac{9}{4} + \frac{5}{4}H_{12} \right).$$

当方程(13)中的 $\Gamma = \text{常数}$ 时就很容易积分出来了。

$$\frac{d(\theta R_0^{-\frac{1}{4}})}{dx} = D \quad (14)$$

$$\therefore \theta R_0^{-\frac{1}{4}} = D \cdot \int_{x_1}^x dx + \text{const} \quad (15)$$

方程中的常数由初始条件 $x = x_1$ 来决定。

因此得到

$$\theta = R_0^{-\frac{1}{4}} \cdot D \cdot (x - x_1) + \theta(x_1) \cdot R_0^{-\frac{1}{4}}(x_1) \cdot R_0^{-\frac{1}{4}} \quad (16)$$

将方程(16)代入(2)式得:

$$\frac{dw_f}{w_f dx} = \frac{\Gamma}{D \cdot (x - x_1) + \theta(x_1) \cdot R_0^{-\frac{1}{4}}(x_1)}$$

经积分和整理后得:

$$w_f = w_f(x_1) \cdot e^{(\Gamma/D) \cdot \ln \left[\frac{(x-x_1) + (F/D)}{(F/D)} \right]} \quad (17)$$

其中 $F = \theta(x_1) \cdot R_0^{-\frac{1}{4}}(x_1)$; $D = A - B\Gamma$;

但当 $x = x_1$ 时 w_f 必须满足约束条件 $w_f(x_1) = w_{f1}$;

方程(16)和(17)便是当 $\Gamma = \text{常数} mK$ 时的解。

b, Γ 大于临界值即无限止时的解;

当 Γ 无限止时,就可以看作是控制的一般变分问题来处理了。即求解 θ_{min} 的变分问题。

我们从方程(13)出发,并改写成下列形式:

$$\frac{d(\theta R_0^{\frac{1}{4}})}{dx} + B \frac{\theta R_0^{\frac{1}{4}}}{w_f} \cdot \frac{dw_f}{dx} = A \quad (18)$$

方程 (18) 是 $\theta R_0^{\frac{1}{4}}$ 的一阶线性常微分方程, 很易积分得到:

$$w_f^B \cdot \theta \cdot R_0^{\frac{1}{4}} = A \int_{x_0}^{x_1} w_f^B dx + \text{const} \quad (19)$$

其中常数由初始条件来定: $\text{const} = w_f^B(x_0) \cdot \theta(x_0) \cdot R_0^{\frac{1}{4}}(x_0)$ 。我们将 $R_0^{\frac{1}{4}}$ 展开后得:

$$w_f^{\frac{1}{4}} \cdot w_f^B \cdot \theta^{\frac{5}{4}} = v_0^{\frac{1}{4}} \cdot \left(A \int_{x_0}^{x_1} w_f^B dx + w_f^B(x_0) \cdot \theta(x_0) R_0^{\frac{1}{4}}(x_0) \right)$$

其中 v_0 是滞止状态下的运动粘性系数, 可以看作是常数。

则得:

$$\theta = \left[\frac{v_0^{\frac{1}{4}}}{w_f^{\frac{4B+1}{4}}} \cdot \left(A \int_{x_0}^{x_1} w_f^B dx + \text{const} \right) \right]^{\frac{4}{5}} \quad (20)$$

现在来求 θ 的变分:

在变分中欧拉方程有下列的形式。

$$\text{即 } \frac{\partial \theta}{\partial w_f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \theta}{\partial w_f'} \right) = 0 \quad (21)$$

θ 可以用 (20) 式的右项代入

$$\text{其中 } w_f' = \frac{dw_f}{dx},$$

而在方程 (20) 中不包含有 w_f' 项, 因此方程 (21) 的左边第二项消失。

它必须满足

$$\frac{\partial \left[\frac{v_0^{\frac{1}{4}}}{w_f^{\frac{4B+1}{4}}} \cdot \left(A \int_{x_0}^{x_1} w_f^B dx + \text{const} \right) \right]^{\frac{4}{5}}}{\partial w_f} = 0;$$

要上式成立, 只有当 $\left[\frac{v_0^{\frac{1}{4}}}{w_f^{\frac{4B+1}{4}}} \left(A \int_{x_0}^{x_1} w_f^B dx + \text{const} \right) \right]^{\frac{4}{5}}$

项为常数也即 $w_f = \text{常数}$ 时才能满足。

这就证明了当 Γ 大于临界值时, $w_f = \text{常数}$, 是最佳分布的解。

因此全部解有两段组成; 即从头部 x_0 到 x_1 之间的最佳分布是常数, 并且 $w_f = w_{f(\max)}$;

另一段是在 x_1 到出口 x_2 之间, 它的最佳速度分布由(17)式给出, 由文献[3]中说明在开关点是连续的, 即满足 $w_{f, \max} = w_f(x_1)$, $\theta(x_1)$ 由方程(20)给出, 开关点的位置 x_1 在满足附加约束 $w_{f, x_1} = w_{f1}$ 时的解中自动找出来, 不须事先知道。

由头部滞止点 $x = 0$ 到很小一个 Δx 区间内即 x 在 $[0, x_0]$ 之间速度由0增加到最大 $w_{f, \max}$, 为了使 x_0 点上的速度有一个光滑的过渡, 我们在这个区间内的速度分布取正弦曲线。

$$\text{即 } w_f = w_{f, \max} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{\Delta x}\right) \quad (22)$$

整个壁速度的分布见略图(1)：

C, 方程中关于常数A, B的说明。

根据Nikurades和Buri的系统测量指出：

当流动减速时 $A = 0.0175$; $B = 4.15$ 。

当流动加速时 $A = 0.016$; $B = 3.49$ 。

Schlesting^[22]建议同时包含两种流动情况时

$A = 0.016$; $B = 4$ 。这时的 $H_{12} \approx 1.4$ 。

4. 工作方程的无因次化

为了方程的通用性和分析方便起见, 我们把它变成无因次形式。速度都用出气边上给定的速度 w_{f1} 来除, 长度尺寸都用滞止点到出气边叶型表面弧长 l 来除。

方程中的参数：

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{l}; \quad \bar{n} = \frac{n}{l}; \quad \bar{S} = \frac{S}{l}; \quad \bar{w}_f = \frac{w_f}{w_{f1}}$$

其中 S 为线性栅距。

对于0段：即由0到 x_0 。

的无因次公式形式为：

$$\bar{w}_f = \bar{w}_{f, \max} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\bar{x}}{\Delta \bar{x}}\right) \quad (22)'$$

冲量方程：

$$\bar{\theta} = \left[\frac{A \cdot \bar{w}_{f, \max}^B}{\left\{ \bar{w}_{f, \max} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\bar{x}}{\Delta \bar{x}}\right) \right\}^{\frac{4B+1}{4}}} \cdot R_1^{\frac{1}{4}} \int_0^{\bar{x}_0} \sin^B\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\bar{x}}{\Delta \bar{x}}\right) d\bar{x} \right]^{4/5};$$

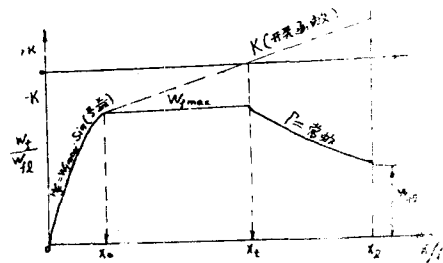


图1 沿壁面最佳速度分布示意图

其中 $R_1 = \frac{w_{f1} \cdot l}{v_0}$ 是常数

经过积分得:

$$\bar{\theta} = \left[\frac{A \cdot \bar{w}_{f_{max}}}{\left\{ \bar{w}_{f_{max}} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\bar{x}}{\Delta \bar{x}} \right) \right\}^{\frac{4B+1}{4}} \cdot R_1^{\frac{1}{4}}} \left\{ -\frac{\Delta \bar{x}}{2\pi} \sin^3 \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\bar{x}}{\Delta \bar{x}} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\bar{x}}{\Delta \bar{x}} \right) + \frac{3\Delta \bar{x}}{4\pi} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\bar{x}}{\Delta \bar{x}} \right) - \frac{3\Delta \bar{x}}{8\pi} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\bar{x}}{\Delta \bar{x}} \right) \right\} \right]^{4/5},$$

我们在计算中需要的是在 \bar{x}_0 点上的 $\bar{\theta}(\bar{x}_0)$ 值。

因此:

$$\bar{\theta}(\bar{x}_0) = \left[\frac{3}{8} \frac{A \cdot \bar{x}_0}{\bar{w}_{f_{max}} \cdot R_1} \right]^{4/5} \quad (22)''$$

对于第一段: 则在 $\bar{x}(\bar{x}_0, \bar{x}_1)$ 之间, 方程 (20) 变成下式:

$$\bar{\theta} = \left[\frac{1}{\bar{w}_f^{\frac{4B+1}{4}} \cdot R_1^{\frac{1}{4}}} \cdot \left\{ A \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \frac{1}{\bar{w}_{f_{max}}^B} d\bar{x} + \bar{C}_1 \right\} \right]^{4/5},$$

$$\bar{\theta}(\bar{x}_1) = \left[\frac{1}{\bar{w}_{f_{max}}^{\frac{4B+1}{4}} \cdot R_1^{\frac{1}{4}}} \left\{ A \cdot \bar{w}_{f_{max}}^B (\bar{x}_1 - \bar{x}_0) + \bar{C}_1 \right\} \right]^{4/5} \quad (20)'$$

其中 $\bar{C}_1 = \bar{w}_f(\bar{x}_0)^{\frac{4B+1}{4}} \cdot \bar{\theta}(\bar{x}_0)^{\frac{5}{4}} \cdot R_1^{\frac{1}{4}}$;

$\bar{w}_f(\bar{x}_0) = \bar{w}_{f_{max}}$ 。 $\bar{\theta}(\bar{x}_0)$ 由方程 (22)'' 决定

$$\Gamma = \bar{\theta}^{\frac{5}{4}} \cdot \bar{w}_f^{\frac{1}{4}} \cdot R_1^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{d\bar{w}_f}{\bar{w}_f \cdot d\bar{x}} \quad (2)'$$

对于第二段:

即 $\Gamma = \text{常数}$ 段, 在 $\bar{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ 之间,

方程 (16) 变成下式:

$$\bar{\theta} = \left\{ \frac{l}{\bar{w}_f^{\frac{1}{4}} \cdot R_1^{\frac{1}{4}}} \left[D \cdot (\bar{x} - \bar{x}_1) + \bar{\theta}(\bar{x}_1)^{\frac{5}{4}} \cdot \bar{w}_f(\bar{x}_1)^{\frac{1}{4}} \cdot R_1^{\frac{1}{4}} \right] \right\}^{4/5}, \quad (16)'$$

其中 $\bar{w}_t(x_i) = \bar{w}_{tmax}$;

$\bar{\theta}(x_i)$ 由公式 (20)' 确定。

方程 (17) 变成下式:

$$\bar{w}_t = \bar{w}_t(x_i) \cdot e^{(F/D) \cdot \ln\left[\frac{(x-x_i) + (F/D)}{F/D}\right]} \quad (17)'$$

$$\text{其中 } \bar{F} = \bar{\theta}(x_i)^{\frac{5}{4}} \cdot \bar{w}_t^{\frac{1}{4}} \cdot R_t^{\frac{1}{4}}, \quad D = A - B\Gamma。$$

三 任意回转面上, 可压缩流动轴流式叶栅最佳壁面速度分布

平面不可压流叶栅壁面最佳速度分布, 经转换到任意回转面上可压缩流动后, 仍然是叶栅壁面的最佳速度分布:

1. 假定 Buri 准则函数 Γ 经转换到可压缩任意回转面上后仍然是一定的流动准则, 并且保持原来的临界值。这个假定对于亚音速流动来说是可行的, 不会引起太大的误差。

2. mager's 变换和 mangler's 以及轴对称旋成体表面边界层特征参数到任意回转面叶栅表面边界层特征参数的变换。

在这里我们对上述各类变换不作详细的说明, 仅是应用:

a. mager's 变换:

在应用 mager's 变换后, 可以把平面不可压流的边界层特征参数计算结果变换到可压缩流动上去。

它们的简单关系如下:

当绝热指数 $r = 1.4$ 时有:

$$d\bar{y} = \left(\frac{T_t}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\rho_t}{\rho_0} dy, \quad d\bar{x} = \left(\frac{T_t}{T_0}\right)^2 dx \quad (23a)$$

$$\bar{w} / \bar{w}_t = w / w_t, \quad \text{而 } \bar{w}_t = M_t \cdot a_0;$$

$$\text{其中 } M_t = \bar{w}_t / a_0. \quad (23b)$$

a_0 是滞止音速, T_0 是滞止温度, $a_0 = \sqrt{KgRT_0}$ 。

在应用 $\frac{T_0}{T_t} = \{1 + [(r-1)/2] \cdot M_t^2\}$ 的关系式后我们得到

$$w_t = \bar{w}_t / \{1 + [(r-1)/2] \cdot M_t^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (23c)$$

又有 $\bar{\theta} = \left(\frac{T_t}{T_0}\right)^{k_1} \cdot \theta$, 其中 T_t 是相应截面上的静温。

因此有

$$\overline{\theta}/l = \{1 + [(r-1)/2] \cdot M_1^2\}^{K_1} \cdot \overline{\theta}/l \quad (23d)$$

其中 $K_1 = 0.5[(r+1)/(r-1)]$; l 是叶型表面弧长。

上面带“—”横的表示是不可压流参数。

b, mangler's 变换

它是把平面的量变换到轴对称旋成体表面上去的变换方法：它在变换中保留了除横向速度 v 以外的所有其他参数：

$$\left. \begin{aligned} \overline{w} &= w; & \overline{w}_r &= w_r; & \overline{x} &= x; \\ \overline{p} &= p; & \overline{\rho} &= \rho; & \overline{h} &= h; & \overline{\mu} &= \mu. \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

这里横向速度 v 按下式进行变换：

$$\left. \begin{aligned} \overline{v} &= \frac{v}{r_o(x)} + \frac{r_o'(x)}{r_o^2(x)} \cdot y \cdot w \\ \frac{\partial}{\partial x} &= r_o^2(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + r_o'(x) \cdot y \cdot \frac{\partial}{\partial y}; & \frac{\partial}{\partial y} &= r_o(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (24b)$$

其中 $r_o(x)$ 表示轴对称旋成体表面横向曲率半径。

旋成体表面局部摩擦应力 τ_o 可以用平面局部表面摩擦应力 $\overline{\tau}_o$ 来表示：

$$\tau_o = r_o(x) \overline{\tau}_o \quad (24c)$$

同理，边界层特性参数之间有下列关系：

$$\delta^* = \overline{\delta}/r_o; \quad \theta = \overline{\theta}/r_o; \quad H_{12} = \overline{H}_{12} \quad (24d)$$

上式中“—”表示平面上的参数。

通过上述诸方程就可以把平面上的边界层特性参数转换到轴对称旋成体表面上去了。

c, 由轴对称旋成体表面上的边界层特征参数变换到任意回转面上去。

通过文献[11]的方法，我们仅须把轴对称旋成体表面上边界层特征参数中包含有横向曲率半径 $r_o(x)$ 量改变成任意回转面上流片厚度 $\tau(x)$ 即可。

有了上述假定和变换方法我们就可以很方便地把平面不可压流叶栅表面的最佳壁面速度分布和边界层冲量损失厚度变换到可压缩流任意回转面上去了。但还必须证明变换到任意回转面上去以后是否仍然是叶栅表面的最佳速度分布？

3. 证明变换到任意回转面上后，仍然是叶栅壁面的最佳速度分布。

文献[11]得任意回转面上可压缩流动轴流叶栅型面动能损失系数表示式：

$$\overline{\xi} = \left(\frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \right)^2 \frac{H_{32}^* \cdot \theta_{1t}^*}{1 - (H_{12}^* \theta_{1t}^* + \delta_{1t}^*)}; \quad (D)$$

作为单壁面我们近似假定：

$$\overline{\xi}_s = \left(\frac{\lambda_{1t}}{\lambda_{2t}} \right)^2 \frac{H_{32} \cdot \overline{\theta}_{1t}}{[r \cdot \Delta \varphi_t \cdot \cos \beta_1 - (H_{12} \cdot \overline{\theta}_{1t})]} \quad (E)$$

令 $a = \left(\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{21}}\right)^2 \cdot H_{32}$; $b = r_1 \cdot \Delta\varphi \cdot \cos \beta_1$; $e = H_{12}$ 。

近似地令 a, b, e 为常数, 其中 $\Delta\varphi_i$ 为角栅距。

则得:

$$\bar{\xi}_s = \frac{a \cdot \bar{\theta}_{1s}}{(b - e \cdot \bar{\theta}_{1s})} \dots\dots\dots (F)$$

对于平面可压缩流则有:

$$\bar{\xi}_s = \frac{C \cdot \bar{\theta}_{1s}}{D - e \cdot \bar{\theta}_{1s}} \dots\dots\dots (G)$$

平面不可压在第二节中已经得知:

$$\bar{\xi} = \frac{C \cdot \bar{\theta}_1}{D - e \cdot \bar{\theta}_1} \dots\dots\dots (C)$$

其中 $C = H_{32}$; $D = t \cdot \cos \beta_1$; $e = H_{12}$

在第二节中已经证明了 $\bar{\xi}$ 与 $\bar{\theta}_1$ 的极小值同时发生。同法可以证明:

$\bar{\xi}_s$ 与 $\bar{\theta}_{1s}$ 的极小值同时发生。

$\bar{\xi}_s$ 与 $\bar{\theta}_{1s}$ 的极小值同时发生。

我们用文献[*]的可压缩转换得:

$$\bar{\xi}_s = \frac{C \cdot \bar{\theta}_{1s}}{D - e \cdot \bar{\theta}_{1s}} = \frac{C \cdot \left\{ 1 + [(r-1)/2] M_r^2 \right\}_1^{K_1} \cdot \bar{\theta}_1}{D - e \cdot \left\{ 1 + [(r-1)/2] M_r^2 \right\}_1^{K_1} \cdot \bar{\theta}_1}$$

$$\text{令 } C \cdot \left\{ 1 + [(r-1)/2] \cdot M_r^2 \right\}_1^{K_1} = C;$$

$$e \cdot \left\{ 1 + [(r-1)/2] \cdot M_r^2 \right\}_1^{K_1} = E;$$

其中 $K_1 = 0.5[(r+1)/(r-1)]$;

则得

$$\bar{\xi}_s = \frac{C \cdot \bar{\theta}_1}{D - E \cdot \bar{\theta}_1}; \dots\dots\dots (C)'$$

再通过文献^[10]和文献^[11]的联合变换得到:

$$\text{因 } \bar{\theta}_{1s} = \tau \cdot \bar{\theta}_1; \quad \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_{1s} / \left\{ 1 + [(r-1)/2] \cdot M_r^2 \right\}_1^{K_1};$$

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\tau}{\left\{ 1 + [(r-1)/2] \cdot M_r^2 \right\}_1^{K_1}} \cdot \bar{\theta}_{1s}。$$

所以经联合变换后得的 $\bar{\xi}_s'$ 如下:

* 文献暂缺。

$$\bar{\xi}' = \frac{C \cdot \left[\frac{\tau}{\left\{ 1 + [(r-1)/2] \cdot M_t^2 \right\}_1^{k_1}} \right] \cdot \bar{\theta}_1}{D - e \cdot \left[\frac{\tau}{\left\{ 1 + [(r-1)/2] \cdot M_t^2 \right\}_1^{k_1}} \right] \cdot \bar{\theta}_1} = \frac{G \cdot \bar{\theta}_1}{D - P \cdot \bar{\theta}_1},$$

同样可以证明:

$\bar{\xi}$ 与 $\bar{\theta}_1$ 的极小值同时发生;

$\bar{\xi}'$ 与 $\bar{\theta}_1$ 的极小值同时发生。

因此:

$\bar{\xi}'$ 与 $\bar{\xi}$ 的极小值同时发生;

$\bar{\xi}$ 与 $\bar{\xi}'$ 的极小值同时发生。

又有 $\bar{\theta}_1$ 与 $\bar{\theta}_1$ 的极小值同时发生。

因此得

$\bar{\xi}$ 与 $\bar{\theta}_1$ 的极小值同时发生。

这样就证明了平面不可压流叶栅的最佳壁面速度分布经推广到可压缩流任意回转面上去后,仍然是叶栅的最佳壁面速度分布。但是可以看出损失系数不能直接转换,必须重新计算。因 $\bar{\xi} \neq \bar{\xi}'$ 。

但可以把

$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1 / \tau = \left\{ 1 + [(r-1)/2] \cdot M_t^2 \right\}_1^{k_1} \cdot \bar{\theta}_1 / \tau \text{ 代入 (F)}$$

式中得:

$$\bar{\xi} = \frac{a \cdot \left\{ 1 + [(r-1)/2] M_t^2 \right\}_1^{k_1} \cdot \bar{\theta}_1 / \tau}{b - e \cdot \left\{ 1 + [(r-1)/2] M_t^2 \right\}_1^{k_1} \cdot \bar{\theta}_1 / \tau}, \dots\dots\dots (H)$$

四 计算结果的分析比较

本文采用了“355”增压器^[14]涡轮叶片动叶中部截面平面叶栅作为例子来计算。并和文献〔7〕,〔8〕,〔18〕的情况来作比较。

该叶栅的参数是:

在转换到标准状态下(按流动相似准则)的进气速度 $w_0 = 98.5$ 米/秒;排气速度 $w_{t1} = 268$ 米/秒;进气角度 $\beta_0 = 37^\circ$;排气角 $\beta_1 = 67^\circ$;进气温度 288°K ;绝热指数 $\gamma = 1.4$;叶栅弦长 $b = 29.68$ mm;栅距 $t = 23.33$ mm;按叶型坐标算得背弦全长 $l = 37.07$ mm;雷诺数 $R_1 = \frac{w_1 \cdot l}{\nu_0} = 6.8 \times 10^5$; $R_2 = \frac{w_2 \cdot b}{\nu_0} = 2 \times 10^5$ (这在Buri法边界层

计算的范围内);背弧最高马赫数是 $M_{max}=0.9$ 。

在计算中选取了三种不同的临界控制量 Γ 和不同的开始段 Δx 。损失计算中应用了文献[10]中的关系式 $H_{32} = \frac{H_{12} + 1}{3H_{12} - 1}$;并对不同的扩散因子 $D \cos = w_{fmax}/w_{f1}$ 作了计算。其结果见表1,表2及图(2),图(3),图(4)等。从表1,表2中可见,当马赫数接近1时,可压缩性对结果有不可忽略的影响。(但在小马赫数下影响不

表1 计算结果

Γ	x_0	Dcos	$\bar{\xi}$		$\bar{\theta}_i$		M_{fmax}
		w_{fmax}/w_{f1}	不可压流	可压缩流	不可压流	可压缩流	
-0.02	0.1	1.15	0.00916	0.0132	0.00295	0.00423	0.905
		1.20	0.01037	0.01487	0.00333	0.00474	0.944
		1.25	0.01123	0.0161	0.0036	0.00515	0.984
		1.30	0.01438	0.02066	0.00459	0.00492	1.023
	0.2	1.15	0.00888	0.0127	0.00285	0.00407	0.905
		1.20	0.00978	0.0140	0.00315	0.00447	0.944
		1.25	0.01066	0.01531	0.00342	0.00487	0.984
		1.30	0.01182	0.01697	0.00378	0.00538	1.025
-0.04	0.1	1.15	0.00916	0.00132	0.00294	0.00422	0.905
		1.20	0.00974	0.01416	0.00313	0.004519	0.944
		1.25	0.01093	0.01581	0.003507	0.00503	0.984
		1.30	0.01208	0.01746	0.00387	0.00554	1.023
	0.2	1.15	0.00813	0.0119	0.00262	0.00382	0.905
		1.20	0.00940	0.0134	0.003024	0.00431	0.944
		1.25	0.00997	0.01444	0.0032	0.0046	0.984
		1.30	0.01116	0.01608	0.00358	0.005112	1.023

表2 计算结果

Γ	x_0	Dcos	$\bar{\xi}$		$\bar{\theta}_i$		M_{fmax}
		w_{fmax}/w_{f1}	不可压流	可压缩流	不可压流	可压缩流	
-0.06	0.1	1.15	0.0091	0.0132	0.00295	0.00422	0.905
		1.20	0.01006	0.01448	0.00323	0.004619	0.944
		1.25	0.0109	0.01579	0.003509	0.005022	0.984
		1.30	0.01178	0.0171	0.003775	0.00543	1.023
	0.2	1.15	0.00779	0.01158	0.00251	0.00371	0.905
		1.20	0.00874	0.0128	0.00286	0.00410	0.944
		1.25	0.00965	0.0141	0.003104	0.00449	0.984
		1.30	0.0105	0.01539	0.00338	0.004898	1.023

大)。但是, Γ 的变化, 在边界层不分离时对结果的影响不大。结果表明: 在选取和“355”叶栅相同的背弧最大马赫数下, $\Gamma = -0.04$, $x_0 = 0.2$ 的方案进行最佳设计后, 吸力面的损失系数可以从原设计的 0.0138 下降到 0.0119。

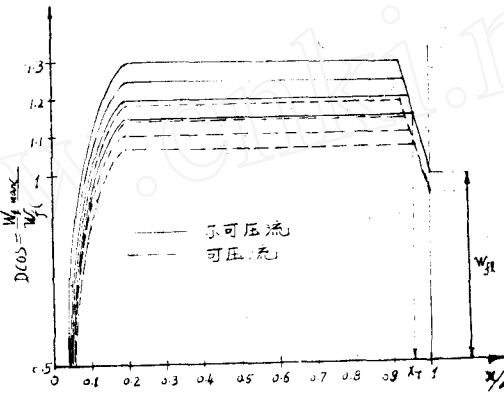


图 2 不同 $D\cos$ 下的最佳速度分布

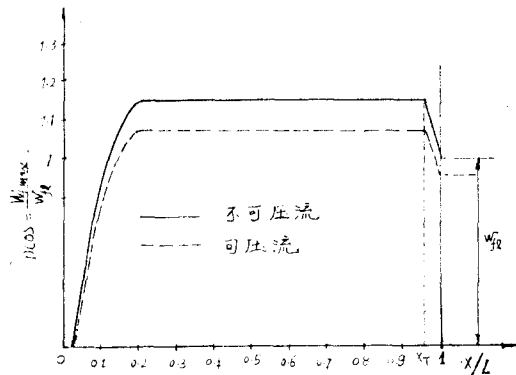


图 3 $\Gamma = -0.04$, $D\cos = 1.15$ 时的最佳速度分布

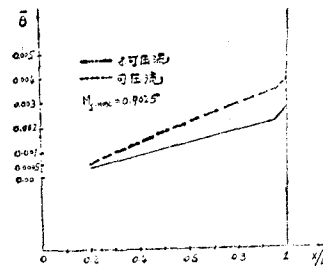


图 4 $\Gamma = -0.04$, $D\cos = 1.15$ 时的冲量损失厚度分布

图 (2) 是在控制值 $\Gamma = -0.04$, $x_0 = 0.2$ 满足排气速度 w_{r1} 约速下, 对不同扩散因子 $D\cos$ 的叶栅吸力面最佳速度分布。由图中看到: 在不同 $D\cos$ 下两段速度分布接点的位置 x_r 是不同的, 它随着 $D\cos$ 的增大向中部和前部移动。也就是说, 为了保持边界层不分离必须更早的开始降速, 很明显, 对涡轮来说, 连接点在后部接近出气边。而压气机将在中部和接近前部。

图 (3) 图 (4) 分别是在 $\Gamma = -0.04$, $x_0 = 0.2$ $D\cos = 1.15$ 下的最佳速度分布和冲量损失厚度分布。图中虚线表示可压缩流。

图 (3) 中的速度分布和文献 [7] 中的最佳速度分布的趋势是一致的, 见图 (5)。首先是等速度, 然后下降, 因为它是压气机叶栅, 所以它的连接点在中部。图中虚线是理论计算值, 实线是人工光滑值, 在连接点速度有一个间断面, 这显然是不合理

的。而图(3)中是连续的。

但和文献[18]中涡轮叶栅背弧速度分布很相似。前段迅速爬升到最高速度,然后基本保持等速,最后有很小一段降速见图(6)。

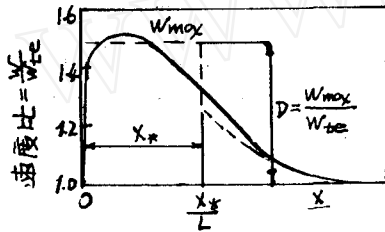


图5 最佳速度分布

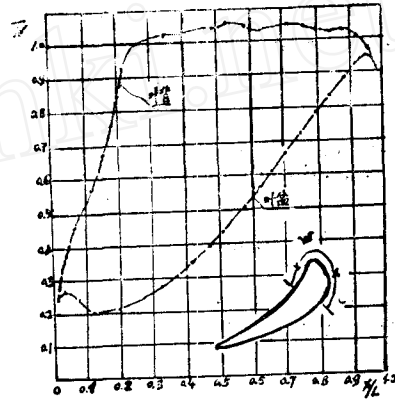


图6 文献[18]中某种涡轮叶栅的速度分布

从冲量损失厚度来看:文献[7]中各种平面压气机叶栅最佳设计方案出气边上冲量损失厚度,看来和本文方法比是偏大的。见图(7)。

图(8)是几种方法的计算结果比较。其中实线是按文献[19],虚线是按文献[20]中的计算方法,对文献[7]中的最佳叶栅VD17进行计算的结果。点划,圈划线分别是用本文提供的方法进行最佳设计后的不可压和可压缩流计算结果,和文献[20]的计算结果相近。比按文献[19]中方法算得的结果要低些。见图(8)

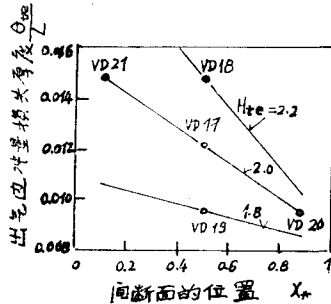


图7 文献[7]中各种最佳设计方案出气边上的冲量损失厚度。

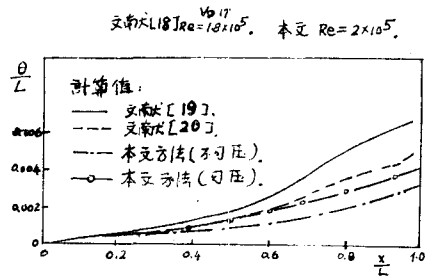


图8 计算结果比较。

图(9)中可以看到按本文提供的最佳设计所得的冲量损失厚度分布比文献[18]中所得结果要低些,这也显出了最佳设计的优越性。但比文献[8]提供的最佳设计的背弧冲量损失厚度分布要高些。图(9)中的点划线和图(10)中的虚线是本文方法算得的可压缩流($M_{r,max} = 0.905$)结果,图(9)中的点划线是不可压缩流结果。

关于最佳叶栅的理论设计问题还处在探讨的阶段。本文提出的最佳速度分布计算方法中,有很多近似的假定。从计算结果的分析比较来看,基本上是可行的,但没有经过

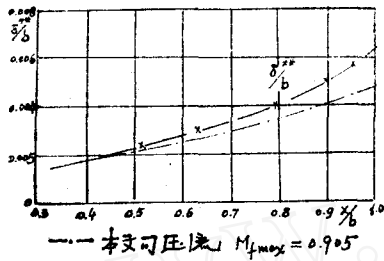


图9 计算结果比较

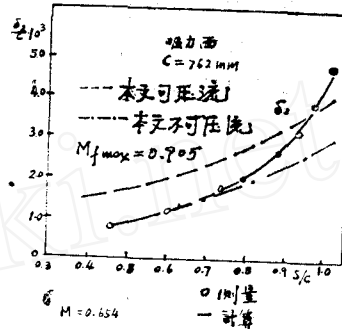


图10 计算结果比较

实验的验证。这还有待于进一步工作。需在实践中考验和不断的修正。同时在本文中还可能存在很多缺点和错误，切望读者批评指正。

七 符号说明

$\bar{\xi}$	型面	叶栅总的型面动能损失系数；
$\bar{\xi}$		叶栅单壁面的动能损失系数；
w		气流的相对速度；
u		边界层内纵向速度；
v		边界层内横向速度；
λ		无量纲速度系数， $\lambda = w/w_0'$ 其中 w_0' 是来流的均匀速度；
θ		冲量损失厚度；
H_{12}		形参数 (δ^*/θ)； $H_{32} = e/\theta$ ，其中 e 表示能量损失厚度；
δ^*		位移（或排挤）厚度；
$\delta_{1,*}$		叶栅出气边上的相对厚度；
t_n		出气边上的法向厚度；
$\Delta\varphi_1$		角栅距；
β		相对出气角；
r		回转半径；
ρ		密度；
r_c		边界层横向曲率半径；
τ_w		局部摩擦应力；
Γ		Buri 准则函数；
R_0		建立在冲量损失厚度 θ 基础上的雷诺数；
T		绝对温度；
a		音速；
l 或 L		沿叶栅头部滞止点到出气边的表面弧长；
γ		绝热指数；

C.	边界层内壁面局部摩擦系数;
x	边界层的纵向坐标;
y	边界层的横向坐标;
τ	任意回转面上的流片厚度;

注 脚

“1”或“l”, “t.”	是出气边上的参量;
“o”	前驻点或滞止参量;
“2t”	叶栅下游达到均匀时的理想参量;
“—”	平面、或相对参量;
“com”	代表可压缩;
“min”	代表最小量;
“max”	代表最大量;
“Sgn”	代表正负号;
“f”	代表边界层外边界上自由流体量;
“t”	代表壁面两段速度分布连接点的位置;
“a”	代表可压流, 任意回转面上的量;
“tot”	代表叶背、叶盆总的和。

其他符号在文中有定义。

参 考 文 献

- [1] Sage, Optimum systems control, (1968).
- [2] Leitman, Optimization techniques, (1962).
- [3] Ritch, Discrete optimal control with multiple constraints, Pt I & II. Automatica V.9 No4. (1973).
- [4] 刘高联, 平面叶栅气动设计的最优化原理(一), 东方汽轮机, No9 (1977).
- [5] 刘高联, 平面叶栅气动设计的最优化原理(二), 东方汽轮机, No9 (1977).
- [6] Papailiou, Boundary layer optimization for the design of high-turning axial-flow compressor blades, Trans. ASME. J. Engng. for power, No1. (1971).
- [7] Citavy', Two-Dimensional compressor cascades with optimum Velocity distributions over the blade, ASME Paper 74-GT-71, (1974).
- [8] Shuang Huo, Optimization based on boundary layer concept for compressible flows, ASME Paper 74-GT-63.
- [9] A. Buri, A method of calculation for the turbulent boundary layer with acceleration and retarded basis flow, R. T. P. trans.

№2073.

- [10] Stewart, Analysis of two-dimensional compressible flow characteristics downstream of turbomachine blade rows in terms of basic boundary-layer characteristics, NACA TN 3515, (1955).
- [11] 邹滋祥, 任意回转面上, 可压缩轴流式叶栅损失的理论计算方法, 力学情报4 (1976).
- [12] A.M. Ager, Transformation of the compressible turbulent boundary layer, J. of the Aeronautical Sciences, Volume 25, May (1958).
- [13] Л. Г. 洛强斯基, 层流边界层, 国防工业出版社.
- [14] “355”型系列化增压器透平叶片造型以及方法的说明, 《技术审查会议材料之四》, (1974.5).
- [15] I. J. Herring, Systematic two-dimensional cascade tests of NACA 65 series compressor blades at low speeds, NACA TN 3916 (1956).
- [16] A. D. S. Cartes, The low speed performance of related aerofoils in cascade, Aeronautical Research Council, Current Paper №29 (1951).
- [17] J. Citavy, Two-Dimensional cascade data, Proceedings of the Second International JSME symposium, Fluid Machinery and Fluidics, Tokyo, Vol. I Sept. (1972).
- [18] 陈乃兴, 关于附面层理论在叶轮机械气动设计应用中的若干问题。叶轮机械气动热力计算、设计与试验经验交流会文集, (1977.1).
- [19] A. E. Doenhoff and N. Tetervin, Determination of general relations for the Behavior of turbulent boundary layers, NACA Rep. 772 (1943).
- [20] P. Bradshaw, D. H. Ferris and N. P. Attwell, Calculation of boundary layer development using turbulent energy equation, J. of Fluid mechanics, Vol. 28, part 3, (1967).
- [21] D. J. L. Smith, Turbulent boundary layer theory and its application to blade profile design, ARC. CP. №868, March (1966).
- [22] H. Schlichting, Application of boundary-layer theory in turbomachinery, ASME(D) J. of Basic eng. Vol. 81, №4 (1959).