

共转圈的奇异性对盘状星系密度波的影响*

胡文瑞

(中国科学院力学研究所)

摘要

在气体动力学的星系盘模型中,本文讨论了边际稳定性时共转圈奇异性对中性密度波的影响。结果表明,共转圈奇异性对波的色散关系的影响是全局性的,计算了与银河系相类似的星系模型。共转圈附近波的群速度与自由密度波的关系有很大差异,能够严重地改变密度波传播的能流迳路。除非特定星系模型严格不存在共转奇异性,共转点不会是双零转向点。

星系密度波持续性所遇到的困难^[1,2],要求存在使波长期维持的机制。林家翘曾设想,引力不稳定性可以使波长期维持^[3],刘汝莹具体计算了一种引力不稳定的密度波模式^[4],岳曾元讨论了发展的問題^[5]。Lynden-Bell 和 Kalnajs 曾分析了三个共振区中波和星体之间的相互作用,由角动量密度向外传递而维持曳行的密度波^[6]。近来,林家翘等人又研究了在共转圈附近的能量交换不稳定性可以维持密度波^[7,8]。最近,还计算了二级渐近的近似解^[9]。但在共转圈处一般存在奇异性,这时需要对渐近解作细致的分析处理。为此,本文讨论共转圈奇异性对于星系密度波的影响。

与资料[7]相似,我们采用气体动力学模型。由气体动力学方程组可导出线性密度波方程为^[7]:

$$h_1'' + (A + i\Sigma\epsilon)h_1' + (i\Sigma'\epsilon + iA\Sigma\epsilon + B + C)h_1 = -B\psi_1, \quad (1)$$

其中 h_1 为焓值的扰动量,而

$$A = -\frac{1}{r} \frac{d}{d\ln r} \ln [\kappa^2(1-\nu^2)/\sigma_0 r], \quad (2)$$

$$B = -\frac{m^2}{r^2} + \frac{2\omega}{r^2(\omega_p - \omega)} \frac{d}{d\ln r} \ln [\kappa^2(1-\nu^2)/\sigma_0 \omega], \quad (3)$$

$$C = -\frac{\kappa^2}{a_0^2} (1-\nu^2), \quad (4)$$

$$\kappa^2 = (2\omega)^2 \left(1 + \frac{r}{2\omega} \frac{d\omega}{dr}\right), \quad \nu = \frac{m(\omega_p - \omega)}{\kappa}, \quad \Sigma = \frac{2\pi G\sigma_0}{a_0^2}, \quad (5)$$

$$\epsilon = \begin{cases} 1, & \text{对曳行波,} \\ -1, & \text{对导行波,} \end{cases}$$

ψ_1 为扰动引力势。由泊松方程最低级近似给出:

本文 1976 年 8 月 6 日收到。

* 该稿生同志曾共同讨论了本工作。

$$\phi_1' = i \Sigma \epsilon h_1, \quad (6)$$

公式中各个量的物理含义与资料[7]中的定义相同。由(1)和(6)式消去 h_1 和 h_1' , 得到 ϕ_1 的方程:

$$\phi_1''' + \left(i \Sigma \epsilon + A - \frac{2\Sigma'}{\Sigma} \right) \phi_1'' + \left(B + C + i A \Sigma \epsilon - \frac{\Sigma''}{\Sigma} - A \frac{\Sigma'}{\Sigma} + \frac{2\Sigma'^2}{\Sigma^2} \right) \phi_1' + i \epsilon \Sigma B \phi_1 = 0, \quad (7)$$

由(4)和(5)式可知,一般只有 C 和 Σ 为大量;但由(2), (3)式表明,共转圈处 B 有奇异性,而林德勃拉德共振处 A 和 B 都有奇异性。我们主要关心共转圈的奇异性对密度波的影响,在(7)式中保留 C , Σ 和 B 的项,略去小量项后基本方程式为:

$$\phi_1''' + i \Sigma \epsilon \phi_1'' + (B + C) \phi_1' + i B \Sigma \epsilon \phi_1 = 0. \quad (8)$$

如果在(8)式中令 $B = 0$, 就得到资料[7]的基本关系。

讨论边际稳定性时的中性密度波。作变换

$$x = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad (9)$$

定义大参数 λ 为:

$$\lambda = \frac{\kappa r_0}{a_0} \gg 1, \quad (10)$$

r_0 为共转圈半径。由(3)式得到系数 B 的奇异部分为(忽略 B 的非奇异部分 $-m^2/r^2$):

$$B = \frac{\lambda^2}{r_0^2} \frac{R}{\nu}, \quad R = -\frac{2m a_0^2}{(\kappa r)^2} \left(\frac{\omega}{\kappa} \right) \frac{d}{d \ln r} \ln \left[\frac{\sigma_0 \omega}{\kappa^2 (1 - \nu^2)} \right]. \quad (11)$$

利用边际稳定性条件,不难得到

$$\Sigma = \frac{2\kappa}{a_0}. \quad (12)$$

将(9)–(12)式代入(8)式,基本方程可化为:

$$\frac{d^3 \phi_1}{dx^3} + 2\lambda \epsilon i \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \lambda^2 \left(\nu^2 - 1 + \frac{R}{\nu} \right) \frac{d \phi_1}{dx} + 2\lambda^3 \epsilon i \frac{R}{\nu} \phi_1 = 0. \quad (13)$$

因为 λ 是大参数,可用 WKBJ 的方法,求形如

$$\phi_1 = \exp [i \lambda \varphi(x)] \quad (14)$$

的解,其中 $\varphi(x)$ 为 x 的缓变函数。一般形式的密度波解可以表示为:

$$\phi_1 = A(x) \exp [i \int k(x) dx], \quad (15)$$

其中 k 为无量纲波数。比较(14), (15)式可得到:

$$\begin{cases} k(x) = \lambda \operatorname{Re} [\varphi'(x)], \\ A(x) = \exp \{ -\lambda \mathcal{I}_m [\varphi(x)] \}. \end{cases} \quad (16)$$

将(14)式代入(13)式,基本方程就化成:

$$\begin{aligned} & (i \lambda \varphi''' - 3 \lambda^2 \varphi' \varphi'' - i \lambda^3 \varphi'^3) + 2\lambda \epsilon i (i \lambda \varphi'' - \lambda^2 \varphi'^2) \\ & + i \lambda^3 \left(\nu^2 - 1 + \frac{R}{\nu} \right) \varphi' + 2\lambda^3 \epsilon \frac{R}{\nu} i = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

由(17)式的 λ^3 项就得到速变相近似的渐近方程为:

$$\varphi'^3 + 2\epsilon \varphi'^2 - \left(\nu^2 - 1 + \frac{R}{\nu} \right) \varphi' - \frac{2R\epsilon}{\nu} = 0. \quad (18)$$

速变相法处理时,要求方程(18)的解 φ 满足条件

$$\left| \frac{\varphi''}{\varphi'^2} \right| \ll \lambda, \quad \left| \frac{\varphi'''}{\varphi'^3} \right| \ll \lambda^2. \quad (19)$$

将会看出,在 $x = 0$ 附近的解不满足条件(19)式. 但共转圈附近可以求出基本方程(13)的级数解.

(18)式为 φ' 的三次代数方程,有三个根. 作变换.

$$\varphi' = y - \frac{2}{3} \epsilon, \quad (20)$$

就把(18)式化成了标准型

$$y^3 - \left(\nu^2 + \frac{1}{3} + \frac{R}{\nu} \right) y + \frac{2\epsilon}{3} \left(\nu^2 - \frac{1}{9} - \frac{2R}{\nu} \right) = 0. \quad (21)$$

记方程(21)的系数为:

$$p = - \left(\nu^2 + \frac{1}{3} + \frac{R}{\nu} \right), \quad q = \frac{2\epsilon}{3} \left(\nu^2 - \frac{1}{9} - \frac{2R}{\nu} \right), \quad (22)$$

则(21)式三个解的性质依赖于方程的判别式:

$$\begin{aligned} D &= -4 p^3 - 27 q^2 \\ &= 4 \left[\nu^6 - 2 \nu^4 + \nu^2 + 3 R \nu^3 + 14 R \nu + 3 R^2 - \frac{R}{\nu} - 11 \left(\frac{R}{\nu} \right)^2 + \left(\frac{R}{\nu} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

D 大于、等于、小于零分别对应于(21)式有三个相异的实根,三个实根但有两个重根,一个实根和一对共轭复根.

虽然 R 的值一般仅为 λ^{-2} 量级,但 $\frac{R}{\nu}$ 项对 D 的大小和符号会造成重大影响. 可以看出,当 ν 不很大时,(23)式给出 $D < 0$,这时的密度波有一个是缓变振幅的,一个随空间增幅,一个减幅;在某个频率 $\nu(r_1) = -\nu_1 < 0$, $\nu(r_2) = \nu_2 > 0$ 时, $D = 0$,有两个波在 r_1, r_2 点分别接合;当 $\nu < -\nu_1$, $\nu > \nu_2$ 以后, $D > 0$,故密度波为三个缓变振幅波. 能够预计到,在 $|\nu|$ 较接近 1 时,所求出的解应和 $R = 0$ 时的自由密度波解相同,即

$$y_1 = \frac{2}{3}, \quad y_2 = -\frac{1}{3} + |\nu|, \quad y_3 = -\frac{1}{3} - |\nu|, \quad (24)$$

或者

$$\varphi'_1 = 0, \quad \varphi'_2 = -1 + |\nu|, \quad \varphi'_3 = -1 - |\nu|. \quad (25)$$

解(25)式除多一平凡解 $\varphi'_1 = 0$ 外, φ'_2 和 φ'_3 即为边际稳定性时林家翘-刘汝莹的色散关系^[7].

在共转圈 $x = 0$ 附近,速变相法失效,我们可以直接求基本方程(13)的级数解. 先将频率在共转圈附近作 Taylor 级数展开,并取到线性项:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{m}{\kappa} \left[- \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=0} x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_{x=0} x^2 + \dots \right] \\ &\simeq - \frac{m}{\kappa} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=0} x = \sqrt{a} x, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $a^2 = -\frac{m}{\kappa} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=0} > 0$. 若 $b = \lambda \frac{R}{\sqrt{a}}$, 基本方程(13)的三个解为(具体推导见附录):

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_{1,1} &= x^2 \left\{ 1 - \frac{b+2i}{3}(\lambda x) + \frac{(b^2-6)+4bi}{24}(\lambda x)^2 + \frac{b(16-b^2)+6(4-b^2)i}{360}(\lambda x)^3 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(12-b^2)^2-8b(10-b^2)i}{8640} - \frac{a}{60\lambda^2} \right] (\lambda x)^4 + \dots \right\}, \end{aligned} \right. \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_{1,2} &= 1 - 2i(\lambda x) - \frac{2b+i}{3}(\lambda x)^3 + \frac{2(b^2-2)+9bi}{24}(\lambda x)^4 \\ &\quad + \left[\frac{2b(21-b^2)+(18-13b^2)i}{360} + i \frac{a}{30\lambda^2} \right] (\lambda x)^5 + \dots, \end{aligned} \right. \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_{1,3} &= \phi_{1,2} \int \left(\frac{\phi_{1,1}}{\phi_{1,2}} \right)' \left\{ c \int \frac{e^{-2\lambda x}}{\phi_{1,2}^3 \left[\left(\frac{\phi_{1,1}}{\phi_{1,2}} \right)' \right]^2} dx + c' \right\} dx. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

不难看出, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\phi_{1,1} \rightarrow 0$, $\phi_{1,2} \rightarrow 1$, $\phi_{1,3} \rightarrow$ 常数.

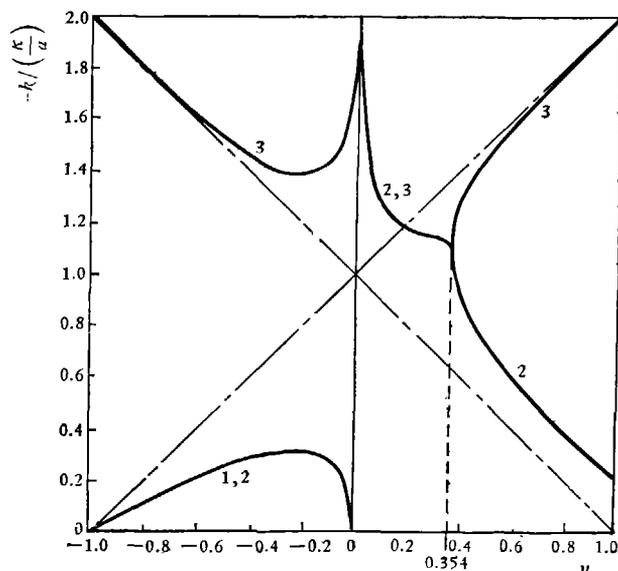


图1 共转奇异性对密度波色散关系的影响

关系式(15), 它们有相同的波数. 但长波 1, 2 的振幅各对应于一个随 ν 值单调地迅速增加和迅速减少的波. 如果认为长波发源于内林德勃拉德共振 $\nu = -1$ 处, 这就意味着长波在向共转圈传播时, 一族迅速地衰减, 一族则很快地放大, 而呈空间不稳定性. 共转圈以内, 方程(21)的三个解为:

$$y_{1,2} = -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} (\alpha - \beta), \quad y_3 = \alpha + \beta, \quad (31)$$

其中

$$\alpha = \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{-\frac{D}{108}} \right]^{1/3}, \quad \beta = \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{-\frac{D}{108}} \right]^{1/3} \quad (D < 0). \quad (32)$$

在共转圈以外, 在曳行波的假设下 ($k < 0$) 求出, 三族波中有一族的 k 值为正, 应略去不计.

我们具体讨论一个实例. 对于银河系这样的星系, 如果选用 Schmidt (1965) 模型, 可估计出 $0.03 \lesssim R \lesssim 0.07$. 不妨取 R 的典型值为:

$$R = 0.05. \quad (30)$$

计算结果表明: 在 $-1 < \nu < 0$ 的范围内, 判别式 D 的值恒为负; 当 $\nu < 0.354$ 时, D 为负; $\nu = 0.354$ 时, $D = 0$; $\nu > 0.354$ 时, D 为正. 图 1 绘出了这种类型的曳行密度波 ($\epsilon = 1$) 的色散关系. 图中两条直的点划线是林家翘-刘汝莹得到的色散关系^[7], 即 (25) 式的 φ_2' 和 φ_1' . 在共转圈以内有两类波: 图 1 中与曲线 3 对应的是短波, 其振幅是缓变的. 与曲线 1, 2 对应的长波解 y_1 和 y_2 , 是一对共轭复数, 根据

当 $0 < \nu < 0.354$ 时, $D < 0$, y_2 和 y_3 为一对共轭复数. 这时的解相应于 (31) 式中的 y_1 和 y_2 的表达式, 它们有相同的波数, 一个随 ν 增加而放大, 一个衰减. 在 $0.354 < \nu < 1$ 的范围内, $D > 0$. 这时就得到一族长波和一族短波, 它们的振幅皆是缓变的. 这个范围内的解可求出为:

$$y_n = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi + 2n\pi}{3}\right) \quad (n = 1, 2, 3), \quad (33)$$

其中

$$\varphi = \tan^{-1}\left[-\frac{2}{q} \sqrt{\frac{D}{108}}\right]. \quad (34)$$

当 $\nu = 0.354$ 时, $D = 0$, $y_2 = y_3$, 长波与短波的色散关系曲线在此接拢. 图 2 给出了 $\nu < 0.354$ 时共轭复数解的虚部, 利用关系(16)和(20)式即可得到速变的振幅的变化规律. 图 1 和图 2 的结果表明, 远离共转圈时, 短波的色散关系与自由密度波的结果非常接近; 长波在共转圈内是空间不稳定的, 这与自由密度波的关系有很大的差异; 在共转点附近的一个区域内 (若按银河系的 Schmidt 模型估计, 此区域延伸的范围约有 4—5 千秒差距), 奇异性产生极大的影响. 当然, 用 WKB 的短波长近似假设所求出的长波解是不可靠的. 这里得到的结果也意味着, 在运用自由密度波的长波段去分析问题, 必须小心谨慎.

利用得到的色散关系, 可以进一步讨论密度波的群速度. 根据群速度的定义,

$$C_g = -\frac{d\omega}{dk} = -\kappa \frac{d\nu}{dk}, \quad (35)$$

即群速度与图 1 中色散关系曲线的斜率 $\frac{d}{d\nu}\left(\frac{k}{\kappa/a}\right)$ 成反比. 边际稳定性时, 自由密度波的群速度为 $\pm a^{[7]}$. 即在共转圈内, 短波的群速度为 $-a$, 长波的为 a ; 在共转圈外则分别为 a 和 $-a$. 从图 1 中自由密度波

(点划线)的直线斜率可以立即得到上述结果. 考虑到共转圈的奇异性影响以后, $k/\left(\frac{\kappa}{a}\right)$ 与 ν 之间不再呈线性关系. 分析图 1 中色散关系曲线的斜率变化. 略远离共转圈以后, 短波群速度的大小和符号都很接近自由短密度波的群速度, 长波的群速度符号与自由长密度波的相同, 但数值有差异. 当 ν 由 -1 增加到略小于 -0.2 时, 色散关系曲线出现极值; ν 再增加, 曲线的梯度值异号, 因而群速度要改变符号. 这时, 短波的群速度由负值变为正值, 长波的由正值变为负值. 在 $0 < \nu < 0.354$ 时, 波的群速度恒为负值. 因此, 考虑到共转圈的奇异性以后, 不再存在自共转圈向外发射能量的短波, 共转圈也不能激发向外部传播的长波. 根据群速度的定义(35)式和密度波的解(31)或(33)式, 考虑到关系(16)和(20)式, 可以得到群速度在整

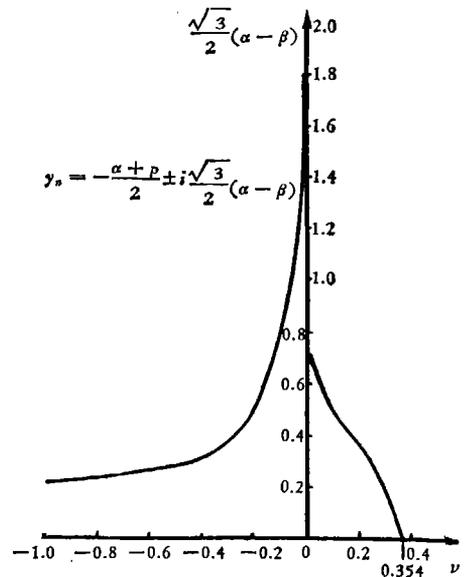


图 2 共转圈奇异性对密度波幅度的影响
(其中 $\mathcal{I}_m(y_n) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta)$, 当 $\nu < 0$ 时, $n = 1, 2$; 当 $\nu > 0$ 时, $n = 2, 3$)

个波段的关系。可以看出,长波和短波的群速度多是反号的,它们有相同的无穷值点。

对于导行波,可以得到同样的结果。(21)和(22)式表明,导行波与曳行波间的区别只在于系数 q 相差一个负号,其结果只使导行波的三个解 y_n 与曳行波的相应解差一负号。因此,导行波亦存在与图 1 相同的色散关系,只需将纵坐标改变一个负号。因此,长、短波所对应的群速度与曳行波的群速度大小相等而符号相反。这样,共转圈奇异性对曳行波造成影响的结论,对于导行波也同样成立。此外,若 R 与 ν 同时变号,则结果不变。

综上所述,共转圈奇异性对于密度波的影响主要在于:

1. 共转圈奇异性使色散关系在共转圈附近与自由密度波的关系差异很大;远离共转圈时,短波的性质接近自由密度波,但长波的色散关系偏离较大。因此,共转圈奇异性的影响是全局性的。

2. 在共转圈内,密度波的群速度在略小于 -0.2 处改变符号;在共转圈外,两族密度波在 $\nu = 0.354$ 时合拢,再靠近共转圈时群速度恒为负值。因此,在共转圈内没有一个简单的密度波的能流回路,也没有自共转圈向外传播能量的短波。

3. 在共转圈内长波是空间不稳定的。因此,从内林德勃拉德共振处发射的长波的振幅迅速增长,它会携带越来越多的波动能量。类似地,从 $\nu = 0.354$ 向共转圈传播的密度波能流亦要速增。有关长波的结果说明,需要用非短波长近似的方法,重新研究长波长密度波的性质。

4. 根据上述分析,当存在共转奇异性效应时,共转点不能简单地处理为双零转向点。只是对某些使(11)式的 R 严格为零的星系模型,才可以不考虑共转圈的奇异性。对于旋转线速度严格为常数的星系模型,可以有 $R = 0^{[10]}$ 。即使象银河系这样,旋转速度接近于常数的星系, R 只取作 0.05,这时共转奇异性影响也是很大的。

最后应该指出,详细地讨论更高级近似的泊松方程的渐近解,譬如三级和四级的渐近解,再完整地重新分析共转圈奇点的影响,那是十分有意义的。

参 考 资 料

- [1] Toomre, A., *Astrophys. J.*, **158** (1969), 899.
- [2] Kalnajs, A. J., *Astrophys. Lett.*, **11** (1972), 41.
- [3] 林家翘, Interpretation of large-scale spiral structure, *IAU symp.*, 1970, No. 38, p. 377.
- [4] 刘汝莹,林家翘教授于 1976 年 5 月在北京期间报告了此工作。
- [5] 岳曾元, *中国科学*, 1976, 6, 624.
- [6] Lynden-Bell, D., Kalnajs, A. J., *Monthly Notices RAS*, **157** (1972), 1.
- [7] 林家翘,刘汝莹, *SIAM Appl. Math.*, **29**(1975), 352.
- [8] 林家翘,刘汝莹,麦伟观, *Proc. nat. Acad. Sci.*, **73** (1976), 1379.
- [9] 李启斌,韩念国,林家翘, *中国科学*, 1976, 4, 421.
- [10] Toomre, A., *Astrophys. J.*, **138**(1963), 385.

附录 共转点 $x = 0$ 附近的级数解

将条件(26)式代入方程(13)就得到

$$x \frac{d^3 \psi_1}{dx^3} + 2\lambda x \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \lambda^2 (ax^3 - x + R_1) \frac{d\psi_1}{dx} + 2\lambda^3 R_1 \psi_1 = 0, \quad (A1)$$

其中 $R_1 = R/\sqrt{a}$ 。求方程(A1)的级数解:

$$\psi_1 = x^a (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_j x^j + \cdots), \quad a_0 \neq 0. \quad (A2)$$

将 (A2) 式代入 (A1) 式, 经整理后由各幂次系数为零, 得到

$$D(\alpha) \equiv \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) = 0, \quad (\text{A3})$$

$$D(\alpha+1)a_1 + \lambda[2t(\alpha-1) + \lambda R_1]a_0 = 0, \quad (\text{A4})$$

$$D(\alpha+2)a_2 + \lambda(\alpha+1)[2t\alpha + \lambda R_1]a_1 + \lambda^2(2\lambda R_1t - \alpha)a_0 = 0, \quad (\text{A5})$$

$$D(\alpha+j+2)a_{j+2} + \lambda(\alpha+j+1)[2t(\alpha+j) + \lambda R_1]a_{j+1} + \lambda^2[2\lambda R_1t - (\alpha+j)]a_j + \lambda^2 a(\alpha+j-2)a_{j-2} = 0 \quad (j=2, 3, 4, \dots). \quad (\text{A6})$$

(A3) 式即为方程 (A1) 的特征方程, 其特征指标 α 分别等于 0, 1, 2. 这就保证我们至少有解

$$\psi_{1,1} = x^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j. \quad (\text{A7})$$

具体计算 (A7) 式中的系数 a_j , 即得到 (27) 式给出的解 $\psi_{1,1}$. 由于三个 α 值皆相差整数倍, 一般只给出 (A7) 式这一个解. 幸运的是当 $\alpha=0$ 时, (A4) 式为恒等式, a_1 可任意; (A5) 式中 a_2 的系数为零, 就确定 a_1 和 a_0 的线性关系, a_2 可任意; 一旦 a_0, a_1 任意取定, 由 (A6) 式就确定其余系数 a_j ($j>2$), 皆可表示为 a_0 和 a_1 的线性组合. 若 $a_1=0$, 则给出一个解

$$\psi_{1,2} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (a_0 \neq 0). \quad (\text{A8})$$

具体计算 a_j 可给出 (28) 式所表示的解. 若 $a_1 \neq 0$, 则得到解 (A8) 与 (A7) 的和. 这样, 就得到两个线性无关的级数解 $\psi_{1,1}$ 和 $\psi_{1,2}$.

再用解 $\psi_{1,2}$ 使三阶方程 (A1) 降一阶. 由另一解 $\psi_{1,1}$ 可得到降阶的二阶方程的一个解, 用二阶方程的朗斯基行列式就不难得到第三个解. 第三个解的形式在 (29) 式中表示出来了.

我们可以证明, 级数解是收敛的.